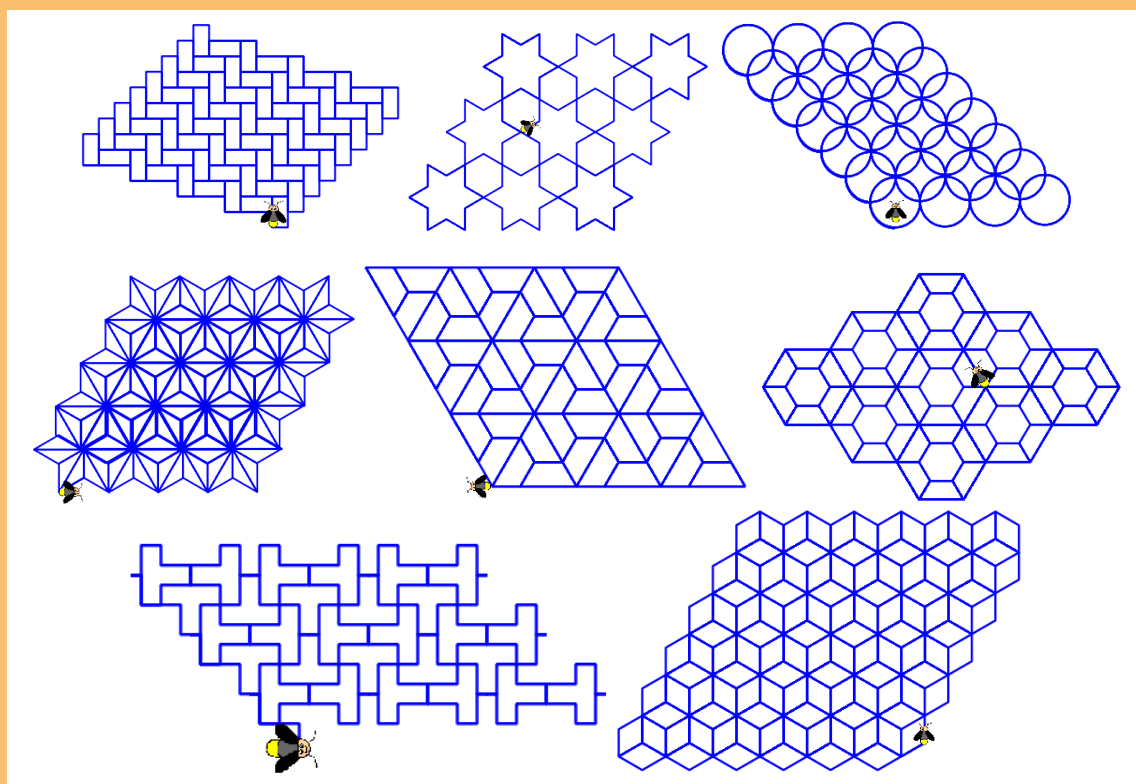




形の科学会誌

第 34 卷 第 1 号 2019

Journal of the Society for Science on Form



形の科学会

<http://katachi-jp.com/>

目 次

【論文】

タイリングパターンのプログラミング教育への利用

山守 一徳..... 1

二重可逆面積保存写像における二重対称周期軌道

山口 喜博 13

【シンポジウム】

第86回 形の科学シンポジウム 「形と人間」

討論記録 43

【会告など】

会告..... 48

原稿募集 54

タイリングパターンのプログラミング教育への利用

山守一徳

三重大学, 三重県津市栗真町屋町 1577

yamamori@edu.mie-u.ac.jp

Use of Tiling Patterns for Programming Education

Kazunori Yamamori

Mie University, 1577 Kurimamachiya-cho Tsu city, Mie, Japan

(2019 年 2 月 26 日受付, 2019 年 5 月 20 日受理)

Abstract: Classes drawing stars and pentagons are often performed as programming education in some elementary schools. This paper presents classes drawing tiling patterns. In programming, iterative processing is an important process. In the process drawing tiling patterns, there is next preparation steps in the iterative process. The next preparation step is an important point of teaching iterative processing. Next, the sequence in which the tiling patterns are drawn is not unique. There are various solutions in the drawing sequence. Finding the most suitable solution is very important for programming education. Tiling patterns consists of some simple figures. It makes children to notice figures in their lives. It also leads to figure understanding in arithmetic. I recommend that drawing a tiling pattern is a good theme of programming education.

Keywords: Programming Practice, Figure Understanding, Elementary School Education, Scratch, Floor Pattern

1. はじめに

1.1. 背景

平成 29 年 3 月告示の小学校学習指導要領^[1]では、「児童がプログラミングを体験しながら、コンピュータに意図した処理を行わせるために必要な論理的思考力を身に付けるための学習活動」を計画的に実施することという記述が入り、各教科の中において、プログラミング的思考の育成が求められている。小学校現場では戸惑いが広がっているが、平成 30 年 11 月に文部科学省から発行された「小学校プログラミング教育の手引き（第二版）」^[2]では、プログラミングに関する学習活動の具体例が増えて提示され、(第一版)と同様に「正三角形をかくプログラムの例」「正六角形を正しくかくためのプログラム例」が提示され、図形を描く活動は小学校現場に知られつつある。小学校 5 年生では多角形を習い、小学校 6 年生では対称な図形を算数で習い、図形描画プログラミングは算数と連携したプログラ

ミング教育となっている。

その中で、三重大大学教育学部の近隣学区との連携活動において、図形を描く活動を3年続けており、新たな教材を得ることができたので、本論文で紹介する。

1.2. 目的

小学校現場では、プログラミング的思考の育成のための授業をどのように行くと良いのか戸惑いがある。プログラミングが独立した教科としては行われず、既存の教科の中で、授業内容を改善していかなければならない。実際には、「総合的な学習の時間」の授業の中で、プログラミング教育に取り組ませることが行われ始めている。その中で本研究は、算数や、算数と図工などが関連付けられた総合的な学習の時間に適用可能な教材を提供することが目的である。

2. 方法

2.1. プログラミング教育で求められる教育成果

プログラミング教育は、コーディングを教えることではない。プログラム言語を教えることでもなく、計算論的思考を巡らせて物事を発展改善させるための手法である。この計算論的思考は、2006年に Jeannette M. Wing 氏によって紹介された Computational Thinking^[3]を 2015年に中島秀之氏^[4]によって訳された言葉である。プログラミング教育は、2013年6月12日の第12回産業競争力会議の資料^[1]の中で、「産業競争力の源泉となるハイレベルなIT人材の育成・確保」の節の中に「義務教育段階からのプログラミング教育等のIT教育を推進する。」と書かれたところから日本で注力が始まっている。プログラミング的思考の育成のための手法の中に位置付けられるプログラミング教育であるが、計算機を用いることは必須ではない。計算機を使わないアンブラグドプログラミングもプログラミング教育である。しかし、2013年4月17日の第6回産業競争力会議の資料^[6]の中で、「Scratch等を用いたプログラミング概念早期教育と興味喚起」と書かれているように、Scratch等を活用することが意識されている。プログラミング的思考は、論理的思考と比較すると、論理的思考の中にプログラミング的思考があり、目的を達成するための方法や手順を考える中で、達成可能かだけでなく、最も適した解を見つければいいところまでがプログラミング的思考には必要である。

2.2. Scratch

MITメディアラボが開発したビジュアルプログラミングソフトであり、2009年7月にScratch1.4がリリースされ、2013年5月にScratch2.0がリリース、2019年1月にScratch3.0がリリースされている。Scratchプログラミングによって作られた作品は、ローカルフォルダへファイル保存でき、その拡張子は、Scratch1.4では.sb、Scratch2.0では.sb2、Scratch3.0では.sb3である。このファイルによって作品を受け渡すことができる。

Scratch1.4では、インターネットが不要で、Scratch1.4ソフトをダウンロードしてインストールすることで稼働する。Scratch1.4ソフトはSmalltalkを使って実装されている。

Scratch2.0 は、インターネットに繋ぎ、Web ブラウザ上で稼働する。Scratch2.0 では、Adobe Flash を利用している。インターネットが繋がらない環境でも動作するように、Scratch2.0 オフラインエディタも提供されている。オフラインエディタは、Windows、Mac OS X、Linux 上で動作させるためにその OS に合った Adobe Air というアプリケーション開発・実行環境をインストールする必要がある。

Scratch3.0 は、HTML5 をサポートしている Chrome, Edge, Firefox, Safari の Web ブラウザで稼働し、Internet Explorer では稼働しない。Scratch3.0 をインターネットが繋がらない環境でも動作するように、Scratch3.0 オフラインエディタも提供されている。Scratch3.0 では JavaScript を利用している。これにより、これまで Flash が動かないために利用できなかった iPad や Android タブレットからも利用できるようになっている。なお、日本の小学校のパソコンには、Internet Explorer しかインストールしていない場合があり、2019 年 1 月に Scratch を使って授業できなくなったことが起きている。

2.3. 図形描画



(a) Step1



(b) Step2



(c) Step3



(d) Step4

図 1 三角形タイルの
描く順番ごとのプログラム

Scratch を使って図形を描かせる授業は、現在では珍しい授業でなく、Scratch の「ペンを下ろす」ブロックや「ペンを上げる」ブロックが、存在していることから、Scratch 開発者も意識している利用方法である。「ペンを下ろす」のブロックに続けて、図 1(a)のブロックを並べると、図 2(a)の三角形の図形を描くことができる。このような移動した跡が線として描かれるタートルグラフィックスは、LOGO 言語で登場し、移動する物体は亀の絵が有名であるが、Scratch では、その物体はスプライトと呼ばれ猫の絵が有名である。図 2 ではスプライトを虫の絵に変えているが、虫を上から見た時の絵を使って、進む方向を虫の目線と称して児童への説明に用いた。タートルグラフィックスで



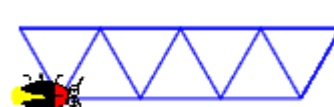
(a) Step1



(b) Step2



(c) Step3



(d) Step4

図 2 三角形タイルの描く順番

は、現在地からの進行方向と移動距離を指定し、移動途中に「ペンを上げる」を用いても良いが、ここでは「ペンを下ろす」のまま移動させているため、図 1(a)から図 1(b)にプログラムを変更すると、図 2(b)の絵に変わり、三角形の一边を重ね書きすることが起きている。図 1(c)から図 1(d)にプログラムを変更すると、図 2(d)の絵に変わり、ここでも三角形の一边を重ね書きすることが起きている。最後に「180 度回す」のブロックを入れてるのは、図 1(d)のプログラム全体をさらに「○回繰り返す」のブロックで囲むことによって床一面に三角形を張り詰めたタイリングパターンを完成させるためである。

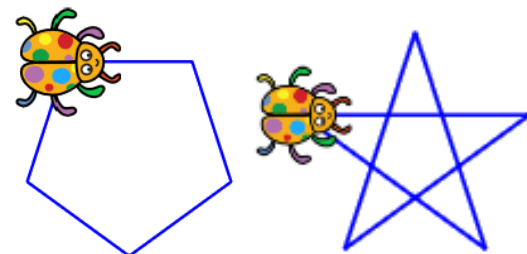
実践で描かせた図形は、基本図形と回転対称図形と併進対称図形である。ここでは基本図形は、三角形、四角形、正多角形、星図形など小中学校で教えられる図形を指す。回転対称図形は、1つの軸のまわりに回転させたとき、元の図形と一致するもので、実践では、基本図形を回転させて描画させる。併進対称図形は、瓦屋根の瓦が並んだパターンや床のタイリングパターン、壁紙パターン等の一方向に周期的パターンを持つ図形である。

3. 実践結果

3.1. 回転対称図形を描く授業実践

2016 年に津市立西が丘小学校 5 年生相手に授業実践^{[7][8]}した時には、一筆書きの星の図形を描かせてみた。正五角形を描かせるプログラムを先生が作って見せて、児童に同じプログラムを作らせるところからスタートし、そのプログラムを元にして、一筆書きの星図形（図 3 参照）を描かせることにチャレンジさせた。正五角形を描く時に曲がる角度は、描く虫の目線が 1 周していることに気付かせ、 $360 \div 5$ より 72 度となることを教えるのがポイントである。星図形の場合は、描く虫の目線が 2 周していることに気付ければ、 $720 \div 5$ より 144 度という曲がる角度が理解できる。多角形の内角を使うのではなく、目線の動きから計算させることが重要である。授業において、内角を学習している 5 年生は曲がる角度を内角から求めようとした。正五角形を 3 個または 5 個の三角形に分割して考え始めるのは良いが計算に時間が掛かっている中で、虫の目線の動きに気付かせて 1 回の割り算で計算させた時には、児童も新たな求め方に感心していた。

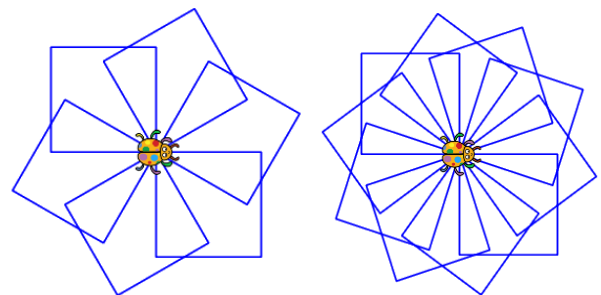
2017 年に津市立西が丘小学校 5 年生相



(a) Step1

(b) Step2

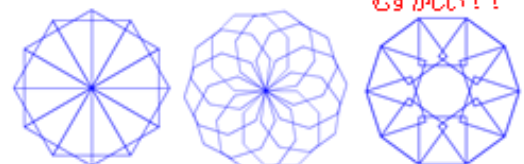
図 3 五角形と星図形



(a) Step1

(b) Step2

次の図形から1つ選んで、
その図形をえがくプログラムをつくろう！



正三角形が
もともっている

正八角形が
もともっている

正方形が
もともっている
(正方形を四すだけ
はできないよ！)

(c) Step3

図 4 基本図形を繰り返させた図形

手に授業実践した時には、基本図形を回転させた幾何学図形を描かせてみた。繰り返しの繰り返し処理を理解させるのに、基本図形を描かせるプログラムの外側からさらに繰り返しブロックで囲ませるプログラム（図 4 参照）に取り組ませた。図 4(a)Step1 では先生がプログラムを作って見せて、児童に真似させた。Step2 からは児童に考えさせた。図 4(c)で示すように Step3 では、3 つの中から 1 つを選択して図形を描かせた。さまざまな幾何学模様が描かれるので、児童の興味が膨らむ。授業の終了時に、図 4(c)の 3 つとも実現したかったと名残惜しそうに言う児童が多かった。いくつかの美的な幾何学模様を提示し、その作成に取り組ませる。これは、どこから書き始めたら良いかと思わせることができる。

3.2. 併進対称図形を描く授業実践

併進対称図形を描かせたのは、2018 年に津市立西が丘小学校 5 年生相手に授業実践^[9]した時である。45 分の授業を使って、Scratch を初めて触る児童に対し、Scratch の使い方を教えてから併進対称図形を描かせた。描く図形は図 5 で示すように床の模様などで見られるタイリングパターンである。最初に図 5(a)の三角形を基本図形とするタイリングパターンに取り組ませる。できた児童は、図 5(b)の四角形を基本図形とする模様、次に、図 5(c)の菱形を基本図形とする模様、その次に、図 5(d)の六角形を基本図形とする模様を取

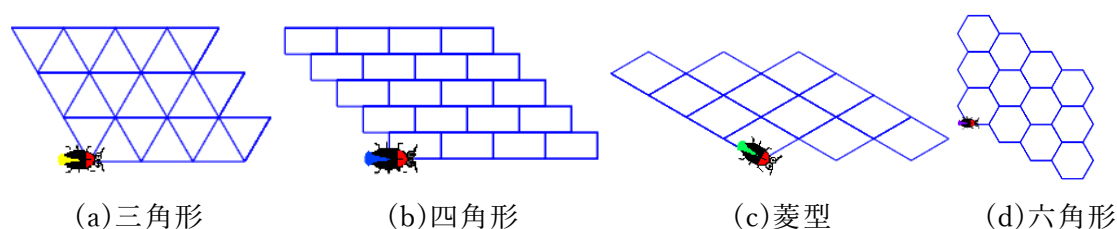


図 5 授業で取り組ませたタイリングパターン

り組ませる。図 5(a)を描かせる時は、丁寧に説明し、図 5(b)、図 5(c)、図 5(d)を描かせる時には、一部だけ隠したプログラムを紙面で提示し作成させた。

図 5(a)の丁寧に説明する場面では、図 1 の 4 つの Step を区切りとして、先生機で作り方を見せながら、児童機で同じようにプログラムを作らせた。図 1(d)の後、全体を「3 回繰り返す」のブロックで囲ませたら図 5(a)の図形の完成である。図 1(a)まで児童はすぐに作ることができる。図 1(b)は次の三角形を書かせるために「40 歩動かす」のブロックを追加させるが、図 1(c)で「4 回繰り返す」のブロックで囲むと先ほどの「40 歩動かす」のブロックを加えた理由を児童が理解するようである。図 1 (c)から図 1 (d)への間に追加する数ブロックは、横 1 行分の次の行を描かせるために、虫の位置を準備させるところであるが、ペンが下りたままなので、三角形の辺の位置に沿って移動させる必要があり、この繰り返し処理の中の次への準備処理が理解できると、新たな図のプログラムも理解できるようになる。理解できた児童は、図 5(b)、図 5(c)、図 5(d)の一部だけ隠したプログラムを提示した時にも答えを見つけることができていた。

児童に授業中に描かせたのは図 5 の図形であるが、授業の最初に、タイリングパターンに興味を持たせ、描く意欲を高めるために、ポスターに図 6 の図形を貼って提示した。ポスターには図形の横に、プログラムも一緒に提示し、数十行のブロックの並びによって、

これらの図形が描かれることを知ることができる。図形を見ただけでは、描くのがとても難しく感じられるが、数十行のプログラムで描かれることを知ると、授業課題に取り組む意欲が沸くと思われる。45 分の授業ではポスターの中の図形に挑戦することはできなかったが、授業終了時にはポスターの前に来て、じっくりと図形を眺め、プログラムを作ってみたいという様子が見られた。

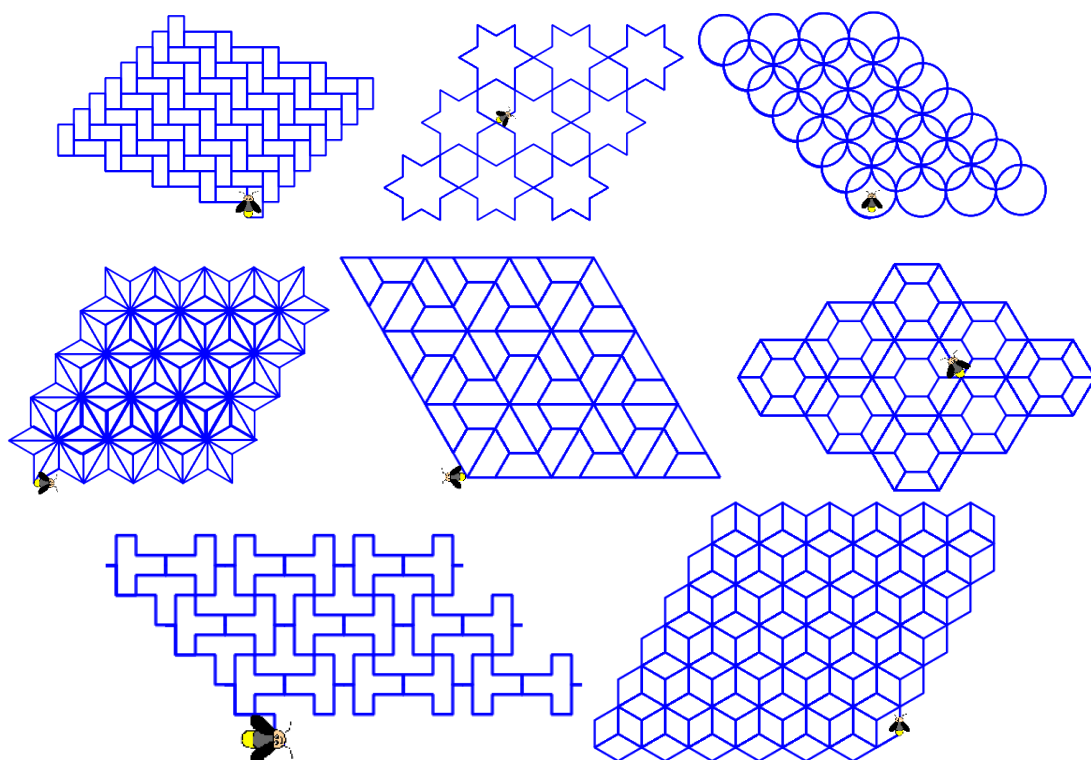
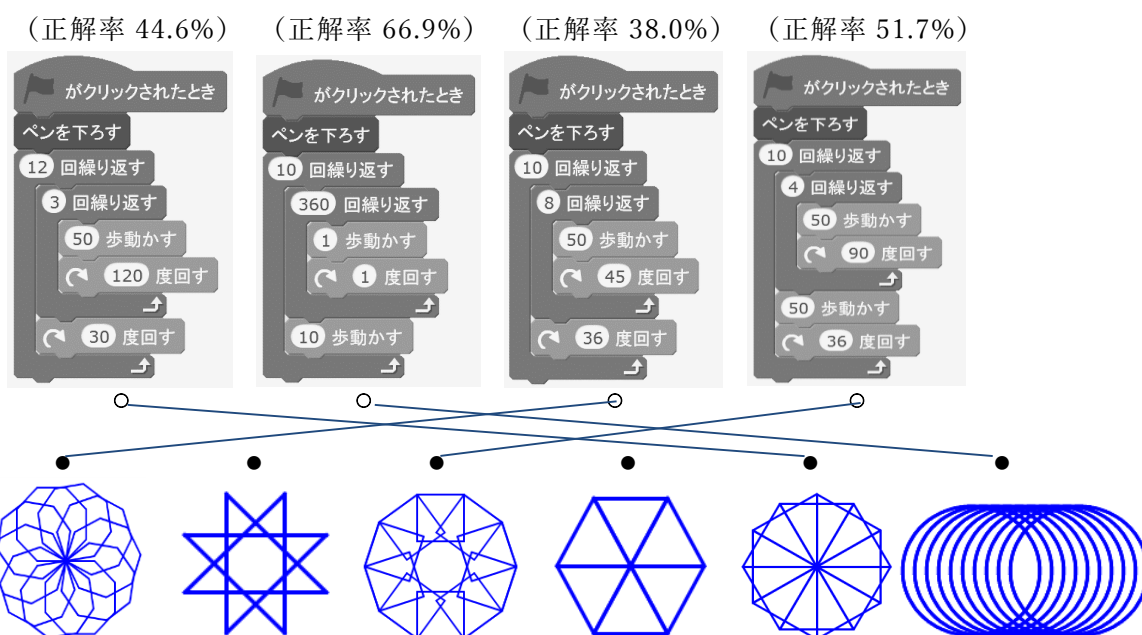
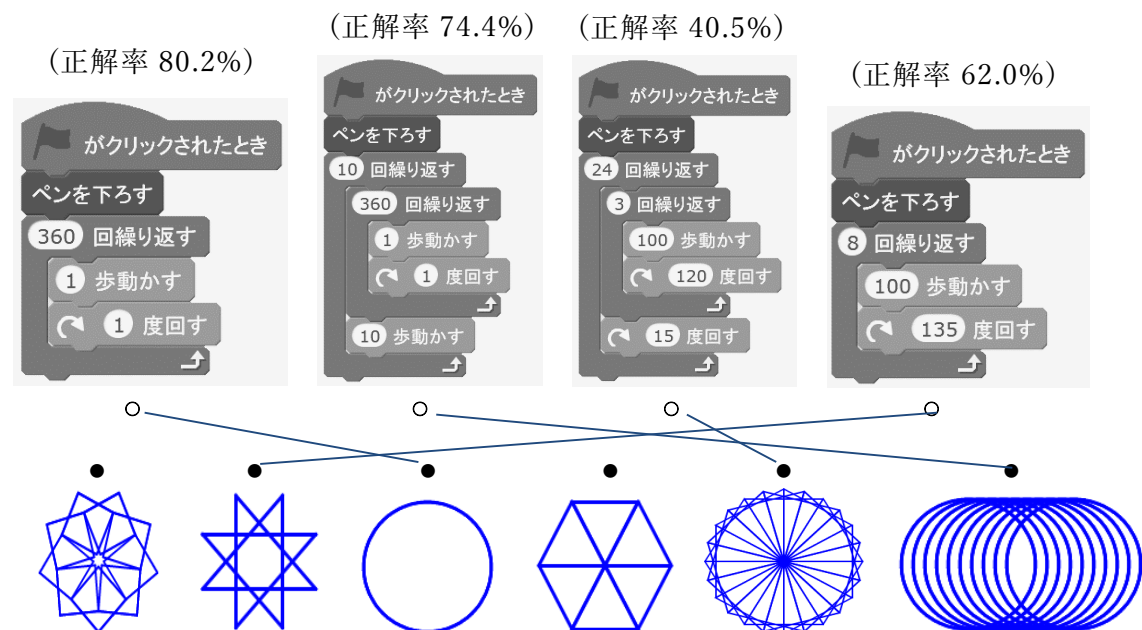


図 6 ポスターに貼って提示したタイリングパターン

3.3. アンケート分析

理解度を測るために、授業後のアンケートの中にプログラムを動かした時に出力される図形を 6 つの中から選び、線で結ばせる問題を 4 つ出題している。出力図形の中には 2 つの偽物も含ませてある。図 7 に 2016 年星図形を描かせた時の出題を示す。回答数は 121 人で、正解率を図 7 の上部に括弧書きで示す。(出題時には正解の線と正解率は表示していない。) 図 8 に 2017 年 2 重繰り返し図形を描かせた時の出題を示す。回答数は 121 人で、正解率を図 8 の上部に括弧書きで示す。(出題時には正解の線と正解率は表示していない。) 図 9 に 2018 年タイリングパターンを描かせた時の出題を示す。授業を受けた 5 年生は 137 人であったが、線で結ばせる出題に回答した児童は 47 人しかおらず、正解率を図 9 の上部に括弧書きで示す。(出題時には正解の線と正解率は表示していない。) この数値からはタイリングパターンを描かせた方が正解率が高くなっているが、回答して来なかった児童が多かったということは、理解が難しかったと思われる。

図 7 の一番左の円を描くプログラム、その右の円を併進移動して円を描くプログラム(図 8 の左から 2 つ目のプログラムも同じ) これらは他より正解率が高く基本図形がシンプルなものは理解されやすいと思える。図 9 の一番左とその右のプログラムが正解率が高いの



も基本図形は四角形でシンプルな図形である。図 7 の左から 3 つ目のプログラムは、基本図形が正三角形であるが、正解率が低いのは出力される図形から基本図形を見つけ出せなかったからと思われる。図 8 の一番左と左から 3 つ目のプログラムも基本図形を見つけにくいため認識率が低くなったと思われる。

4. 評価と考察

タイリングパターンを使うと良い点は、繰り返し図形を描く時に、次への準備処理が入ることにある。図 4 (b)Step2 の 40 歩進める必要があること、図 4 (d)Step4 の次の行を描くために一度書いた線の上を戻りつつ、虫の向きを右向きにする必要があることといった、

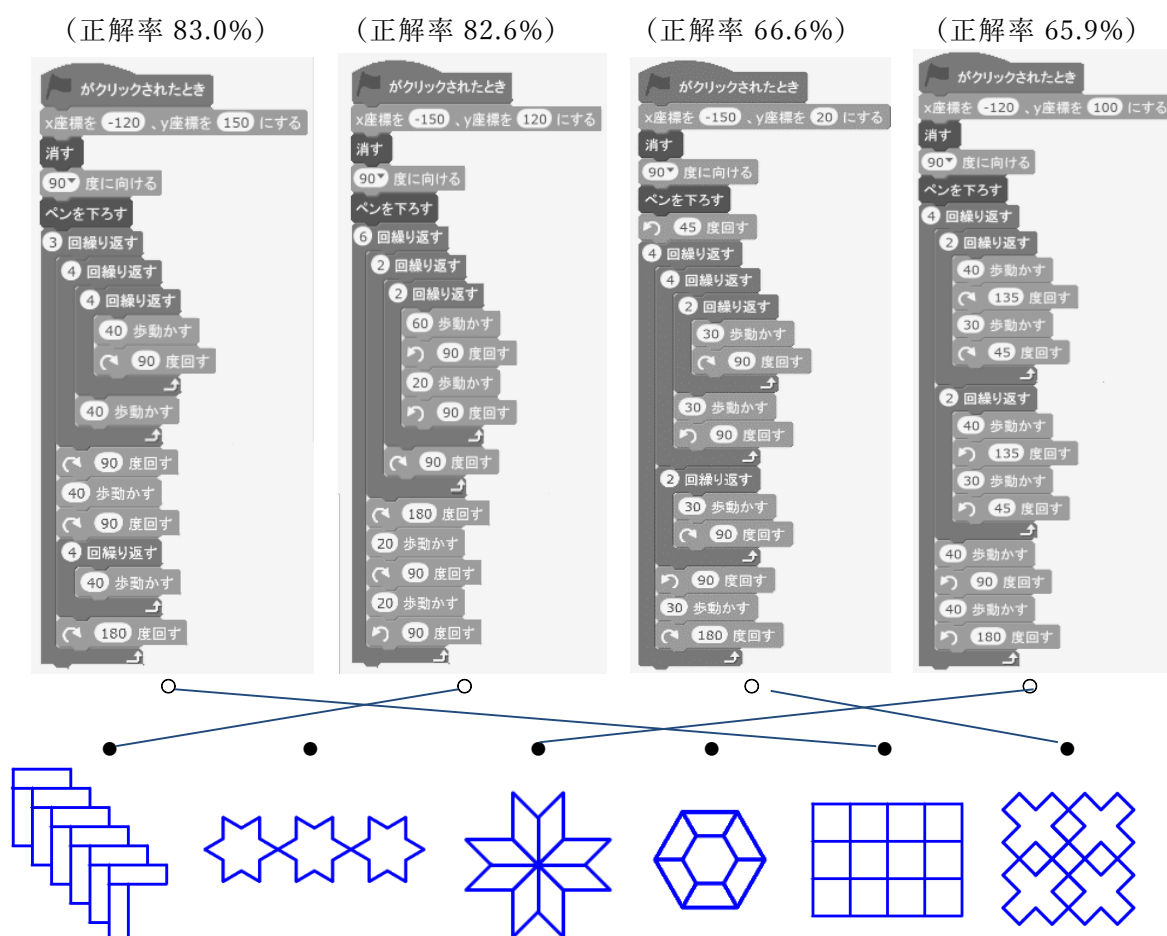


図9 タイリングパターンを描かせた時の出題と正解率

繰り返しの中の次への準備処理をどうするのかは、プログラムの流れの中で重要なポイントである。回転対称図形の場合には、回転角度の数値を試すことで描けてしまうことがあり、思考しない児童がいたりするが、併進対称図形を描く場合、次への準備処理はしっかりと考えないと正しく描くことができない。また、タイリングパターンを描く時に、描く順番は1つとは限らず、さまざまな描き方がある中で、最良の描き方を見つけるところは、プログラミング的思考の育成として、とても有益になっている課題である。

基本図形が単純な図形でありながら工夫するとタイリングパターンになるところは、日頃の生活の中で気付かなかった点を気付かせるという教育に役に立っており、小学生には重要な教育ポイントである。この日頃の生活の中で気付かせ考えさせる課題は、社会科の授業の中で、校外に出て自分達の通学路を調べさせ、危険な箇所を探させて発表させる活動がよく行われている。図6の左上の図形は、歩道でよく使われているタイリングパターンであり、授業中に見せることで、歩道や壁の模様に注意を向けさせることができ、さまざまなタイリングパターンを見せることは、身の回りに目を配らせるという点で役に立つ。

対象学年を5年生にしたのは、算数の授業の中で内角を学習した頃であるので、図形理解を深めさせるのにも役に立つからであるが、プログラミング教育を行う時に、逐次処理から教える。4年生で逐次処理の簡単なプログラミングを経験させ、6年生で繰り返し処理と条件分岐処理の両方を含むプログラムを経験させるという年次進行から、5年生で繰り返しブロックを活用させる図形描画の課題は、最適な時期だと思われる。課題解決力の

観点からは、タイリングパターンの描画はプログラムの行数が多く、理解が難しいかと心配したが、授業実践を行った結果、ほとんどの児童が授業に付いて来れていた。一部だけ隠したプログラムを提示し作成させたことで、付いて来れたと思われる。大学生に試した時の経過時間から判断すると、小学校5年生に真っ白から作成させた場合には図5の(b)四角形の図形も作成できないかもしれない。図5の(d)六角形まで用意した図形の中で、全員が少なくとも(b)四角形までは作成できていた。45分授業の中で、(d)六角形まで作成できた児童は居なかったが、時間を与えれば多くの児童が作成できると思われる。

児童の様子からみると、回転方向を間違える場合が多いようである。図形を描いていく虫の目線を自分の目線に置き換えれば良いのであるが、その行為に慣れている児童と慣れていない児童がいると思われる。

プログラムの行数が多くなると、パソコンの画面の中に全てを表示できなくなるので、表示位置をずらすといった操作が必要になるが、パソコンの操作に慣れている児童と慣れていない児童もいて、慣れていない場合は操作時間に時間を取られてしまうということが起きた。Scratchを触ることも初めてであったため、Scratchのブロックの移動や削除にも時間が掛かっていた。この点は、小学校4年生までの学年進行に従ってのパソコン指導に関わってくるので、今後のパソコン教育の増加と共に解決していくと思われる。

タイリングパターンの図形は、図6のポスターに貼った図形以外にも図10の図形などさまざまな図形が考えられ、小学校5年生対象でなく、学年進行に従って上級学年に対して、より複雑な図形を課題にすることができる。大学生に対して図6や図10の図形を課題に与えても45分で完成しない場合もあった。大学生は図形を描くことができても、非常に長いプログラムになってしまっていることがあった。短いプログラムで描くという最適解を見つける問題は大学生への出題にも成り得るかもしれない。3章最後で述べたように基本図形を見つけ出しにくい図形は正解率が低くなっていることから、プログラムする時にも繰り返しの元になる図形を導き出すことが重要である。タイリングパターンの図形は、どこからどの順番に書くとプログラムが単純になるのかを考えさせることになり、良い題材であると思う。

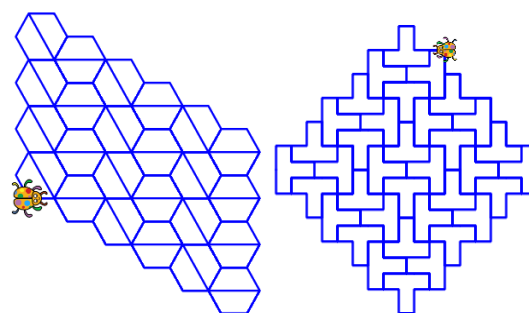


図10 さらにタイリングパターン図形

プログラミング教育は、授業形式でなくワークショップ形式^{[10][11]}で行われることがある。児童がやりたいことを伸ばすように進めるにはワークショップ形式が良いが、児童全員を揃って教育するには、授業形式でカリキュラムを練り上げる必要がある。図形描画させるのは45分の授業の中でカリキュラム進行させやすい。児童に新しいアイデアを出させるように、2016年自由に図形を描かせることを試してみたが、偶然に描けた図形に楽しみ、何故その図形になったのか理解しようとしなかった。それよりは、目標を提示して挑ませた方が良いと思われ、タイリングパターンはその点でも良い題材であると思われる。

プログラミング教育に使われているツールに、Scratch以外のツールとして、Code Monkey^[12]、Lightbot^[13]、Osmo^[14]、Robot Turtles^[15]、Viscuit^[16]、Ozobot^[17]、ファブボット^[18]、daub だーぶ^[19]、colAR mix^[20]などが存在する。その中でScratchは、知名度があり導入費用も掛からずに使えるため、益々広まっていくと思われる。より多くの教材が

現れていくと思われるが、図形描画の中の教材の一つとしてタイリングパターンをターゲットとすることをお勧めする。

5. まとめ

プログラミング教育の題材として、タイリングパターンの図形を描かせることは有効であると思われる。繰り返し処理の中に、次への準備処理が必要であり、そのことが線を描いていく虫の動きを理解させるのに役に立つ。繰り返しが単純な繰り返しで終わらず、準備することによって、2重繰り返しになったり3重繰り返しになったりし、その結果、図柄を完成することができる。準備処理が重要な処理だからである。また、同じ図柄を描くプログラムの解が一つでなく、最適な解を見つける必要があることも、プログラミング教育の重要な観点である。タイリングパターンを描かせることはその点にも貢献できる。問題は小学校5年生相手には難しいと感ずることであるが、授業の進め方次第で、授業実践できることを示すことができた。算数の図形理解に繋がったり、歩道の模様だけでなく文様^[21]のような自分の身の回りに存在する図形に気付かせたり、図形の学習意欲の貢献にも役立たせることができる。文様は中学校美術で学習する教材であり、図形描画は美術との連携も考えられる。単純な星図形を描かせる授業から一歩進めた内容を教えることができるので、タイリングパターンの活用をお勧めする。

Scratch は実践的なプログラミングと比べると機能不足であるが、小学生にプログラミング経験を積ませるには扱い易いツールである。今後は、繰り返し処理だけでなく、条件分岐処理も含むプログラムの題材を提供していきたい。

参考文献

- [1] 文部科学省：小学校学習指導要領（平成29年告示）（平成29年3月）
- [2] 文部科学省：小学校プログラミング教育の手引き（第二版）（平成30年11月）
- [3] Jeannette M. Wing：Computational Thinking, Communications of the ACM Vol.49, No.3, pp.33-35 (2006.3)
- [4] 中島秀之：計算論的思考, 情報処理学会誌 Vol.56, No.6, pp.584-587 (2015.6)
- [5] 首相官邸政策会議：成長戦略(案), 第12回産業競争力会議配布資料 1-1 (平成25年6月12日)
- [6] 首相官邸政策会議：ITを活用したビジネスイノベーション（三木谷主査）. 第6回産業競争力会議配布資料 11, (平成25年4月17日)
- [7] 吉原健人, 山守一徳, 葛原孝紀：Scratch を用いた図形理解を深める授業実践, 情報処理学会 第79回全国大会 1ZC-04 (2017.3)
- [8] K.Yoshihara, K.Yamamori：Programming Practice for Elementary School Children Aiming at Figure Understanding by Using Scratch, 2017 International Conference on Education and E-Learning (ICEEL2017) (2017.11)
- [9] 山守一徳：図形描画させる Scratch プログラミングの位置付け, 平成30年度電気関係学会東海支部連合大会, L5-2 (2018.9)

- [10] 阿部和広：子供の創造的活動とプログラミング学習，情報処理学会誌 Vol.57,No.4,pp.349-353(2016.4)
- [11] 阿部和広：参加者の主体性に基づく、変化を前提とした Scratch ワークショップの実践，情報処理学会誌 Vol.58,No.10,pp.894-897(2017.10)
- [12] Code Monkey： <https://codemonkey.jp/> （2019.2 現在）
- [13] Lightbot： <http://lightbot.com/> （2019.2 現在）
- [14] Osmo： <https://www.playosmo.com/ja/> （2019.2 現在）
- [15] Robot Turtles： <http://www.robotturtles.com/> （2019.2 現在）
- [16] Viscuit： <http://www.viscuit.com/> （2019.2 現在）
- [17] Ozobot： <https://ozobot.jp/> (2019.2 現在)
- [18] ファブボット： <http://fabbot.info/> (2019.2 現在)
- [19] daub だーぶ： <http://daub.knowledge-works.co.jp/> (2019.2 現在)
- [20] colAR mix： <http://www.quivervision.com/> (2019.2 現在)
- [21] 高木隆司編：「かたちの事典」付録 10 文様,丸善株式会社(平成 15 年 3 月)

二重可逆面積保存写像における二重対称周期軌道

– “ダブル・ダブル”, ミステリー –

山口喜博

帝京平成大学 〒290-0193 千葉県市原市うるいど南 4-1

(連絡先: 〒290-0073 千葉県市原市国分寺台中央 2-4-14)

chaosfractal@iCloud.com

Doubly symmetric periodic orbits
in the doubly reversible area-preserving map

- “Double, Double”, mystery -

Yoshihiro Yamaguchi

Teikyo Heisei University

(2019 年 3 月 4 日受付, 2019 年 5 月 20 日受理)

Abstract: The most well-known map which has the double reversibility is the standard map. In the standard map, there exist not only the singly symmetric periodic orbits (SPOs) but also the doubly symmetric periodic orbits (DPOs). First, the properties of SPOs are summarized and their bifurcations are investigated. Next, the properties of DPOs are reexamined. Let T^q be the map of period q (≥ 2). For DPOs, the map T^q is divided into three operations, namely, the left-involution, the identity map and the right-involution. The condition to exist DPO is obtained from the left and the right involutions. The same condition is derived from the identity map. This fact implies that the point z satisfying the identity map is the orbital point of the doubly symmetric periodic orbit if not z is a fixed point. The division to three operations is effective for only the characterization of DPOs. The doubly period-doubling bifurcation is introduced. Using the Poincaré index, we prove the followings. Two elliptic SPDs and two saddle SPDs appear through the doubly period-doubling bifurcation of the elliptic doubly symmetric periodic orbit (EDPO). After the equiperiod bifurcation of EDPO, two elliptic SPDs appear.

Keywords: Doubly reversible map, Involution, Symmetric periodic orbit, Doubly period-doubling bifurcation, Equiperiod bifurcation

1. 本論文の目的

ドボジュラエー (De Vogelaere)[1] は, 1958 年に可逆性を有する面積保存方向保存写像の周期軌道に関する論文を発表した. この論文によって, 可逆性を有する面積保存方向保存写像で出現する対称周期軌道の本格的な研究が始まったと言える [2, 3, 4, 5, 6]. 特に一

重対称周期軌道の存在は理論的に示せるため、異なった対称周期軌道間に成り立つ出現順序関係を導くことができる。系の乱雑さを与える位相的エントロピーも一重対称周期軌道を利用して計算できる。このように系に内在するカオスを調べるために一重対称周期軌道が利用されてきた[6].

可逆な面積保存方向保存写像には、二重可逆性を有する面積保存方向保存写像もある。代表的な例は標準写像である。標準写像には一重対称周期軌道と二重対称周期軌道が存在する。一重対称周期軌道と比較して二重対称周期軌道の性質の理解は十分でない。二重対称周期軌道の性質を新しい観点から調べ直すことが、本論文の主目的である。本論文では新しい表現方法を導入して写像を分割し二重対称周期軌道の特徴付ける。この結果として、二重対称周期軌道の性質が理解しやすくなり、二重対称周期軌道の分岐現象に関する新しい性質が導かれる。非対称周期軌道が対称周期軌道より生じる過程も明らかにする。

本論文で扱う円筒面で定義された可逆面積保存方向保存写像 T を紹介する。

$$T: y_{n+1} = y_n + f(x_n), x_{n+1} = x_n + y_{n+1} \pmod{2\pi}. \quad (1)$$

ここで、関数 $f(x)$ は奇関数 ($f(x) = -f(-x)$) とする。例として $f(x) = a \sin x$ ($a \geq 0$) ならば、写像は標準写像である[7,8].

写像 T ($a > 0$) では、 $f(x) = 0$ と $y = 0$ を満たす周期軌道点が不動点である。標準写像において、不動点は $P = (0, 0)$ と $Q = (\pi, 0)$ である。不動点 P はサドル型不動点である。不動点 Q は、 $0 < a < 4$ において楕円型不動点で、 $a > 4$ では反転を伴うサドル型不動点である。

対称周期軌道を定義するために写像 T の対合表現を導入する。第一の対合表現を示す。式(1)の表現では、第一の対合表現 $T = h \circ g$ は常に可能である。ここで記号 $\circ$ は単なる分離記号である。 $T = hg$ と書いてもよい。

$$g \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y - f(x) \\ x \end{pmatrix}, h \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x - y \end{pmatrix}. \quad (2)$$

写像関数 $f(x)$ が奇関数であることにより、次の第二の対合表現 $T = H \circ G$ も可能である。

$$G \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + f(x) \\ -x \pmod{2\pi} \end{pmatrix}, H \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y - x \pmod{2\pi} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

ここで $g \circ g = h \circ h = G \circ G = H \circ H = id$.. 対合は面積保存であるが方向反転写像である。対合の不動点の集合が対称線である。円筒面で定義された標準写像における対称線を示す(図1).

$$S_g: y = -f(x)/2, \quad (4)$$

$$S_h: y = 0, \quad (5)$$

$$S_G: x = 0, x = \pi, \quad (6)$$

$$S_H: y = 2x, y = 2(x - \pi). \quad (7)$$

対合による周期軌道点の動きは対称線に関する反転である。よって対合による周期軌道点の動きより、 S_g と S_h を上下の対称線と呼び、 S_G と S_H を左右の対称線と呼ぶ。

写像が対合の積で表現される場合、系はバーコフの意味での可逆性をもつという[9]. 上記のように二種類の異なった対合の積で表現される写像は、二重可逆写像と呼ばれる。二

重可逆写像には一重対称周期軌道と二重対称周期軌道が存在する．最初に対称線を利用して対称周期軌道と非対称周期軌道を定義する．次に一重対称周期軌道と二重対称周期軌道を定義する．

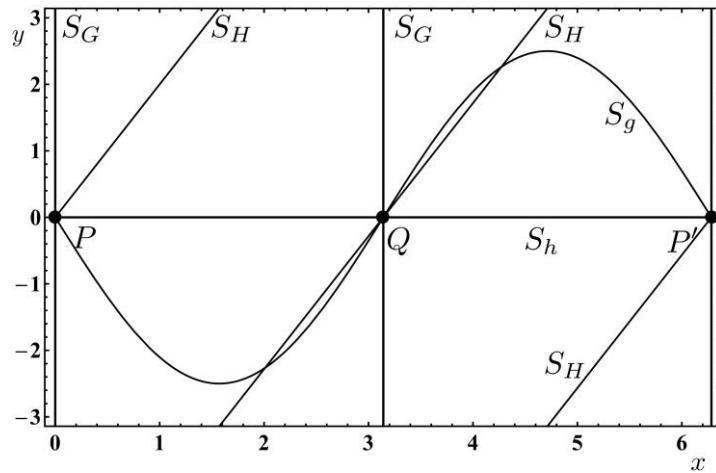


図 1: 円筒面で定義された標準写像における対称線． $P = (0,0)$ と $Q = (\pi,0)$ は不動点． $P' = (2\pi,0)$. 円筒面では $P = P'$. S_g と S_h は上下の対称線で, S_G と S_H は左右の対称線． $a = 5$.

定義 1.1 (対称周期軌道の定義)．対称線上に軌道点をもつ軌道を対称軌道という．対称軌道が対称線上に偶数個の軌道点をもつならば, この軌道は対称周期軌道と呼ばれる．本論文では不動点是对称周期軌道に含めず, 不動点として扱う．対称線上に軌道点をもたない周期軌道を非対称周期軌道と定義する．

定義 1.2 (一重対称周期軌道の定義)．上下の対称線のみ軌道点をもつ周期軌道を一重上下対称周期軌道と定義する．また, 左右の対称線のみ軌道点をもつ周期軌道を一重左右対称周期軌道と定義する．これらをまとめて一重対称周期軌道と呼ぶ．

定義 1.3 (二重対称周期軌道の定義)．上下と左右の対称線上に軌道点をもつ周期軌道を二重対称周期軌道と定義する．

ここで本論文の第 2 節以後の構成を示す．

第 2 節では本論文で使用する性質を導入する．対称周期軌道と非対称周期軌道の性質ならびにポアンカレ指数に関する定理 (定理 2.6) を紹介する．

第 3 節では最初に一重対称周期軌道の性質をまとめる．次に一重対称周期軌道の周期倍分岐と同周期分岐について成り立つ結果をまとめて定理 3.1 とする．最後に非対称周期軌道と対称周期軌道の関係を議論する．ここで得られた結果は二重対称周期軌道の性質を理解するために必要となる．

第 4 節では二重対称周期軌道の性質を見直すために, 二重対称周期軌道の特徴付ける新しい表現方法を導入する．導入された表現方法の意義と有用性を議論する．これをもとに二重対称周期軌道の性質を調べる．次に二重対称周期軌道の分岐現象を理解するために二重周期倍分岐を導入し, この分岐現象に関する議論を行う．得られた性質をまとめて定理 4.3 と定理 4.9 とする．

第 5 節では標準写像を利用して第 4 節で得られた結果の数値計算による確認を行う．

第 6 節では本論文で得られた結果をまとめ、今後の課題を述べる。

2. 準備

2.1. 周期軌道の安定性

周期軌道の安定性を判断する方法を紹介する．ここで $q (\geq 1)$ を周期軌道の周期とする．周期 q の周期軌道点を $z_k = (x_k, y_k)$ ($0 \leq k \leq q-1$) とする．軌道点 z_k における線形化行列 $M(z_k)$ は

$$M(z_k) = \begin{pmatrix} 1 & f'(x_k) \\ 1 & 1 + f'(x_k) \end{pmatrix} \quad (8)$$

と得られる（参考文献[7]の § 1.2.1.4 を参照）．ここで、 $f'(x_k) = a \cos x_k$ ．面積保存写像であるから、 $M(z_k)$ の行列式は 1 である．

写像 T^q の線形化行列を $M_q = M(z_{q-1}) \cdots M(z_1)M(z_0)$ とすると、固有値 λ を決定する方程式

$$\lambda^2 - r_q(a)\lambda + 1 = 0 \quad (9)$$

が得られる．係数 $r_q(a)$ は $\text{Trace } M_q$ である．式(9)の解である固有値を $\lambda_{\pm}$ と書く．

係数 $r_q(a)$ を利用して周期軌道の安定性を定める．判別式は $D = r_q^2(a) - 4$ である． $r_q(a) > 2$ ならば、固有値は $0 < \lambda_- < 1 < \lambda_+$ を満たす．周期 q の周期軌道はサドル型で不安定である． $|r_q(a)| < 2$ ならば、固有値 $\lambda_{\pm}$ は複素共役であるので周期 q の周期軌道は楕円型で安定である． $r < -2$ ならば、固有値は $\lambda_- < -1 < \lambda_+ < 0$ を満たす．周期 q の周期軌道は反転を伴うサドル型で不安定である．周期倍周期分岐の分岐点では $r_q(a) = -2$ が成り立ち、固有値は $\lambda_{\pm} = -1$ である．同周期分岐の分岐点では $r_q(a) = 2$ が成り立ち、固有値は $\lambda_{\pm} = 1$ である．

2.2. 180 度回転作用

180 度回転作用 R を導入する．

$$R \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \pmod{2\pi} \end{pmatrix}. \quad (10)$$

円筒面では、 R は不動点 P または Q を中心とした 180 度回転の作用である．時計回りの回転であるか、反時計回りの回転であるかは扱う問題によって決める．

下記の関係式が成立する．

$$G \circ g = g \circ G = R = H \circ h = h \circ H. \quad (11)$$

関係式(11)は対合を用いて計算することで確かめられる．交換関係

$$RT = TR \quad (12)$$

が成り立つ．例として $R = G \circ g$ とすると、 $RT = GgT = GT^{-1}g = TGg = TR$ ．

2.3. 対称周期軌道の性質

対称周期軌道について既に知られている性質を性質 2.1 としてまとめておく．

性質 2.1

- (1) 対称周期軌道は一重対称周期軌道であれ二重対称周期軌道であれ、一つの対称線上にもちうる軌道点数は一個または二個である。
- (2) 一重対称周期軌道は対称線上に軌道点を二つもつ、一つの対称線上に二点もつ場合と、異なった対称線上に一点もつ場合がある。
- (3) 周期 2 の二重対称周期軌道は対称線上に軌道点を二点もつ、周期が 4 以上の二重対称周期軌道は、上下の対称線上に二点もち左右の対称線上に二点もつ。

第 3 節と第 4 節において一重対称周期軌道と二重対称周期軌道の例を紹介する。これらより 性質 2.1(1)-(3) が理解できるであろう。

命題 2.2 は対合と対称周期軌道の関係を与える。

命題 2.2. 点 z_0 が周期軌道の軌道点であるとする。点 z_0 を初期点とする軌道を $O(z_0)$ と書く。点 z_0 を対合で写した点を w_0 とする。 $O(z_0) = O(w_0)$ ならば、 $O(z_0)$ は対称周期軌道である。 $O(z_0) \neq O(w_0)$ ならば、 $O(z_0)$ と $O(w_0)$ は非対称周期軌道であり対で存在する。

証明. 非対称周期軌道に関する主張は自明である。よって、対称周期軌道に関する主張を証明する。ここでは $w_0 = hz_0$ の場合を考える。 $O(z_0) = O(w_0)$ ならば点 w_0 は $O(z_0)$ の周期軌道点であるから、 $w_0 = z_{2n}$ ($n \geq 1$) を満たす n が存在する場合と、 $w_0 = z_{2n+1}$ ($n \geq 1$) を満たす n が存在する場合がある。

最初に $z_{2n} = hz_0$ の両辺に T^{-n} を作用する。左辺は z_n で、右辺は $T^{-n}hz_0 = hT^n z_0 = hz_n$ 。つまり、 $z_n = hz_n$ 。これは点 z_n が対称線 S_h 上にあることを意味する。よって、 $O(z_0)$ は対称周期軌道である。

次に、 $w_0 = z_{2n+1}$ ($n \geq 1$) の場合は、 $z_{2n+1} = hz_0$ が成り立つ。この式の両辺に T^{-n} を作用する。左辺は z_{n+1} で、右辺は $T^{-n}hz_0 = hT^n z_0 = hz_n$ であるから、 $z_{n+1} = hz_n$ が成り立つ。これを $hz_{n+1} = z_n$ と書き直す。両辺に g を作用すると、左辺は $ghz_{n+1} = T^{-1}z_{n+1} = z_n$ 。よって $gz_n = z_n$ が得られる。これは点 z_n が対称線 S_g 上にあることを意味する。以上で $O(z_0)$ は対称周期軌道であることが導かれた。

$w_0 = gz_0$ が成り立つ場合も同様にして証明できるので詳細は省く。

対称線上に存在する周期軌道点から分岐した対称線上にない二つの周期軌道点の性質 (命題 2.3) を紹介する。

命題 2.3. 対称線上に存在する対称周期軌道点を z_0 とする。周期軌道点 z_0 より対称線上に二つの点 u_0 と点 v_0 が分岐したと仮定する。この場合、対称線上の周期軌道点 z_k ($k \neq 0$) より対称線上にない点 u_k と点 v_k が分岐する。

- (1) $z_k \in S_g$ の場合: 関係式 $u_k = Gv_k$ が成り立つ。
- (2) $z_k \in S_h$ の場合: 関係式 $u_k = Hv_k$ が成り立つ。
- (3) $z_k \in S_g$ の場合: 関係式 $u_k = gv_k$ が成り立つ。
- (4) $z_k \in S_h$ の場合: 関係式 $u_k = hv_k$ が成り立つ。

ここでは(1)と(3)の証明を行う。(2)と(4)の証明は省く。

命題 2.3(1)の証明. 関係式 $u_k = Gv_k$ より, 対称線 S_H と対称線 S_G の逆像 $T^{-k}S_G$ の交差点に周期軌道点 z_0 がある. この場合, 仮定より対称線 S_H 上に二つの点 u_0 と点 v_0 が生じる (図 7(a) が参考になる). ここで $T^{-k}S_G$ を不変とする対合は GT^{2k} である. これを確認する.

$$GT^{2k}T^{-k}S_G = GT^kS_G = T^{-k}GS_G = T^{-k}S_G. \quad (13)$$

点 u_0 と点 v_0 に対して, $u_0 = GT^{2k}v_0$ が成り立つ. この関係が成り立たないとすると, 点 u_0 と点 v_0 以外に二点 $GT^{2k}v_0$ と $GT^{2k}u_0$ が周期軌道点 z_0 より生じたことになる. これは前提条件に反する.

関係式 $u_0 = GT^{2k}v_0$ を $u_0 = T^{-k}GT^kv_0$ と書き直す. 両辺に T^k を作用すると, 左辺は u_k で, 右辺は Gv_k . よって, (1) が成り立つ. この証明では条件 $z_0 \in S_H$ を利用していない. そのため, 条件 $z_0 \in S_H$ の S_H を別の対称線に変更してもここでの証明が成り立つ.

命題 2.3(3) の証明. 周期軌道点 z_0 の存在する対称線を S^* と書く. 対称線 S^* は, $\{S_G, S_H, S_g, S_h\}$ のどれでもよい. 対称線 S^* と対称線 S_H の逆像 $T^{-k}S_H$ の交差点に周期軌道点 z_0 はある. ここで $T^{-k}S_g$ を不変とする対合は gT^{2k} である. 点 u_0 と点 v_0 に対して, $u_0 = gT^{2k}v_0$ が成り立つ. この関係式を $u_0 = T^{-k}gT^kv_0$ と書き直す. 両辺に T^k を作用すると, 左辺は u_k で, 右辺は gv_k . よって, (3) が成り立つ.

2.4. 非対称周期軌道の性質

最初に円筒面を回転する非対称周期軌道について説明しよう．図 2(a)における周期軌道点 u_0 から出発する周期軌道 $O(u_0)$ を非対称周期軌道とする．そうすると周期軌道点 $v_0 = Gu_0$ から出発する周期軌道 $O(v_0)$ も非対称周期軌道である．周期軌道点 Hu_0 は， $HG(Gu_0) = Tv_0 = v_1$ である．よって，周期軌道点 Hu_0 は $O(v_0)$ に含まれる． $O(u_0) \neq O(v_0)$ であるから，二つの非対称周期軌道 $O(u_0)$ と $O(v_0)$ が存在する．二重可逆写像では， gu_0 と gv_0 を周期軌道点とする二つの非対称周期軌道 $O(gu_0)$ と $O(gv_0)$ も存在する． $hu_0 = hg(gu_0) = T(gu_0)$ であるから， $O(gu_0)$ と $O(hu_0)$ は同じ周期軌道である．以上まとめると四つの非対称周期軌道が存在する．

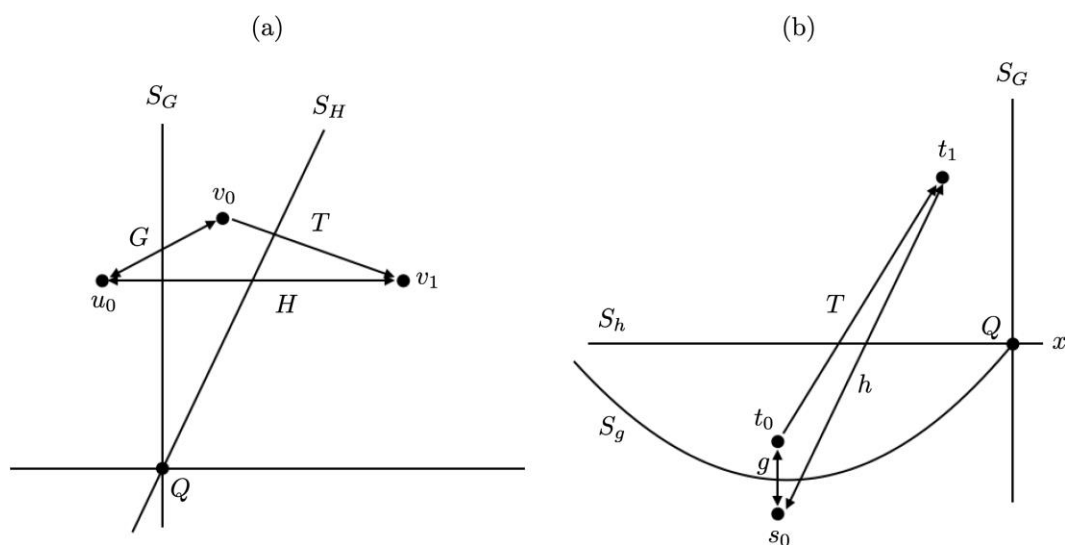


図 2: (a) 軌道点 u_0 と $v_0 = Gu_0$ は円筒面を回転する非対称周期軌道の周期軌道点. (b) 軌道点 s_0 と $t_0 = gs_0$ は不動点 Q を回転する非対称周期軌道の周期軌道点.

図 2(b)における軌道点 s_0 から出発する周期軌道 $O(s_0)$ を不動点 Q を回転する非対称周期軌道とする．そうすると軌道点 $t_0 = gs_0$ から出発する周期軌道 $O(t_0)$ も非対称周期軌道である．周期軌道点 hs_0 は, $hg(gs_0) = Tt_0 = t_1$ である．よって, 周期軌道点 hs_0 は $O(t_0)$ に含まれる． $O(s_0) \neq O(t_0)$ であるから, 二つの非対称周期軌道 $O(s_0)$ と $O(t_0)$ が存在することがわかる．また, Gu_0 と gG_0 を周期軌道点とする二つの非対称周期軌道 $O(Gu_0)$ と $O(Gv_0)$ も存在する． $Hu_0 = HG(Gu_0) = T(Gu_0)$ であるから, $O(Gu_0)$ と $O(Hu_0)$ は同じ周期軌道である．以上まとめると四つの非対称周期軌道が存在する．

次に対称周期軌道から分岐して生じた非対称周期軌道に関する性質を紹介する．対称線 S_G 上にある周期軌道点 z_0 から周期軌道点 u_0 が生じたとする．この周期軌道 $O(u_0)$ は非対称周期軌道とする．上記の結果より周期軌道点 z_0 から $v_0 = Gu_0$ も生じる．周期軌道 $O(v_0)$ も非対称周期軌道である．以上をまとめて命題 2.4 とする．

命題 2.4 対称線 S^* は, 対称線の集合 $\{S_G, S_H, S_g, S_h\}$ の要素とする．対称線 S^* を不変とする対合を ρ^* とする．対称線 S^* 上にある周期軌道点 z_0 から対称線上にない周期軌道点 u_0 と v_0 が生じたならば, 周期軌道 $O(u_0)$ と $O(v_0)$ が対称周期軌道であっても非対称周期軌道であっても $v_0 = \rho^* u_0$ が成り立つ．

2.5. ポアンカレ指数

ポアンカレ指数を定義し, ポアンカレ指数に関する定理を紹介する [6,10]．ポアンカレ指数は括弧で囲んで表現する．

定義 2.5 (ポアンカレ指数の定義)．

写像 T^q ($q \geq 1$) における不動点のポアンカレ指数を以下のように定義する．

- (1) 写像 T^q の不動点がサドル型周期軌道点なら, そのポアンカレ指数を (-1) とする
- (2) 写像 T^q の不動点が楕円型周期軌道点なら, そのポアンカレ指数を $(+1)$ とする．
- (3) 写像 T^q の不動点が反転型サドル周期軌道点なら, そのポアンカレ指数を $(+1)$ とする．

定理 2.6 (ポアンカレ指数の総和保存則)． 分岐の前後でポアンカレ指数の総和は保存される．

以下で四つの分岐現象を定理 2.6 を利用して説明する．

例 1: 周期倍分岐．

写像 T^q の不動点 M が楕円型で周期倍分岐を起こし, M が反転型サドル周期軌道点となり, 周期 $2q$ の楕円型周期軌道 D が生じる場合を考えよう．ここでは写像として T^{2q} を用いる．周期倍分岐前, M は写像 T^q でも T^{2q} でも楕円型である．よって, ポアンカレ指数は $(+1)$ である．周期倍分岐後, M は写像 T^q では反転型サドル周期軌道点であるが, T^{2q} ではサドル型周期軌道点である．よって, ポアンカレ指数は (-1) である．

生じた娘周期軌道は T^{2q} のもとでは二つの周期軌道点が生じたことになる．よって, ポアンカレ指数は $2 \times (+1)$ である．周期倍分岐前のポアンカレ指数の総和は $(+1)$ で, 分岐後のポアンカレ指数の総和は $(-1) + 2 \times (+1) = (+1)$ である．よって周期倍分岐前後でポアンカレ指数の総和は保存される．

例 2：反周期倍分岐．

写像 T^q の不動点 M が反転型サドル周期軌道点で反周期倍分岐を起こし，周期が $2q$ のサドル型周期軌道が生じる場合を考えよう．ここでも写像として T^{2q} を用いる．周期倍分岐前， M は T^{2q} ではサドル型である．分岐後は楕円型である．分岐前はポアンカレ指数の総和は (-1) で，分岐後は $(+1) + 2 \times (-1) = (-1)$ となり，反周期倍分岐の前後でポアンカレ指数の総和は保存される．

例 3：同周期分岐．

写像 T^q の不動点 M が楕円型で同周期分岐を起こすとしよう．不動点 M はサドル型周期軌道点となり，周期が q の楕円型周期軌道が二つ生じる．同周期分岐後のポアンカレ指数の総和は $(-1) + 2 \times (+1) = (+1)$ である．これは分岐前のポアンカレ指数の総和 $(+1)$ に等しい．

例 4：反同周期分岐．

写像 T^q の不動点 M がサドル型で反同周期分岐を起こすとしよう．不動点 M は楕円型周期軌道点となり，周期が q のサドル型周期軌道が二つ生じる．反同周期分岐後のポアンカレ指数の総和は $(+1) + 2 \times (-1) = (-1)$ である．これは分岐前のポアンカレ指数の総和 (-1) に等しい．

3. 一重対称周期軌道

3.1. 一重対称周期軌道の分類

最初に，一重上下対称周期軌道が満たす対合表現と対称線を表 1 にまとめた．

表 1: 一重上下対称周期軌道の分類

分類	周期: q	左対合	右対合	対称線: 左対合	対称線: 右対合
UD-I	$2k + 1$ ($k \geq 1$)	h	gT^{2k}	S_h	$T^{-k}S_g$
UD-II	$2k$ ($k \geq 1$)	$T^{2k-1}h$	g	T^kS_g	S_g
UD-III	$2k$ ($k \geq 1$)	h	gT^{2k-1}	S_h	$T^{-k}S_h$

表 1 をもとに一重上下対称周期軌道の性質を紹介する．最初に表 1 の UD-I の場合を説明する．周期が奇数 $q = 2k + 1$ ($k \geq 1$) の場合，写像 T^{2k+1} を次のように分解する．

$$T^{2k+1} = h \circ gT^{2k}. \quad (14)$$

ここで h を左対合と呼び， gT^{2k} と右対合と呼ぶ．対合 h について不変な集合が S_h である．一方，対合 gT^{2k} について不変な集合が $T^{-k}S_g$ である．

$$gT^{2k}(T^{-k}S_g) = gT^kS_g = T^{-k}gS_g = T^{-k}S_g. \quad (15)$$

対称線 S_h と対称線の逆像 $T^{-k}S_g$ の交点 M が，一重上下対称周期軌道の周期軌道点である．一重上下対称周期軌道が存在するための条件は，対称線 S_g と対称線の像 T^kS_h が交差するとしてもよい．これより周期軌道点が存在するための条件式が得られる．

周期軌道点 z_0 が対称線 S_h 上にあり周期軌道点 z_k が対称線 S_g にあるとすると, $z_0 = hz_0$ と $z_k = gz_k$ が成り立つ. 最初に, $z_k = gz_k$ の両辺に T^{-1} を作用する. 左辺は z_{k-1} で, 右辺は $T^{-1}gz_k = g(Tz_k) = gz_{k+1}$. つまり, $z_{k-1} = gz_{k+1}$. これを繰り返すと $z_0 = gz_{2k}$ が得られる. 次に, 両辺に h を作用する. 左辺は $hz_0 = z_0$ で, 右辺は $hgz_{2k} = z_{2k+1}$. よって, $z_0 = z_{2k+1}$ が得られる. これより周期は $q = 2k + 1$ である. 以上で周期が奇数であることが確かめられた.

UD-II の場合の周期を導く. 周期軌道点 z_0 と z_k がともに対称線 S_g にあるとする. 二つの関係式 $z_0 = gz_0$ と $z_k = gz_k$ が成り立つ. ここで, $z_0 = gz_0$ の両辺に T^{-k} を作用すると, 左辺は z_{-k} で, 右辺は $T^{-k}gz_0 = gT^kz_0 = gz_k$ となる. つまり, $z_{-k} = gz_k$ が得られる. 既に得られている $z_k = gz_k$ を利用すると, $z_{-k} = z_k$ が得られる. 以上より周期 $q = 2k$ が得られる. 同様にして UD-III の場合についても周期が求まる.

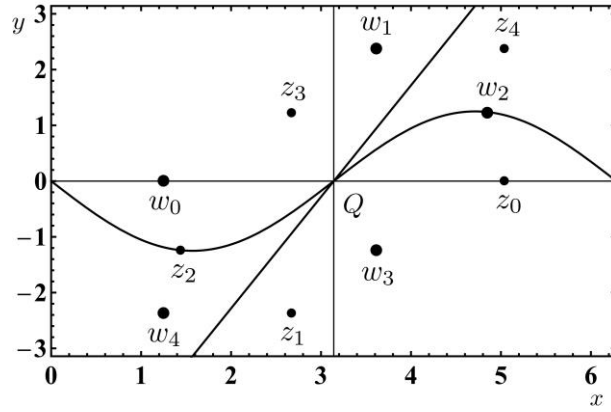


図 3: 標準写像における UD-I の例. 周期 5. $z_0, w_0 \in S_h$, $z_2, w_2 \in S_g$. $a = 2.5$.

UD-I の例として周期 5 の周期軌道点を図 3 に示す. 周期軌道点 z_0 から出発した 周期軌道があれば, これを対称線 S_H について折り返した周期軌道がある. つまり, 周期軌道点 $w_0 = Hz_0$ から出発した周期軌道がある. これらは不動点 Q が回転分岐を起こして生まれた周期軌道である. 二つの周期軌道は一周期の間に不動点 Q の周りを一回回転する.

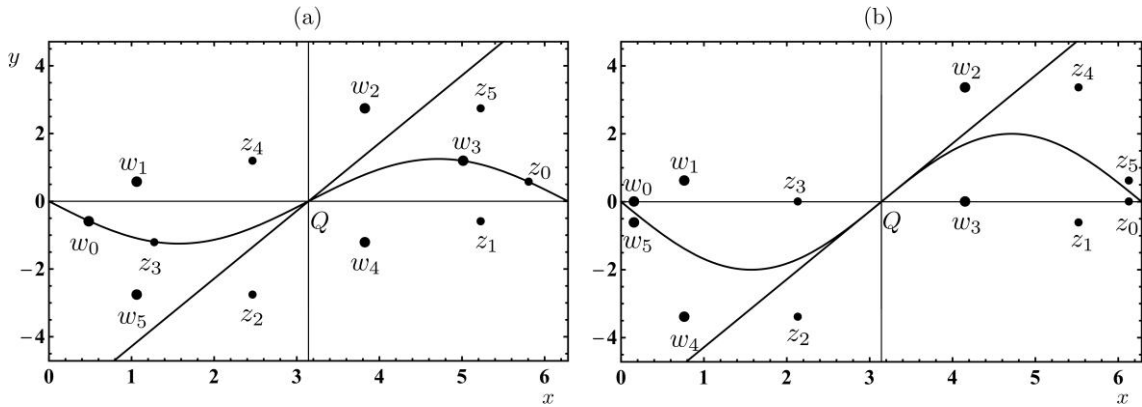


図 4: 標準写像におけるサドルノード分岐で生じた周期 6. (a) UD-II の例. $z_0, z_3, w_0, w_3 \in S_g$. $a = 2.5$. (b) UD-III の例. $z_0, z_3, w_0, w_3 \in S_h$. $a = 4$.

不動点 Q が回転分岐を起こして生まれた偶数周期の周期軌道は全て二重対称周期軌道である. これについては命題 4.8(1)を参照して欲しい. UD-II と UD-III の偶数周期の例としてサドルノード分岐で生じた周期軌道を紹介する. 図 4(a)は UD-II の例である. 初期点 z_0

を出発する周期軌道 $O(z_0)$ (小さな黒丸) があれば, 必ず $w_0 = Gz_0$ から出発する周期軌道 $O(w_0)$ (大きな黒丸) がある. 周期軌道 $O(z_0)$ は上下の対称性をもつが左右の対称性はない. しかし, 写像は上下左右の対称性をもつから周期軌道 $O(z_0)$ と対になる周期軌道 $O(w_0)$ が存在するはずである. これらの周期軌道を合わせると上下左右の対称性が成り立つ. 図 4(b)は UD-III の例で, z_0 を出発する周期軌道 $O(z_0)$ があれば, 必ず $w_0 = Hz_0$ から 出発する周期軌道 $O(w_0)$ がある.

次に, 一重左右対称周期軌道に関する対合表現と対称線について表 2 にまとめた. 表 1 における対合 g を G に置き換え, 対合 h を H に置き換えると表 2 の左対合と右対合が得られる. また周期に関する条件も同じである. よって表 2 の説明は省く.

表 2: 一重左右対称周期軌道の分類

分類	周期: q	左対合	右対合	対称線:左対合	対称線:右対合
LR-I	$2k + 1 (k \geq 1)$	H	GT^{2k}	S_H	$T^{-k}S_G$
LR-II	$2k (k \geq 1)$	$T^{2k-1}H$	G	T^kS_G	S_G
LR-III	$2k (k \geq 1)$	H	GT^{2k-1}	S_H	$T^{-k}S_H$

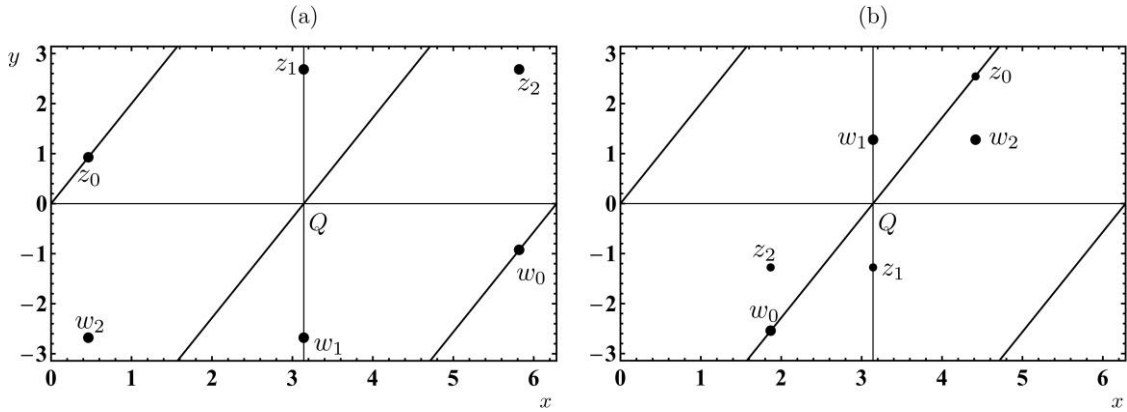


図 5: 標準写像における LR-I の例. (a) 円筒面を回転する周期 3. $a = 4$. (b) 不動点 Q を回転する周期 3. $a = 4$. (a) と (b) において, $z_0, w_0 \in S_H$, $z_1, w_1 \in S_G$.

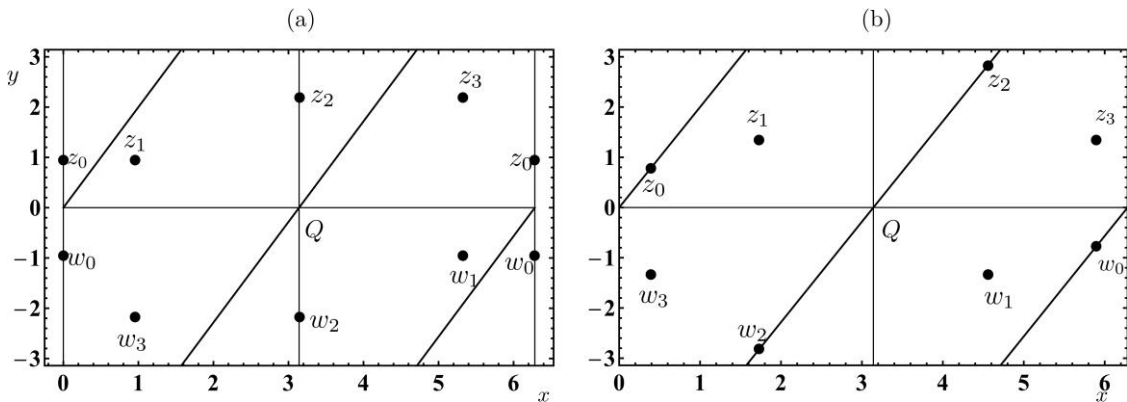


図 6: (a) 標準写像における LR-II の例. 周期 4. $z_0, z_2, w_0, w_2 \in S_G$. $a = 1.5$. (b) 標準写像における LR-III の例. 周期 4. $z_0, z_2, w_0, w_2 \in S_H$. $a = 1.5$.

LR-I の例として周期 3 の周期軌道点を図 5 に示した．図 5(a) の周期軌道は円筒面を一回転する．周期軌道 $O(z_0)$ の回転方向を右とする．周期軌道 $O(z_0)$ に g を作用すると周期軌道 $O(w_0)$ が得られる．周期軌道 $O(w_0)$ の回転方向は左である．図 5(b) の周期軌道は不動点 Q を回転する対称周期軌道である．周期軌道 $O(z_0)$ に h を作用すると周期軌道 $O(w_0)$ が得られる．ここで S_H 上にある z_0 に h を作用する． $hz_0 = hHz_0 = Rz_0$ である．初期点 z_0 を 180 度回転した位置に w_0 がある．二つの図において，周期軌道 $O(z_0)$ と周期軌道 $O(w_0)$ を合わせた集合が上下左右の対称性をもつことが確認できる．最後に LR-II と LR-III の周期軌道の例を図 6 に示した．

3.2. 一重対称周期軌道の分岐現象

LR-I の場合の例をもとに一重対称周期軌道の周期倍分岐と同周期分岐について議論する．LR-I の場合，周期は $q = 2k + 1$ である．二つの周期軌道点は $z_0 \in S_H$ と $z_k \in S_G$ を満たす．周期軌道点 z_0 より，対称線上に u_0 と v_0 が生じたとする．また周期軌道点 z_k より， u_k と v_k が生じたとする．これらは対称線 S_G 上にはない．もしこれらが対称線 S_G 上にあると，生じた周期軌道は対称線上に周期軌道点を四点もつ．これは性質 2.1(1) に反する．この軌道の模式図を図 7(a) に描いた．二点 u_k と v_k の位置関係で， u_k を S_G の右に， v_k を S_G の左にあるように描いた．これらを逆に配置してもよい．

二点 u_k と v_k は， $v_k = Gu_k$ を満たす (命題 2.3(1))．これより， $v_0 = Gu_{2k}$ が得られる．両辺に H を作用する．左辺は $Hv_0 = v_0$ ．右辺は $HGu_{2k} = u_{2k+1} = T^q u_0$ ．よって $v_0 = T^q u_0$ ．同様に $u_0 = T^q v_0$ が得られる．まとめて， $u_0 = T^{2q} u_0$ ， $v_0 = T^{2q} v_0$ ．周期軌道点 u_0 と v_0 は，周期軌道点 z_0 が周期倍分岐を起こして生じた周期軌道点である．

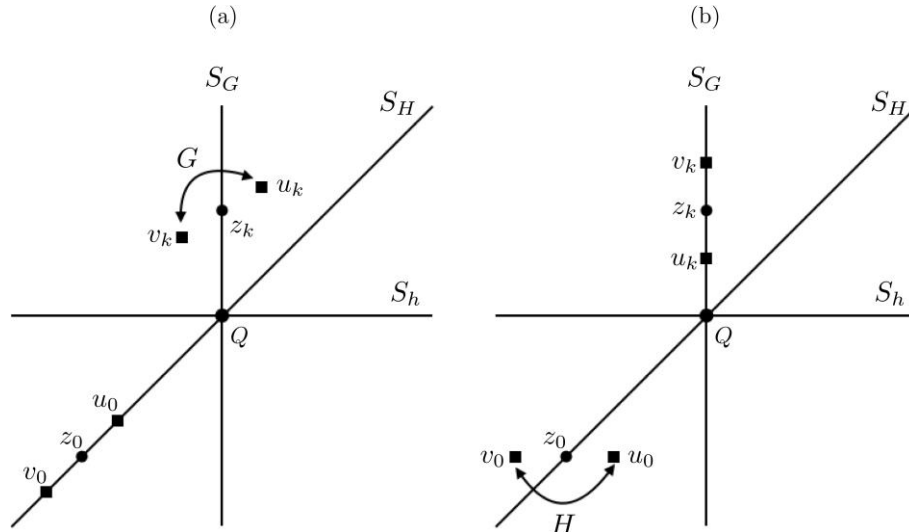


図 7: 周期倍分岐の二つの可能性．(a) 周期軌道点 z_0 より，対称線上に二点 u_0 と v_0 が生じた場合．(b) 周期軌道点 z_k より，対称線上に二点 u_k と v_k が生じた場合．

次に周期軌道点 z_k より対称線 S_G 上に周期軌道点 u_k と v_k が生じたとする (図 7(b))．また，周期軌道点 z_0 より周期軌道点 u_0 と v_0 が生じる．これらは対称線 S_H 上にはないが， $v_0 = Hu_0$ が成り立つ (命題 2.3(2))．両辺に T^{-k} を作用すると， $v_{-k} = Hu_k$ が得られる．両辺に T^{2k} を作用すると，左辺は v_k で，右辺は $T^{2k}Hu_k = T^{2k}HGu_k = T^{2k+1}u_k = T^q u_k$ ．よって， $v_k = T^q u_k$ が得られる．同様に $u_k = T^q v_k$ が得られる．この場合も，周期軌道点 u_k と v_k は周期軌道

点 z_k が周期倍分岐を起こして生じた周期軌道点である．

周期倍分岐で生じた周期軌道点 u_0 と v_0 が生じたとする．周期軌道 $O(u_0)$ と $O(v_0)$ は非対称周期軌道であるとする．つまり，周期軌道点 u_k と v_k も対称線 S_G 上にない．命題 2.4 より， $v_0 = Hu_0$ と $v_k = Gu_k$ が成り立つ．関係式 $v_k = Gu_k$ の両辺に T^{-k} を作用すると， $v_0 = T^{-k}Gu_k = GT^k u_k = GT^{2k} u_0$ が得られる．両辺に H を作用すると，左辺は $Hv_0 = u_0$ で，右辺は $(HG)(T^{2k})u_0 = T^{2k+1}u_0 = T^q u_0$ ．よって， $u_0 = T^q u_0$ ．同様にして， $v_0 = T^q v_0$ も得られる．周期軌道 $O(u_0)$ と $O(v_0)$ の周期と $O(z_0)$ の周期が等しいことから，周期軌道点 v_0 と u_0 は周期軌道点 z_0 が周期倍分岐を起こして生じた周期軌道点ではない．言い換えると，周期軌道点 v_0 と u_0 は周期軌道点 z_0 が同周期分岐を起こして生じた非対称周期軌道点である．ここで得られた結果をまとめて定理 3.1 とする．安定性についてはポアンカレ指数の例 1 と例 3 で述べた結果を利用した．

定理 3.1.

- (1) 楕円型一重対称周期軌道が周期倍分岐で生じた周期軌道は，楕円型一重対称周期軌道である．
- (2) 楕円型一重対称周期軌道が同周期分岐を起こして生じた周期軌道は，楕円型非対称周期軌道である．

4. 二重対称周期軌道

4.1. 二重対称周期軌道の例と性質

不動点 Q が回転分岐を起こして生じた二重対称周期軌道を紹介しよう．図 8(a) は対称線 S_G と S_g に周期軌道点をもつ二重対称周期軌道である．図(b) は対称線 S_H と S_h に周期軌道点をもつ二重対称周期軌道で，図(c) は対称線 S_H と S_g に周期軌道点をもつ二重対称周期軌道で，図(d) は対称線 S_G と S_h に周期軌道点をもつ二重対称周期軌道である．不動点 Q の回転分岐で図(a) のサドル型周期軌道と図(b) の楕円型周期軌道が生じる．これらが生じる臨界値は $4\sin^2(\pi/8) = 0.58578$ である [6]．また，図(c) の楕円型周期軌道と図(d) のサドル型周期軌道が生じる臨界値は $4\sin^2(\pi/6) = 1$ である．これらの図から性質 2.1(3) の意味が理解できるであろう．

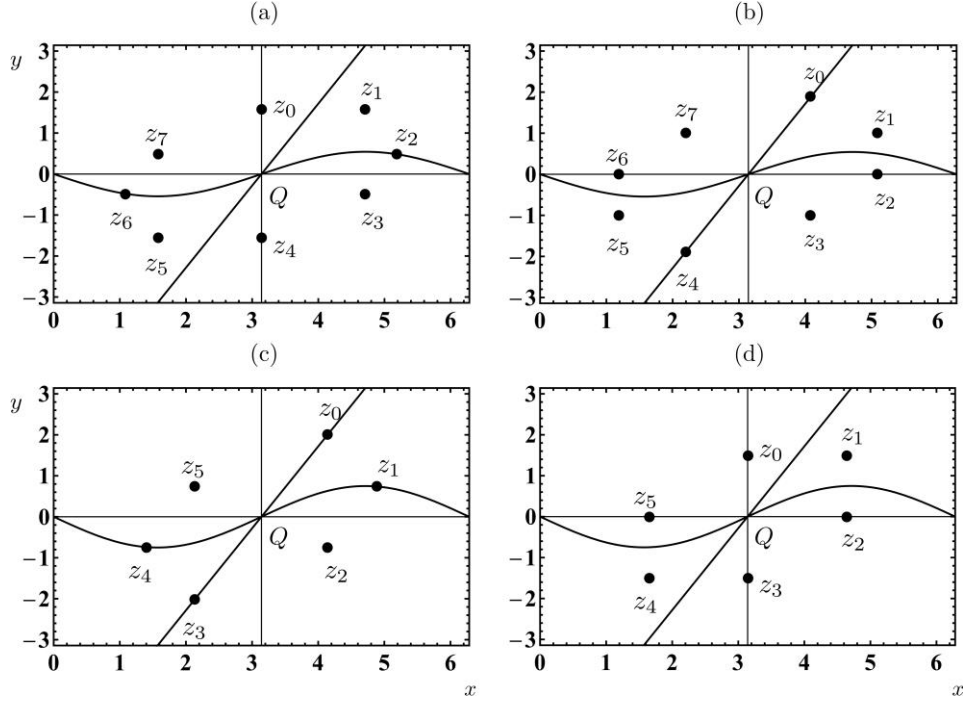


図 8: 標準写像における二重対称周期軌道の例. (a) D-I. 周期 8. $z_0, z_4 \in S_G$, $z_2, z_6 \in S_g$. $a = 1.08578$. (b) D-II. 周期 8. $z_0, z_4 \in S_H$, $z_2, z_6 \in S_h$. $a = 1.08578$. (c) D-III. 周期 6. $z_0, z_3 \in S_H$, $z_1, z_4 \in S_g$. $a = 1.5$ (d) D-IV. 周期 6. $z_0, z_3 \in S_G$, $z_2, z_5 \in S_h$. $a = 1.5$

二重対称周期軌道は上下と左右の対称線上に周期軌道点をもつことより命題 4.1 が得られる.

命題 4.1. 二重対称周期軌道において下記の(i)-(iii)が成り立つ.

- (i) 周期 q は偶数である.
- (ii) 二重対称周期軌道の周期軌道点の集合は 180 度回転作用 R に関して不変である.
- (iii) $R = T^{\pm q/2}$ が成り立つ.

証明. 最初に二重対称周期軌道を下記のように四種類に分類しよう.

- (1) 対称線 S_G と S_g に周期軌道点をもつ場合 ($z_0 \in S_G$, $z_k \in S_g$, $q = 4k$, 図 9 (a)).
- (2) 対称線 S_H と S_h に周期軌道点をもつ場合 ($z_0 \in S_H$, $z_k \in S_h$, $q = 4k$, 図 9 (b)).
- (3) 対称線 S_H と S_g に周期軌道点をもつ場合 ($z_0 \in S_H$, $z_k \in S_g$, $q = 4k + 2$, 図 9 (c)).
- (4) 対称線 S_G と S_h に周期軌道点をもつ場合 ($z_0 \in S_G$, $z_{k+1} \in S_h$, $q = 4k + 2$, 図 9 (d)).

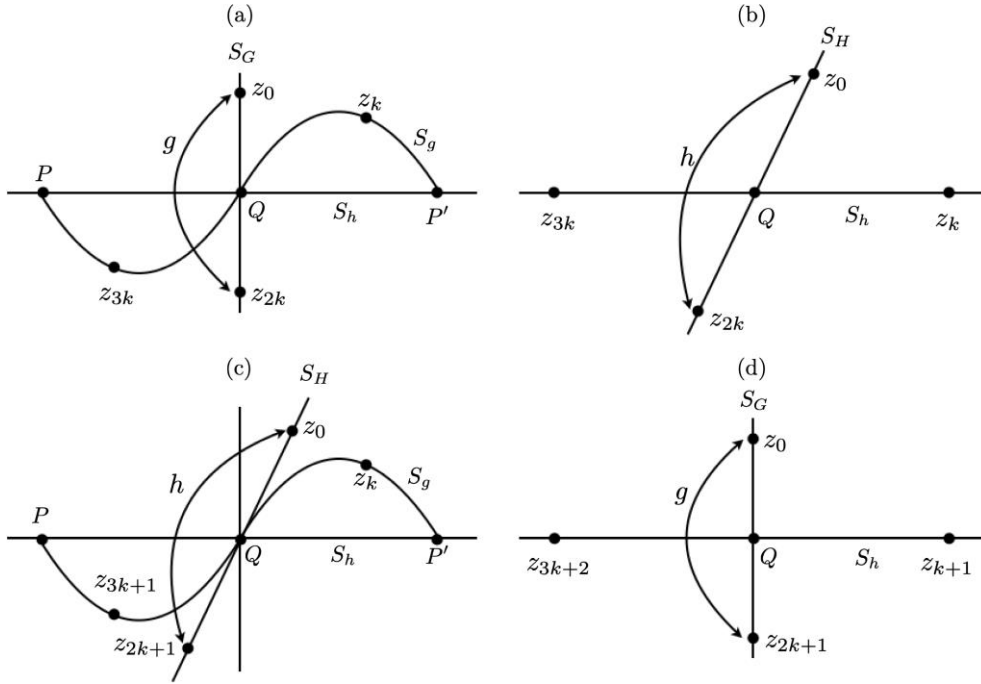


図 9: (a) $z_0 \in S_G$, $z_k \in S_g$, $q = 4k$. (b) $z_0 \in S_H$, $z_k \in S_h$, $q = 4k$. (c) $z_0 \in S_H$, $z_k \in S_g$, $q = 4k + 2$. (d) $z_0 \in S_G$, $z_{k+1} \in S_h$, $q = 4k + 2$.

次に(1)から(4)までのそれぞれに場合について証明を行う。

命題 4.1(1)の証明. 周期軌道点 z_0 が対称線 S_G 上にあるから, $z_0 = Gz_0$ が成り立つ. また z_k が対称線 S_g 上にあるから, $z_k = gz_k$ も成り立つ. この両辺に T^k を作用すると, $z_{2k} = gz_0$ が得られる. 両辺に G を作用すると $Gz_{2k} = Ggz_0 = gGz_0 = gz_0 = z_{2k}$ が得られる. よって, 周期軌道点 z_{2k} は対称線 S_G 上にある. $Gz_{2k} = z_{2k}$ を $Gz_0 = z_{4k}$ と書き直し, $z_0 = Gz_0$ を利用すると $z_0 = z_{4k}$ が得られる. これより周期が $q = 4k$ と決まる. 周期が偶数であることが示された.

関係式 $z_k = gz_k$ の両辺に T^{2k} を作用する. 左辺は z_{3k} で, 右辺は $T^{2k}gz_k = gT^{-2k}z_k = gz_{-k}$. 周期が $q = 4k$ であるから, $z_{-k} = z_{3k}$. よって, $z_{3k} = gz_{3k}$. まとめて, 対称線 S_G 上に z_0 と z_{2k} があり, 対称線 S_g 上に z_k と z_{3k} がある (図 9 (a)).

次に 180 度回転作用 R に関する性質を調べる. $z_{2k} = gz_0 = gGz_0 = Rz_0$ が得られる. この式の両辺に T を作用する. 左辺は z_{2k+1} . 右辺は $TRz_0 = RTz_0 = Rz_1$. $z_{2k+1} = Rz_1$ が成り立つ. このように T を順次作用することで 180 度回転作用 R で写される周期軌道点の対が決まる. 二重対称周期軌道の周期軌道点の集合は, 180 度回転作用 R に関して不変であることが導かれる. 関係式 $z_{2k} = Rz_0$ の左辺は $T^{q/2}z_0$ であるから, $R = T^{q/2}$ が得られる. また, $R = T^{-q/2}$ も成り立つ.

命題 4.1(2)の証明. 周期軌道点 z_0 が対称線 S_H 上にあるから, $z_0 = Hz_0$ が成り立つ. また, 周期軌道点 z_k が対称線 S_h 上にあるから, $z_k = hz_k$ も成り立つ. 両辺に g を作用すると, $gz_k = z_{k-1}$ が得られる. 両辺に T^k を作用すると, $gz_0 = z_{2k-1}$. これを利用すると, $z_{2k} = Tz_{2k-1} = hgz_{2k-1} = hggz_0 = hz_0$ が得られる. 両辺に H を作用すると, 右辺は $Hhz_0 = Rz_0$. 左辺は Hz_{2k} . 周期軌道点 z_0 を 180 度回転した点は S_H 上にあるから, $HHz_{2k} = z_{2k}$. これを $HHz_0 = z_{4k}$ と書き直し, $HHz_0 = z_0$ を利用すると $z_0 = z_{4k}$ が得られる. これより周期が $q = 4k$ と決まる. この場合, 対称線 S_H 上に周期軌道点 z_0 と z_{2k} があり, 対称線 S_h 上に周期軌道点 z_k と z_{3k} がある (図 9 (b)).

二重対称周期軌道の周期軌道点の集合が R に関して不変であることを示す手順は、(1)の証明と同じであるから証明は省く。

命題 4.1(3)の証明. 周期軌道点 z_0 が対称線 S_H 上にあるから、 $z_0 = Hz_0$ が成り立つ。周期軌道点 z_k が対称線 S_g 上にあるから、 $z_k = gz_k$ も成り立つ。よって、 $z_{2k} = gz_0$ が得られる。この関係式を利用すると、 $z_{2k+1} = Tz_{2k} = hgz_{2k} = hz_0$ が得られる。両辺に H を作用すると、左辺は $H z_{2k+1}$ で、右辺は $H h z_0 = R z_0$ 。周期軌道点 z_0 を180度回転した点は S_H 上にあるから、 $H z_{2k+1}$ は対称線 S_H 上にある。よって $H z_{2k+1} = z_{2k+1}$ が成り立つ。これを $H z_0 = z_{4k+2}$ と書き直し、 $H z_0 = z_0$ を利用すると、周期 $q = 4k + 2$ が得られる。対称線 S_H 上に周期軌道点 z_0 と z_{2k+1} があり、対称線 S_g 上に周期軌道点 z_k と z_{3k+1} がある (図 9 (c))。

命題 4.1(4)の証明. 周期軌道点 z_0 が対称線 S_G 上にあるから、 $z_0 = Gz_0$ が成り立つ。周期軌道点 z_{k+1} が対称線 S_h 上にあるから、 $z_{k+1} = hz_{k+1}$ も成り立つ。両辺に $T^{-1} = gh$ を作用すると、左辺は z_k で、右辺は $ghhz_{k+1} = gz_{k+1}$ である。よって、 $z_k = gz_{k+1}$ である。これより、 $z_{2k+1} = gz_0$ が得られる。ここで $Gz_0 = z_0$ を利用すると、 $z_{2k+1} = gGz_0 = Rz_0$ が求まる。周期軌道点 z_0 を180度回転した位置に z_{2k+1} がある。この点是对称線 S_G 上にあるから、 $Gz_{2k+1} = z_{2k+1}$ が成り立つ。これを、 $Gz_0 = z_{4k+2}$ と書き直し、 $Gz_0 = z_0$ を利用すると $z_0 = z_{4k+2}$ が得られる。これより周期が $q = 4k + 2$ と決まる。対称線 S_G 上に周期軌道点 z_0 と z_{2k+1} があり、対称線 S_h 上に周期軌道点 z_{k+1} と z_{3k+2} がある (図 9 (d))。

未来への写像を考えている場合、作用 R は $T^{q/2}$ とし、過去への写像を考えている場合、作用 R は $T^{-q/2}$ とする。最後に命題 4.2 が成り立つことを示す。

命題 4.2. 180度回転対称性をもつ対称周期軌道は二重対称周期軌道である。

証明. ここでは $z_0 \in S_H$ でかつ $Rz_0 \in S_H$ を満たす対称周期軌道について証明を行う。仮定より $Rz_0 \in O(z_0)$ であるから、 $Rz_0 = z_{2k}$ の場合と $Rz_0 = z_{2k+1}$ の場合を調べる。

最初に $Rz_0 = z_{2k}$ の場合を考える。 $z_{2k} \in S_H$ より、 $H z_{2k} = z_{2k}$ 。これを $Rz_0 = z_{2k}$ に代入すると、 $Rz_0 = H z_{2k}$ が得られる。 $R = hH$ を利用すると $hz_0 = z_{2k}$ が成り立つ。両辺に T^{-k} を作用すると、 $hz_k = z_k$ が求まる。これは z_k が対称線 S_h 上にあることを意味している。この対称周期軌道は、対称線 S_H と S_h に軌道点をもつから二重対称周期軌道である。周期は $q = 4k$ ($k \geq 1$) (命題 4.1 の証明における分類(2)) である。

次に $Rz_0 = z_{2k+1}$ の場合、 $H z_{2k+1} = z_{2k+1}$ を利用すると $Rz_0 = H z_{2k+1}$ が得られる。 $R = hH$ より、 $hz_0 = z_{2k+1}$ 。 $z_{2k+1} = Tz_{2k} = hgz_{2k}$ であるから、 $z_0 = gz_{2k}$ が導かれる。両辺に T^k を作用すると、左辺は z_k で、右辺は $T^k gz_{2k} = gT^{-k} z_{2k} = gz_k$ 。よって、 $z_k = gz_k$ が得られる。これは、 z_k が対称線 S_g 上にあることを意味している。この対称周期軌道は、対称線 S_H と S_g に軌道点をもつから二重対称周期軌道で、周期は $q = 4k + 2$ ($k \geq 0$) (命題 4.1 の証明における分類(3)) である。以上で証明を終える。

4.2. 二重対称周期軌道の新しい表現方法

二重対称周期軌道を特徴付けるために写像 T^q の新しい分割方法を表 3 で導入した.

表 3:二重対称周期軌道の分類と新しい表現方法

分類	周期: q	左対合	恒等写像	右対合	対称線:左対合	対称線:右対合
D-I	$4k (k \geq 1)$	$T^{2k-1}H$	$GT^{2k-1}h$	g	$T^k S_G$	S_g
		$T^{2k-1}h$	$gT^{2k-1}H$	G	$T^k S_g$	S_G
D-II	$4k (k \geq 1)$	h	$gT^{2k-1}H$	GT^{2k-1}	S_h	$T^{-k}S_H$
		H	$GT^{2k-1}h$	gT^{2k-1}	S_H	$T^{-k}S_h$
D-III	$4k + 2 (k \geq 0)$	$T^{2k}H$	$GT^{2k}h$	g	$T^k S_H$	S_g
		H	$GT^{2k}h$	gT^{2k}	S_H	$T^{-k}S_g$
D-IV	$4k + 2 (k \geq 1)$	$T^{2k}h$	$gT^{2k}H$	G	$T^k S_h$	S_G
		h	$gT^{2k}H$	GT^{2k}	S_h	$T^{-k}S_G$

分類 D-I の第一の分解について説明する. 最初に $T^q = T^{4k} = T^{4k-1}h \circ g$ と分け, 次に残りの $T^{4k-1}h$ を, $T^{2k-1}H \circ GT^{2k-1}h$ と分けた. この分解では, 左対合における T の冪と恒等写像における T の冪が等しくなるように分解した. このように分解することで第二の作用が恒等写像になる. これを次に示す.

$$GT^{2k-1}h = GHHT^{2k-1}h = T^{-1}T^{-2k+1}Hh = T^{-2k}R = T^{-q/2}R = RR = id.. \quad (16)$$

二重対称周期軌道を考えているから, 命題 4.1 を利用して $T^{-q/2}$ を R で置き換えた.

次に第二の分解について説明する. T^q を $T^{4k-1}H \circ G$ と分解し, $T^{4k-1}H$ を $T^{2k-1}h \circ gT^{2k-1}H$ と分解した. 左対合について不変な集合は $T^k S_g$ で, 左対合に不変な集合は S_G である. 第二の作用 $gT^{2k-1}H$ が恒等写像であることも簡単に示せる.

第一の分解から得られた条件 $T^k S_G \cap S_g \neq \emptyset$ と 第二の分解から得られた条件 $T^k S_g \cap S_G \neq \emptyset$ は, 同じ二重対称周期軌道の特徴付けていることを説明する. 分類 D-I の周期軌道の一周期分は

$$z_0 \in S_G \rightarrow z_k \in S_g \rightarrow z_{2k} \in S_G \rightarrow z_{3k} \in S_g \rightarrow z_{4k} \in S_G \quad (17)$$

と書ける. 軌道点の時間発展を $\rightarrow$ で示した. ここで, $z_0 \in S_G$ は z_0 が対称線 S_G 上にあることを意味する. $T^k S_G \cap S_g = z_k$ より, $z_0 \in S_G \rightarrow z_k \in S_g$ が得られる. 関係 $gz_k = z_k$ より, $gz_0 = z_{2k}$ が得られる. この両辺に G を作用する. 左辺は $Ggz_0 = Rz_0$ である. 対称線 S_G は 180 度回転対称性をもつから, Rz_0 は対称線 S_G 上にある. 一方で, 右辺は z_{2k} であるから, z_{2k} が対称線 S_G 上にあることがわかる. 軌道点 z_k から z_{2k} への関係は, $T^k S_g \cap S_G$ と書ける. これが第二の分解から得られた集合関係である. つまり, $T^k S_G \cap S_g \neq \emptyset$ を利用して, $T^k S_g \cap S_G \neq \emptyset$ を利用して同じ二重対称周期軌道を決定できることがわかる.

分解として二つ紹介したが, 問題に適した分解を利用すればよい. 以下の議論では, それぞれの場合の第一の分解を用いる.

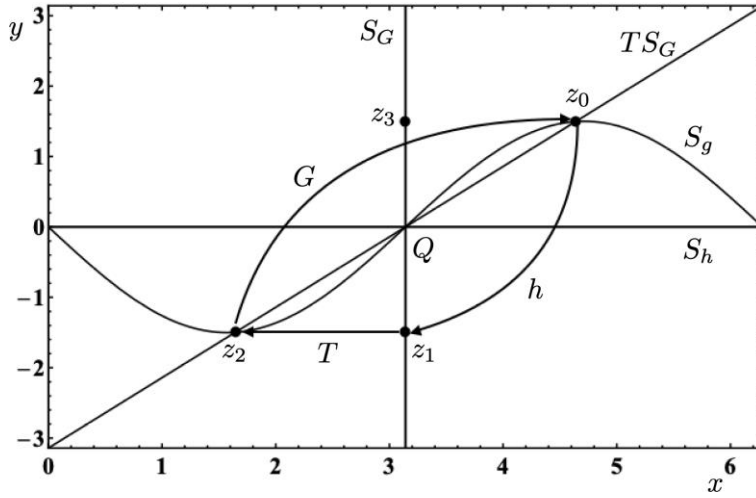


図 10: 標準写像における 分類 D-I ($q = 4$) の例. 矢印は恒等写像 GTh による周期軌道点の動き. $a = 3$.

周期 $q = 4$ ($k = 1$) の場合における恒等写像 GTh による周期軌道点の動きを図 10 に示した. 周期軌道点 z_0 は対称線 S_g 上にあるから, $z_0 = gz_0$ が成り立つ. 両辺に h を作用すると $hz_0 = hgz_0 = z_1$. 周期軌道点 z_1 は対称線 S_g 上にあるから, $Gz_1 = z_1$. 両辺に T を作用すると, 左辺は $TGz_1 = GT^{-1}z_1 = Gz_0$, 右辺は $Tz_1 = z_2$. よって, $Gz_2 = z_0$ である. 以上で $GThz_0 = z_0$ が成り立つことが示された.

第二の作用 $GT^{2k-1}h$ が恒等写像であるから, 対合 $T^{2k-1}H$ の不動点の集合として対称線 T^kS_g が得られ, 対合 g の不動点の集合として対称線 S_g が得られる. これらの対称線を表 3 の第 6 欄と第 7 欄に載せた. 対称線 T^kS_g が対合 $T^{2k-1}H$ について不変であることを示しておく.

$$T^{2k-1}H(T^kS_g) = T^{2k-1}T^{-k}HS_g = T^{k-1}(HG)GS_g = T^kS_g. \quad (18)$$

表 3 の第 2 欄の k に関する条件について説明する.

分類 D-I の場合: 周期についての条件として k の最小値は $k = 1$ である. これはパラメータを大きくすると TS_g と S_g が接触し交差できるからである (図 10). 像 TS_g の傾きは 1 で, 対称線 S_g の不動点 Q における傾きは $a/2$ である. これより臨界値は $a = 2$ である.

分類 D-II の場合: パラメータを大きくしても対称線 S_H と S_h が不動点以外で交差することがない. そのため, $k = 0$ が許されない. パラメータを大きくすると逆像 $T^{-1}S_H$ と S_h が接触し交差できることを示す. そのため像 TS_h と S_H が接触する状況を考える. 像 TS_h は $y = 0$ の像であるから, $y = f(x - y)$ と書ける. Q における曲線 $y = f(x - y)$ の傾きを $\xi = dy/dx$ とする. $y = f(x - y)$ の両辺を x で微分して, $x = \pi$ ならびに $y = 0$ を代入すると, $\xi = a/(a - 1)$ が得られる. 対称線 S_H の傾きは 2 であるから, $\xi = 2$ より a に関する臨界値が 2 と決まる. これより k の最小値が $k = 1$ と得られる.

分類 D-III の場合: 周期軌道点 z_0 が対称線 S_H 上にあり, 周期軌道点 z_k が対称線 S_g 上にある. 周期 $q = 4k + 2$ において, $k = 0$ が許される (図 1). 対称線 S_g の Q における傾きは $a/2$ である. これが S_H の傾き 2 と等しいとして, 臨界値が $a = 4$ と決まる.

分類 D-IV の場合: パラメータを大きくしても対称線 S_g と S_h が不動点以外で交差しないから, 周期について $k = 0$ は許されない. 分類 D-II で得られた像 TS_h の傾き $\xi = a/(a - 1)$ を再

度利用する． a を増加すると $a = 1$ を境に傾き ξ の符号が負から正に変わる．これは， $a > 1$ で TS_h と S_g が交差することを意味する．臨界値は $a = 1$ で， k の最小値が $k = 1$ と決まる．

分類 D-I における $k = 1$ の場合の恒等写像を $GThz = z$ ($z = (x, y)$)と書く．これを $Thz = Gz$ と書き直す．この式より下記の連立方程式が得られる．

$$-y + f(x - y) = y + f(x), \quad (19)$$

$$x - 2y + f(x - y) = 2\pi - x. \quad (20)$$

これらの式より， $f(x - y)$ を消去すると

$$-f(x)/2 = x - \pi. \quad (21)$$

左辺は対称線 S_g の表式そのもので，右辺は対称線 S_g ($x = \pi$)を一回写像した像である．これは，対称線 S_g ($y = -f(x)/2$)と対称線の像 TS_g ($y = x - \pi$)との交点に二重対称周期軌道の周期軌道点 z があることを意味している．不動点 $Q = (\pi, 0)$ 以外に，二重対称周期軌道点が存在する条件は $-df(\pi)/dx > 1$ である．標準写像の場合には， $a > 2$ が得られる．

恒等写像から決まる連立方程式を解くことで，二重対称周期軌道が存在する条件が得られ，周期軌道点の位置が決まることがわかる．以上で得られた結果を定理 4.3 としてまとめる．

定理 4.3. 写像 T^q ($q \geq 2$)を，左対合，恒等写像，右対合 の三つに分解する．左対合と右対合を利用することで二重対称周期軌道が存在するための条件が得られる．恒等写像より二重対称周期軌道が存在するための条件が得られる．これら二つの条件は一致する．

恒等写像と周期軌道の対称性に関する命題 4.4 を示す．

命題 4.4. 恒等写像を γ と書く．ここで点 z は不動点でないとする．点 z が関係式 $\gamma z = z$ を満たすならば，軌道 $O(z)$ は二重対称周期軌道である．

証明. 分類 D-I の場合の恒等写像 $\gamma = GT^{2k-1}h$ を利用して証明を行う．式 $GT^{2k-1}hz = z$ を $T^{2k-1}hz = Gz$ と書き直す．左辺の $T^{2k-1}h$ について不変集合は $T^k S_g$ である．右辺の G について不変集合は対称線 S_g である．関係式 $T^{2k-1}hz = Gz$ は，集合 $T^k S_g \cap S_g$ に点 z が含まれていることを意味している．点 z は不動点でないから，二重対称周期軌道の周期軌道点である．ここで得られた集合 $T^k S_g \cap S_g$ は，分類 D-I の第二の分解で得られた集合である．

一重対称周期軌道の軌道についても T^q を三つの作用に分解できるのではないかという疑問が湧く．一重対称周期軌道の軌道に関して例えば三つの作用に分解しても分解に意味がないことを示す．左対合または右対合における写像の回数と恒等写像に含まれる写像の回数が同じであるという条件を満たすのは偶数周期に限られる．よって偶数周期の例として 周期 8 の写像を $T^8 = T^3 h \circ g T^3 h \circ g$ と分解する．この分割は上記の条件を満たしている．左対合 $T^3 h$ について不変な集合は $T^2 S_g$ である．ところが $T^2 S_g$ と対称線 S_g の交差点は周期 4 の周期軌道点である．周期 8 の周期軌道点を決定するためには， $T^8 = T^7 h \circ g$ と分割する必要がある．左対合 $T^7 h$ について不変な集合は $T^4 S_g$ である．これと対称線 S_g の交差点が周期 8 の周期軌道点である．この結果より命題 4.5 が得られる．

命題 4.5. 写像 T^q ($q \geq 2$) の左対合, 恒等写像, 右対合への分解は, 二重対称周期軌道の特徴付けにおいてのみ有効である.

命題 4.6 は, 一重対称周期軌道と二重対称周期軌道の周期倍分岐を検討する場合に利用できる.

命題 4.6. 周期 q (≥ 2) の対称周期軌道 $O(z_0)$ を考える. 対称線 S^+ と S^* は, 対称線の集合 $\{S_G, S_H, S_g, S_h\}$ の要素とする. 周期軌道点 z_0 は対称線 S^* 上にあり, 点 z_k ($k \geq 1$) は対称線 S^+ 上にあるとしよう. 対称線 S^+ を不変とする対合を ρ^+ と書き, 対称線 S^* を不変とする対合を ρ^* と書く. 下記の関係式が成り立つ.

$$\rho^+(T^k S^*) = T^{-q}(T^k S^*), \quad (22)$$

$$\rho^*(T^{-k} S^+) = T^q(T^{-k} S^+). \quad (23)$$

証明. 最初に, 一重対称周期軌道の場合の証明を行う. 周期軌道点 z_0 は対称線 S_h 上にあるとし, 周期軌道点 z_k は対称線の像 $T^k S_h$ と対称線 S_g の交点にあるとする. この場合, $q = 2k + 1$, 対合は $\rho^+ = g$.

$$gT^k S_h = T^{-k} g S_h = T^{-k} g h S_h = T^{-k-1} S_h = T^{-2k-1}(T^k S_h) = T^{-q}(T^k S_h). \quad (24)$$

逆に, 周期軌道点 z_0 は $T^{-k} S_g$ と S_h の交点にある. この場合, $\rho^* = h$.

$$hT^{-k} S_g = T^k h S_g = T^k h g S_g = T^{k+1} S_g = T^{2k+1}(T^{-k} S_g) = T^q(T^{-k} S_g). \quad (25)$$

以上で式(22)と式(23)が示された.

次に, 二重対称周期軌道の場合の証明を行う. 周期軌道点 z_0 は対称線 S_h 上にあるとし, 周期軌道点 z_k は対称線の像 $T^k S_h$ と対称線 S_H の交点にあるとする. この場合, $q = 4k$, 対合は $\rho^+ = H$.

$$HT^k S_h = T^{-k} H S_h = T^{-k} H h S_h = T^{-k} R S_h = T^{-k} T^{-2k} T^{-k}(T^k S_h) = T^{-q}(T^k S_h). \quad (26)$$

ここでは逆写像を利用しているので, 180 度回転作用 R を T^{-2k} で置き換えた.

逆に, 周期軌道点 z_0 は $T^{-k} S_H$ と S_h の交点にある. この場合, $\rho^* = h$.

$$hT^{-k} S_H = T^k h S_H = T^k h H S_H = T^k R S_H = T^k T^{2k} T^k(T^{-k} S_H) = T^q(T^{-k} S_H). \quad (27)$$

ここでは未来への写像を利用しているので, 180 度回転作用 R を T^{2k} で置き換えた. 以上で式(22)と式(23)が示された.

4.3. 楕円型二重対称周期軌道の分岐現象

最初に二重周期倍分岐を定義する.

定義 4.7 (二重周期倍分岐の定義). 周期倍分岐と反周期倍分岐が同時に生じる場合, この分岐を二重周期倍分岐と定義する.

参考文献[7]の P.67 において, 変則的な分岐 (Anomalous bifurcation) が導入されている. 変則的な分岐はここで定義した二重周期倍分岐と同周期分岐を含んでいる.

回転分岐で生じた周期軌道の性質を命題 4.8 としてまとめ証明を与える．命題 4.8 は数値計算で確認できる．数値計算ではソフトウェア StdMap が役に立つ[11]．

命題 4.8. 楕円型不動点 Q から回転分岐で生じた周期軌道について (1) と (2) が成り立つ．

- (1) 周期が偶数の場合．回転分岐で生じた周期軌道は二重対称周期軌道で二つ生じる．
- (2) 周期が奇数の場合．回転分岐で生じた周期軌道は一重対称周期軌道で四つ生じる．

命題 4.8(1)の証明. 例として対称線 S_G 軸 ($x = \pi$) の $y > 0$ を満たす領域に周期軌道点 z_0 が生じたとする．これより周期軌道 $O(z_0)$ が対称周期軌道であることは保証されている．関数 $f(x)$ は、不動点 Q を中心として 180 度回転に関して不変であるから、 S_G 軸の $y < 0$ を満たす軸上に周期軌道点 w_0 が生じる． $w_0 = Rz_0$ が成り立つ．偶数周期であるから w_0 は $O(z_0)$ に含まれる．もし含まれないとすると $O(z_0)$ に含まれる軌道点 $z_k (\neq w_0)$ が S_G 軸の $y < 0$ を満たす軸上に存在することになる．つまり、不動点 Q より回転分岐で S_G 軸の $y < 0$ を満たす軸上に二点 z_k と w_0 が同時に生じたことを意味する．これは矛盾である．よって、 $O(z_0)$ は Q を中心として 180 度回転対称性をもつ．命題 4.2 より、 $O(z_0)$ は二重対称周期軌道である．ポアンカレ指数の保存性より、楕円型二重対称周期軌道とサドル型二重対称周期軌道が生じる．つまり、二重対称周期軌道が二つ生じることが示された．

命題 4.8(2)の証明. 命題 4.8 (1) の証明で利用した例を使う．奇数周期の場合、 $O(z_0) \neq O(w_0)$ である．もし $O(z_0) = O(w_0)$ ならば周期が偶数になるからである．これより $O(z_0)$ が二重対称周期軌道でないことが示された．よって、 $O(z_0)$ は一重対称周期軌道である．この周期軌道が楕円型一重対称周期軌道ならば、楕円型一重対称周期軌道が二つ生じることがわかる．ポアンカレ指数の保存性より、サドル型一重対称周期軌道も二つ生じる．つまり、一重対称周期軌道が四つ生じることが示された．

楕円型二重対称周期軌道は楕円型一重対称周期軌道に比べて複雑な分岐をする．これに関して述べた定理 4.9 を紹介する．

定理 4.9.

- (1) 楕円型二重対称周期軌道が二重周期倍分岐を起こすと、二つの楕円型一重対称周期軌道と二つのサドル型一重対称周期軌道が生じる．この分岐の前後で 楕円型二重対称周期軌道の安定性は変化しない．
- (2) 楕円型二重対称周期軌道が同周期分岐を起こすと、二つの楕円型一重対称周期軌道が生じる．同周期分岐の後、楕円型二重対称周期軌道はサドル型二重対称周期軌道へと変化する．

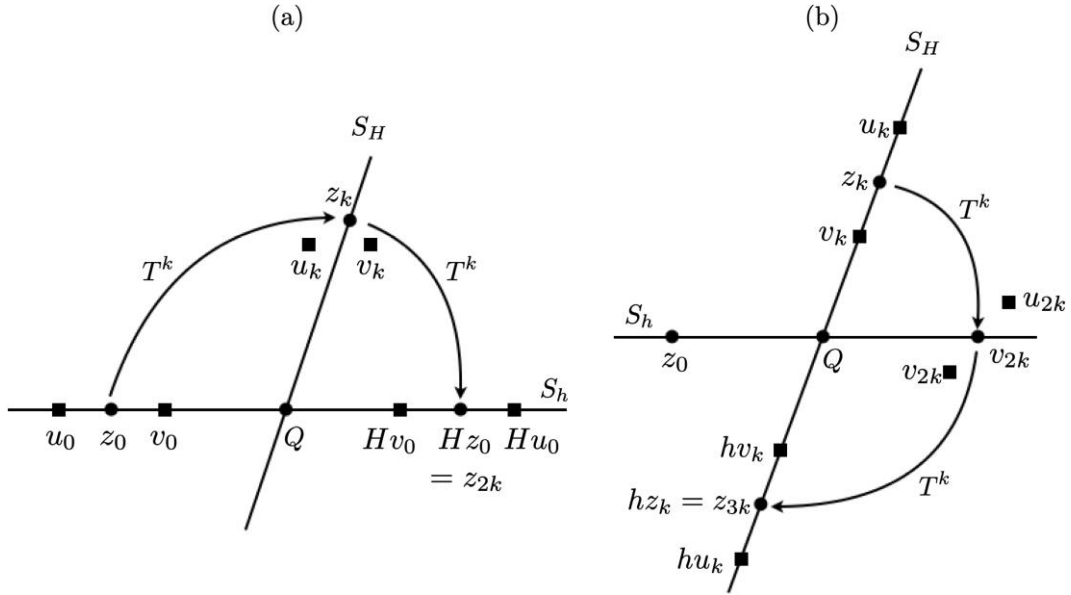


図 11 対称線 S_h 上と S_H 上に周期軌道点をもつ二重対称周期軌道の場合. (a) 対称線 S_h 上の周期軌道点 z_0 が周期倍分岐を起こして二重対称周期軌道点 u_0 と v_0 が生じる場合. (b) 対称線 S_H 上の周期軌道点 z_k が周期倍分岐を起こして二重対称周期軌道点 u_k と v_k が生じる場合.

定理 4.9(1)の証明. 証明を三つに分けて行う.

[1] 楕円型二重対称周期軌道が二重周期倍分岐を起こした結果生じた周期軌道が、もし二重対称周期軌道であるとする矛盾であることを.

楕円型二重対称周期軌道は対称線 S_h と S_H 上に周期軌道点をもつとしよう (図 11(a)を見よ). つまり, $z_0 \in S_h$ で $z_k \in S_H$. 周期 q は $q = 4k$ である. 楕円型二重対称周期軌道の周期軌道点 z_0 より周期倍分岐または反周期倍分岐で生じた二つの周期軌道点に対称線 S_h 上にあるとする. これらを u_0 と v_0 と書く. $Hu_0 = Hv_0 = Rz_0$ であるから, Hu_0 は Q を中心として180度回転した位置にある. 周期軌道点 Hu_0 と Hv_0 も対称線 S_h 上にある. 周期倍分岐で周期軌道点 u_0 と v_0 が生じたという仮定より, $v_0 = T^{4k}u_0 = u_{4k}$ が成り立つ.

ここで $u_k = Hv_k$ であることに注意する (命題 2.3(2)). これに T^k を作用すると左辺は u_{2k} で, 右辺は $T^kHv_k = HT^{-k}v_k = Hv_0$ が得られる. つまり $Hv_0 = u_{2k}$ である. 同様にして $Hu_0 = v_{2k} = u_{6k}$ が得られる. つまり, 四点 $u_0, v_0 (= u_{4k}), Hu_0 (= u_{6k}), Hv_0 (= u_{2k})$ は周期倍分岐で生じた周期軌道点で 一つの対称線 S_h の上にある. これは性質 2.1(1)に反する.

次に周期倍分岐で対称線 S_H 上の周期軌道点 z_k から二つ周期軌道点 u_k と v_k が生じたとする (図 11 (b)). 仮定より, $v_k = T^{4k}u_k = u_{5k}$ である. この場合, $v_{2k} = hu_{2k}$ が成り立つ (命題 2.3(4)). これに T^k を作用すると, 左辺は $v_{3k} = u_{7k}$ で, 右辺は hu_k となる. つまり, $hu_k = u_{7k}$ が得られる. $v_{2k} = hu_{2k}$ を $u_{2k} = hv_{2k}$ と書き直して, T^k を作用すると, 左辺は u_{3k} で, 右辺は hv_k となる. つまり, $hv_k = u_{3k}$ が得られる. 対称線 S_H 上に, 四点 $u_k, v_k (= u_{5k}), hu_k (= u_{7k}), hv_k (= u_{3k})$ が存在する. これは性質 2.1(1)に反する. 上記で調べた以外の場合にも同様の方法で矛盾が導ける. 証明は省く.

[2] 周期倍分岐と反周期倍分岐は同時に生じること (二重周期倍分岐が生じること).

周期倍分岐だけが生じたと仮定する. 図 11 (a)の場合, $v_0 = T^q u_0$ ($q = 4k$) を満たすならば, 周期軌道点 u_0 から出発した軌道は対称線 S_h にある周期軌道点 Hu_0 と Hv_0 を通らない. なぜなら, 周期軌道 $O(u_0)$ は, 既に対称線 S_h 上に u_0 と v_0 の二点を周期軌道点としてもって

るからである．このことは周期軌道点 Hu_0 出発し， Hv_0 を通過し，再度 Hu_0 に戻る別の周期軌道が存在する事を意味している．以上で二つの一重対称周期軌道が生じたことが示された．

周期軌道点 z_0 の近傍には， z_0 から生じた u_0 と u_q (上記の v_0) が存在する．ここで $w_0 = Hu_0$ ならびに $w_q = Hv_0 = T^q w_0$ と書くことにする．つまり，周期軌道点 z_{2k} から w_0 と w_q が生じる．周期軌道 $O(u_0)$ と $O(w_0)$ は異なった一重対称周期軌道である．周期軌道 $O(w_0)$ の周期軌道点 w_{2k} と w_{6k} は周期軌道点 z_0 の近傍にあり， $w_{2k} = hw_{6k}$ を満たす．周期軌道点 u_{2k} と u_{6k} は周期軌道点 z_{2k} の近傍にあり， $u_{2k} = hu_{6k}$ を満たす．周期軌道点 z_0 の近傍には対称線 S_h 上に u_0 と u_q が存在し，対称線 S_h の上下に w_{2k} と w_{6k} がある．これらは全て楕円型周期軌道点である．

ここで周期軌道点 z_0 が周期倍分岐の結果，反転型サドル周期軌道点になったとしよう．周期倍分岐前のポアンカレ指数の総和は $(+1)$ で，分岐後のポアンカレ指数の総和は $(-1) + 4 \times (+1) = (+3)$ である．ポアンカレ指数の総和が保存されない．

ポアンカレ指数の総和が保存されるためには，周期軌道点 z_0 の周期倍分岐と同時に反周期倍分岐が生じると考え直す必要がある．反周期倍分岐に結果として周期軌道点 z_0 から対称線 S_h 上に s_0 と s_q が生じる．これらはサドル型周期軌道である．また，同様に周期軌道点 z_{2k} の周期倍分岐と同時に反周期倍分岐が生じる．結果として周期軌道点 z_{2k} から対称線 S_h 上に t_0 と t_q が生じる．これらはサドル型周期軌道である．つまり，周期軌道点 z_0 の近傍にはサドル型周期軌道点 s_0 ， s_q ， t_{2k} ， t_{6k} が存在する．これらのポアンカレ指数の総和は $4 \times (-1) = (-4)$ である．

この結果，周期倍分岐で生じた周期軌道点のポアンカレ指数の総和 $(+4)$ と 反周期倍分岐で生じた周期軌道点のポアンカレ指数の総和 (-4) が互いに打ち消しあう必要がある．このことから周期軌道点 z_0 は，ここで考えている分岐が生じてても安定性が変わらないことが導かれる．これはポアンカレ指数の総和の保存性からの要請である．

[3] (反) 周期倍分岐の結果として非対称周期軌道が生じると矛盾であること．

[2] では，周期倍分岐と反周期倍分岐で生じた娘軌道点是对称線上あるとして議論を行った．これが正しいことを示す．

例として D-II の場合で，周期軌道点 $z_0 \in S_h$ より， u_0 と v_0 が生じたとする．ただし， $O(u_0)$ と $O(v_0)$ は非対称周期軌道であると仮定する．周期軌道点 z_k から u_k と v_k が生じ，周期軌道点 z_{2k} から u_{2k} と v_{2k} が生じることも意味している．二点 u_0 と v_0 は対称線 S_h 上にないが， $u_0 = hv_0$ ($u_0 \neq v_0$) は満たす．右対合 $\beta = GT^{2k-1}H$ についても $v_0 = \beta u_0$ が成り立つ．もし成り立たないとすると z_0 から四点生じたことになり矛盾である．

関係式 $u_0 = hv_0$ の両辺に β を作用する．左辺は $\beta u_0 = v_0$ で，右辺は $\beta hv_0 = GT^{2k-1}hv_0 = GhT^{-2k+1}v_0 = (Gg)(gh)T^{-2k+1}v_0 = RT^{-2k}v_0 = Rv_{-2k}$ ．つまり， $v_0 = Rv_{-2k}$ が得られる．ここで $u_k = Hv_k$ を利用すると， $u_{2k} = Hv_0$ が得られる．また $v_{2k} = Hu_0$ も得られる． $Rv_0 = Hhv_0 = Hu_0 = v_{2k}$ より， $v_{2k} = v_{-2k}$ が成り立つ．つまり， $v_0 = Rv_{-2k} = Rv_{2k}$ であるから，結果として $v_0 = v_{4k}$ が得られる．周期軌道 $O(v_0)$ の周期が $4k$ で，周期軌道点 z_k の周期と一致する．以上で， u_0 と v_0 が周期倍分岐で生じた周期軌道点でないことが示され，矛盾が導かれた．同様にして反周期倍分岐の場合も証明できる．以上で証明を終える．

定理 4.9(2)の証明. 三つに分けて証明する

[1] 二つの一重対称周期軌道が生じること.

周期軌道点 z_0 から対称線 S_h 上に周期軌道点 u_0 と v_0 が生じたとする. 周期軌道点 u_0 から出発した周期軌道 $O(u_0)$ は v_0 を通らない. もし通れば周期軌道 $O(u_0)$ は周期軌道点 z_0 が周期倍分岐を起こして生じた周期軌道になるからである. $Hv_0 = u_{2k}$ が成り立つから, 周期軌道 $O(u_0)$ は Hv_0 を通る. これより周期が $4k$ であることが導かれる. また周期軌道点 v_0 から出発した周期軌道 $O(v_0)$ は, $Hu_0 = v_{2k}$ を通る. よって周期は $4k$ である. まとめて, 二つの周期軌道点 u_0 と v_0 は周期軌道点 z_0 が同周期分岐を起こして生じた周期軌道点である. 以上で二つの一重対称周期軌道が生じることが導かれた.

[2] 二つの一重対称周期軌道は楕円型であること.

写像 T^q における同周期分岐の前後でのポアンカレ指数の総和を調べる. 分岐前, 周期軌道点 z_0 は楕円型であるから, このポアンカレ指数は $(+1)$ である. 分岐後はサドル型であるからポアンカレ指数は (-1) である. 生じた二つの一重対称周期軌道は楕円型であるならば, ポアンカレ指数は $2 \times (+1)$ である. 分岐後のポアンカレ指数の総和は $(+1)$ となる. 以上で二つの一重対称周期軌道は楕円型であることが示された.

[3] 同周期分岐の結果として非対称周期軌道が生じないこと.

定理 4.9 (1)の証明の[3]で, $O(u_0)$ と $O(v_0)$ が周期 $4k$ の非対称周期軌道であることが得られている. つまり $O(z_k)$ が同周期分岐を起こした結果, 二つの非対称周期軌道が生じたとも考えられる. 以下で, これが誤りであることを示す.

作用 $\alpha = \gamma \circ \beta = gT^{4k-1}$ を u_0 に作用すると, $\alpha u_0 = v_0$ が成り立つことを示す.

$$\alpha u_0 = gT^{4k-1}u_0 = g \circ gh \circ T^{4k}u_0 = hu_{4k}. \quad (28)$$

既に得られている関係 $u_0 = u_{4k}$ を利用すると, $\alpha u_0 = hu_0 = v_0$ が得られる.

次に, $\beta u_0 = v_0$ を示す.

$$\beta u_0 = GT^{2k-1}u_0 = GT^{-1}u_{2k} = Hu_{2k} = v_0. \quad (29)$$

関係式 $\alpha u_0 = \gamma \circ \beta u_0 = v_0$ が成り立つ. この式に $\beta u_0 = v_0$ を代入すると $\gamma v_0 = v_0$ が導かれる. 命題 4.4 より, $O(v_0)$ は二重対称周期軌道である. $O(u_0)$ も二重対称周期軌道である. これらの結果は, $O(u_0)$ と $O(v_0)$ を非対称周期軌道であるとした仮定に反する. 以上より, 二重対称周期軌道が同周期分岐を起こして生じた二つの周期軌道は非対称周期軌道でないことが導かれた. 上記以外の場合も同様の方法で証明できるので証明は省く. 以上で証明を終える.

定理 4.9 の証明の過程で得られた非対称周期軌道に関する結果を命題 4.10 とする.

命題 4.10. 対称周期軌道が分岐を起こして非対称周期軌道が生じる過程は, 一重対称周期軌道が同周期分岐を起こした場合に限られる.

5. 標準写像を利用した数値計算結果

5.1. 臨界値の決定方法

標準写像における周期 2 の対称周期軌道をもとに定理 4.9 の意味を説明しよう．最初に利用する周期 2 の対称周期軌道の性質を調べる．この周期軌道を 1/2-BE と書く．1/2 は回転数である．パラメータ a を増大すると $a = 4$ で楕円型不動点 Q が周期倍分岐を起こして 1/2-BE が生じる．1/2-BE の係数 $r_2(a)$ を図 12 に示す．これより，係数 $r_2(a)$ のパラメータ a 依存性は U 字形を示すことがわかる．この周期軌道は最初に二重周期倍分岐を起こし，次に同周期分岐を起こす．二重周期倍分岐の臨界値は $a_c^{\text{dp}} = 5.073117$ で，同周期分岐の臨界値は $a = a_c^{\text{ep}} = 2\pi$ である．

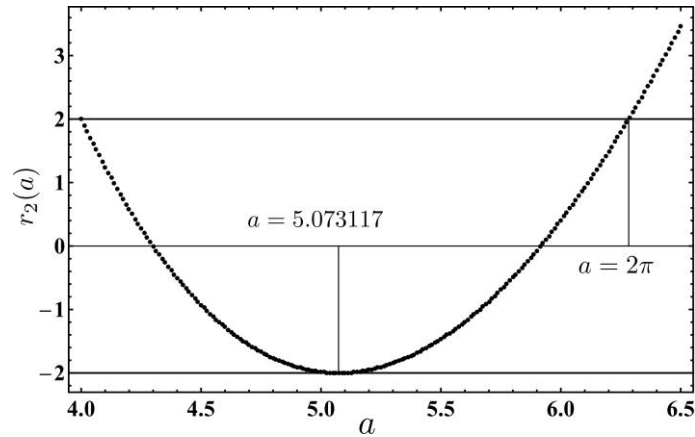


図 12: 係数 $r_2(a)$ の a 依存性.

二つの臨界値 a_c^{dp} と a_c^{ep} を導く．周期 2 の周期軌道点の位置を $x_0 = \pi + \delta$ と $x_1 = \pi - \delta$ と書く ($0 < \delta < \pi$)．周期 2 の周期軌道点の不動点 Q に関する 180 度回転対称性を利用した．係数 $r_2(a)$ を求める．

$$r_2(a) = (2 - a \cos \delta)^2 - 2 \geq -2. \quad (30)$$

ここで $a = 4$ で， $\delta = 0$ であることに注意する．つまり， $r_2(4) = 2$ である．パラメータ a を 4 より増加すると，係数 $r_2(a)$ は +2 より -2 まで減少し次に増加する．

二重周期倍分岐が生じる場合は， $r_2(a) = -2$ が成り立つから $a \cos \delta = 2$ が得られる．対称線 $y = -(a/2) \sin x$ と $y = 2(x - \pi)$ の交点に周期 2 の周期軌道点があることより

$$4\delta = a \sin \delta \quad (31)$$

が得られる．以上で得られた二つの関係式から δ を消去すると臨界値 a_c^{dp} を決める式が求まる．

$$a \cos(\sqrt{a^2 - 4}/4) = 2. \quad (32)$$

数値計算で式(32)の解を求めて臨界値 a_c^{dp} が決まる．同周期分岐が生じる条件は $r_2(a) = 2$ であるから $\delta = \pi/2$ が得られる．式(31)より，臨界値 $a_c^{\text{ep}} = 2\pi$ が求まる．

5.2. 二重周期倍分岐で生じた一重対称周期軌道

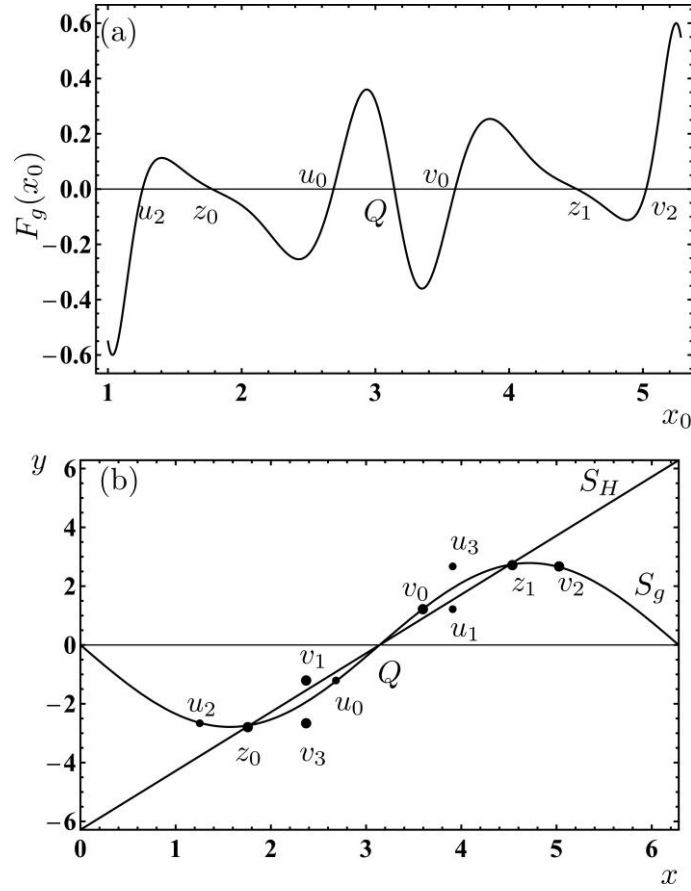


図 13: 二重周期倍分岐の後、生じた軌道は楕円型周期軌道. $a = a_c^{\text{dp}} + 0.5$.

二重周期倍分岐後における、生じた周期軌道点を紹介する．対称線 S_g 上にある点 $z_0 = (x_0, y_0)$ ($y_0 = -(a/2)\sin x_0$) を二回写像した点 $z_2 = (x_2, y_2)$ が、対称線 $y = -(a/2)\sin x$ 上にあるという条件によって、方程式 $F_g(x_0)$ が下記のように導かれる．

$$F_g(x_0) = \sin x_0 + 2\sin(x + (a/2)\sin x_0) + \sin(x_0 + a\sin x_0 + a\sin(x_0 + (a/2)\sin x_0)). \quad (33)$$

図 13(a) に、 $F_g(x_0) = 0$ を満たす解を示した．解には不動点 Q 、1/2-BE の周期軌道点 (z_0, z_1) と、周期 4 の周期軌道点 (u_0, u_2, v_0, v_2) がある．1/2-BE の周期軌道点 z_0 より u_0 と u_2 が生じる．これらは対称線 S_g 上にある．周期軌道点 z_1 より生じた u_1 と u_3 は S_g 上にはないが、 $u_3 = gu_1$ を満たす．同様に 1/2-BE の周期軌道点 z_1 より v_0 と v_2 が生じる．これらは対称線 S_g 上にある．周期軌道点 z_0 より生じた v_1 と v_3 は S_g 上にはないが、 $v_3 = gv_1$ を満たす．周期軌道点 z_0 に視点を置くと、周りに四点 u_0, u_2, v_1, v_3 が見える (図 13 (b))．周期軌道点 z_1 の周りにも四点が生じる．周期軌道点 z_0 または z_1 の周りに生じた四点のポアンカレ指数の和は (+4) である．

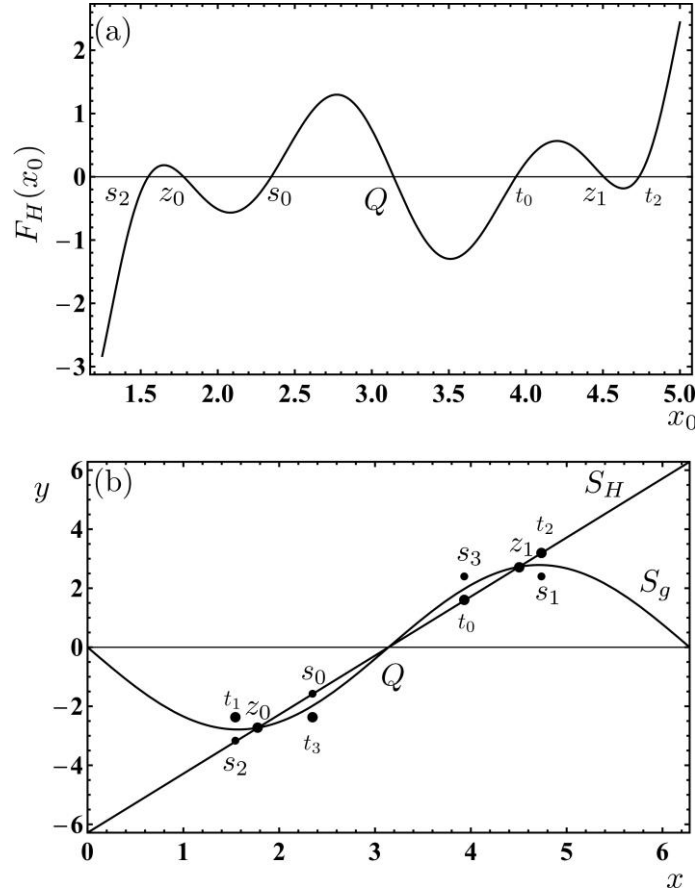


図 14: 二重周期倍分岐の後、生じた軌道はサドル型周期軌道. $a = a_c^{\text{dp}} + 0.5$.

次に、点 $z_0 = (x_0, y_0)$ ($y_0 = 2(x_0 - \pi)$) を二回写像した点 $z_2 = (x_2, y_2)$ が対称線 $y = 2(x - \pi)$ 上にあるという条件によって、方程式 $F_H(x_0)$ が下記のように導かれる。

$$F_H(x_0) \equiv 8\pi - a \sin(3x_0 + a \sin x_0) - 3a \sin x_0 - 8x_0. \quad (34)$$

図 14(a) に、 $F_H(x_0) = 0$ を満たす解を示した。解には不動点 Q 、1/2-BE の周期軌道点 (z_0, z_1) と周期 4 の周期軌道点 (s_0, s_2, t_0, t_2) がある。

図 14(b) を説明する。1/2-BE の周期軌道点 z_0 より s_0 と s_2 が生じる。これらは対称線 S_H 上にある。周期軌道点 z_1 より生じた s_1 と s_3 は S_H 上にはないが、 $s_3 = Hs_1$ を満たす。同様に周期軌道点 z_1 より t_0 と t_2 が生じる。これらは対称線 S_H 上にある。周期軌道点 z_0 より生じた t_1 と t_3 は S_H 上にはないが、 $t_3 = Ht_1$ を満たす。これらは全てサドル型周期軌道点である。周期軌道点 z_0 または z_1 の周りに生じた四点のポアンカレ指数の和は (-4) である。

まとめると、周期軌道点 z_0 の周りには楕円型周期軌道点が 4 個生じ、かつサドル型周期軌道点が 4 個生じる。これらのポアンカレ指数の和は $(+4) + (-4) = (0)$ となる。周期軌道点 z_0 と z_1 は二重周期倍分岐の前後で安定性は変化しないことが確認された。

5.3. 同周期分岐で生じた一重対称周期軌道

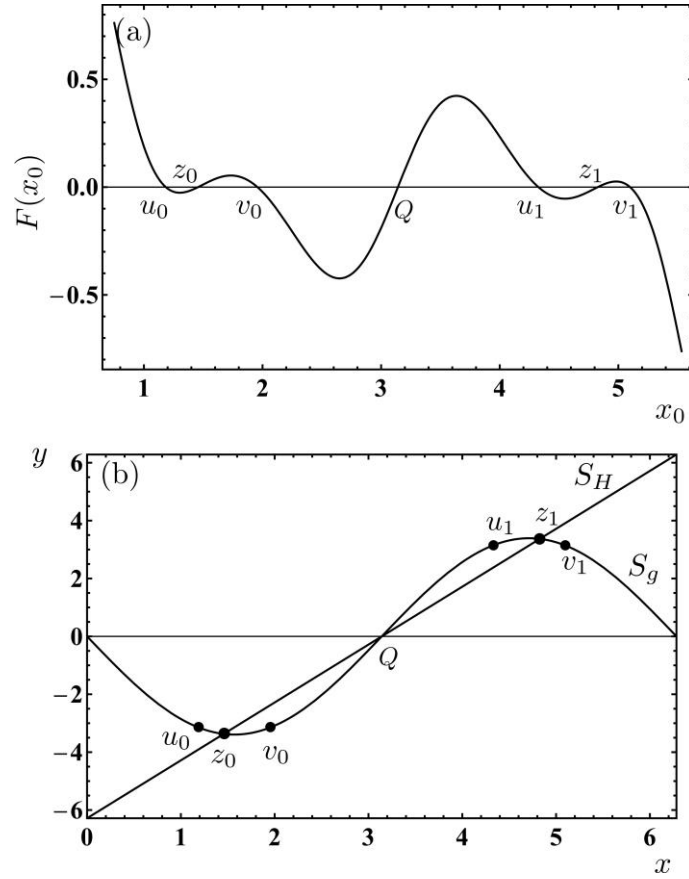


図 15: (a) 関数 $F(x_0)$ のグラフ. (b) 二重対称周期軌道点 z_0 が同周期分岐を起こし, 周期軌道点 z_0 より u_0 と v_0 が生じる. 同時に, 周期軌道点 z_1 より u_1 と v_1 が生じる. $a = 2\pi + 0.5$.

同周期分岐で生じた周期軌道点について調べる. 点 $z_0 = (x_0, y_0)$ ($y_0 = -(a/2)\sin x_0$)を一回写像した 点 $z_1 = (x_1, y_1)$ が対称線 $y = -(a/2)\sin x$ 上にあるという条件によって, 周期 2 の周期軌道点を決定する方程式 $F(x_0) = 0$ が下記のように導かれる.

$$F(x_0) \equiv \sin x_0 + \sin(x_0 + (a/2)\sin x_0). \quad (35)$$

関数 $F(x_0)$ のグラフ (図 15(a)) をもとに生じた分岐の説明をしよう. 関数 $F(x_0)$ も不動点 Q を中心として180度回転対称である. 点 z_0 と点 z_1 が1/2-BEの周期軌道点である. 1/2-BEは $a = 2\pi$ で同周期分岐を起こし, 周期軌道点 z_0 より点 u_0 と v_0 が生じ, z_1 より点 u_1 と v_1 が生じる. ここで $u_1 = Tu_0$ で, $u_0 = Tu_1 = T^2u_0$ である (図 15(b)). 同様に $v_0 = T^2v_1$. これらが生じた直後は楕円型周期軌道である. 周期軌道点が対称線 S_g 上にあることから一重対称周期軌道である. 分岐を起こした周期軌道点 z_0 と z_1 はサドル型周期軌道点となる.

5.4. サドルノード分岐で生じた二重対称周期軌道

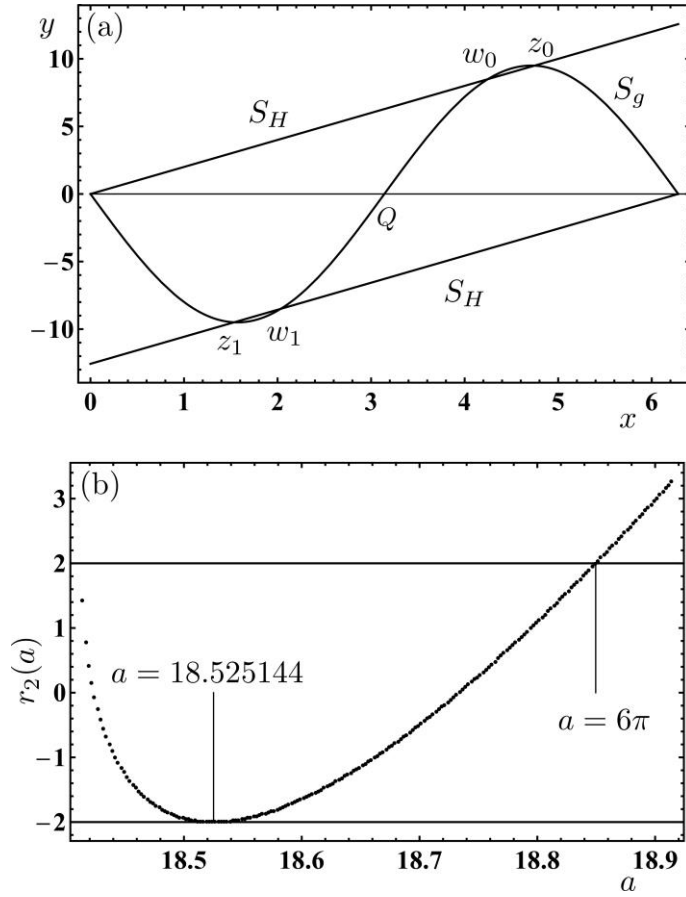


図 16: (a) サドルノード分岐で生じた周期 2 の対称周期軌道点. 周期軌道点 z_0 と z_1 は生じた直後は楕円型. 周期軌道点 w_0 と w_1 はサドル型. $a = 19$. (b) 楕円型二重対称周期軌道 (z_0, z_1) の係数 $r_2(a)$ の a 依存性.

サドルノード分岐で生じた楕円型二重対称周期軌道の二重周期倍分岐を紹介する. パラメータ a を大きくすると, 対称線 S_H の一つである $y = 2x$ と対称線 S_g が接触し交差する. サドルノード分岐の臨界値は $a_c^{\text{sn}} = 18.413355$. 二重周期倍分岐が生じる値は $a_c^{\text{dp}} = 18.525144$ で, 同周期分岐が生じる値は $a_c^{\text{ep}} = 6\pi$ である. 臨界値 a_c^{dp} の求め方について説明する. 式(31)の代わりに

$$4(\pi + \delta) = a \sin \delta \quad (36)$$

が成り立つ. これと $a \cos \delta = 2$ より, a_c^{dp} を決める式が得られる.

$$\sqrt{a^2 - 4} = -a \sin(\sqrt{a^2 - 4}/4). \quad (37)$$

これを数値計算で解いて臨界値 a_c^{dp} が決まる. 第 5.1 節で述べたように同周期分岐が生じる条件は $r_2(a) = 2$ である. これより, $\delta = \pi/2$ が得られ, 式(36)より $a_c^{\text{ep}} = 6\pi$ が求まる.

図 16(a) に, サドルノード分岐で生じた楕円型二重対称周期軌道点 z_0 と z_1 , ならびにサドル型二重対称周期軌道点 w_0 と w_1 を描いた. 図 16(b) に楕円型二重対称周期軌道の係数 $r_2(a)$ を示した. これが U 字形をしていることから, 楕円型二重対称周期軌道は最初に二重周期倍分岐を起こし, 次に同周期分岐を起こすことが理解できるであろう.

6. 結語

本論文で得られた結果をまとめ、今後の課題を述べる.

- (1) 一重対称周期軌道の周期倍分岐と同周期分岐に関する性質を定理 3.1 として与えた.
- (2) 二重対称周期軌道の性質を理解するために、偶数周期 q の写像を左対合, 恒等写像, 右対合に分解し二重対称周期軌道の特徴付けを行った. これらの内容を定理 4.3 としてまとめた. 恒等写像を満たす点が不動点でなければ, この点は二重対称周期軌道の周期軌道点であることを証明した. 周期 q の写像を三つの作用に分解できることが二重対称周期軌道の特徴であることを示した. 周期 q の写像を三つの作用への分解は, バーコフの対合表現の拡張であることも強調しておきたい.
- (3) 本論文ではポアンカレ指数を利用して, 楕円型二重対称周期軌道の二重周期倍分岐の性質を明らかにし定理 4.9 を得た. 定理 4.9 の数値計算による確認も行った. 従来「変則的な分岐」と呼ばれていた分岐現象を明らかにした. 二重周期倍分岐は回転数 $1/2$ の回転分岐と名付けることも可能である.
- (4) 二重対称周期軌道から非対称周期軌道が生じないこと (定理 4.9) と, 一重対称周期軌道から非対称周期軌道が生じる可能性があること (命題 4.10) を示した.

筆者らは, 2004 年にハーパー (Harper) 写像の周期軌道を分類した論文を発表した [12]. この写像には 二つのパラメータ a と b が含まれる. 特に $a = \pm b$ を満たす場合, ハーパー写像は四重可逆写像となる. この写像には, 一重対称周期軌道, 二重対称周期軌道ならびに四重対称周期軌道が存在する. 一重対称周期軌道と二重対称周期軌道の理解のために本論文で得られた結果が利用できる. 四重対称周期軌道に関する対合表現の代数構造と分岐構造については今後の検討課題としたい.

謝辞. 査読者から貴重なコメントをいただいたことに感謝いたします.

参考文献

- [1] De Vogelaere, R., On the structure of symmetric periodic solutions of conservative systems, with applications, Contributions to the theory of nonlinear oscillations, Vol. IV, Ann. Math. Studies, 41, 53-84. (Princeton University Press, 1958).
- [2] Devaney, R. L., Reversible diffeomorphisms and flows, Trans. Amer. Math. Soc. 218 (1976), 89-113.
https://www.jstor.org/stable/1997429?seq=1#page_scan_tab_contents
- [3] Roberts, J. A. G., and Quispel, G. R. W., Chaos and time-reversal symmetry. Order and chaos in reversible dynamical systems, Phys. Rep. 216 (1992), 63-177. 可逆性に関する総説.
<https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/037015739290163T>
- [4] Lamb, J. S. W., and Quispel, G. R. W., Reversing k -symmetries in dynamical systems, Physica D. 73 (1994), 277-304.
https://pure.uva.nl/ws/files/2993837/603_5385y.pdf

- [5] Lamb, J. S. W, and Roberts, J. A. G., Time-reversal symmetry in dynamical systems: a survey, *Physica D*. 112 (1998), 1-39.
<http://web.maths.unsw.edu.au/~jagr/LR98.pdf>
- [6] 山口喜博, 谷川清隆, 馬蹄への道 (共立出版, 2016).
- [7] MacKay, R. S., *Renormalisation in area-preserving maps*, (World Scientific, 1993). 対称周期軌道の説明は第 1.1.4 節にある.
- [8] 山口喜博, 谷川清隆, 標準写像におけるファーレイ型非バーコフ周期軌道と不安定ゾーン. 国立天文台報, 第 13 巻 (2010), 45-84.
<https://www.nao.ac.jp/contents/about-naoj/reports/report-naoj/13-34-2.pdf>
- [9] Birkhoff, G. D., *Dynamical systems*. American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol.9. (AMS, 1966). Revised edition.
<https://archive.org/details/dynamicalsystems00birk/page/n7>
- [10] Lefschetz, S., *Differential equations: Geometric theory*, (Dover, 1977). IX. § 4. Appendix II.
- [11] ソフトウェア StdMap 4.5 は, 下記のホームページよりダウンロード可能. Mac OS 専用.
<http://amath.colorado.edu/faculty/jdm/stdmap.html>
- [12] Yamaguchi, Y., and Tanikawa, T., Periodic orbits in the quadruply reversible non-twist Harper map, *Prog. Theor. Phys.* 111 (2004), 757-762.
<https://doi.org/10.1143/PTP.111.757>

第86回 形の科学シンポジウム 「形と人間」

討論記録 (討論記録のあるもののみ掲載)

【主催】形の科学会

【共催】千葉大学統合情報センター (科研費研究集会・対象依存型データ解析による高次多次元画像の理解と認識); 文部科学省科学研究費補助金 新学術領域研究「医用画像に基づく計算解剖学の多元化と高度知能化診断・治療への展開」(代表 九州大学 橋爪誠)

【会期】2018年 11月 28日(水), 29日(木), 30日(金)

【会場】千葉大学アカデミック・リンク・センター1階:「ひかりえ」,「プレゼンテーションスペース」,「展示スペース」

【代表世話人】井宮 淳 〒263-8522 千葉県千葉市弥生町 1-33

c/o: 千葉大学 統合情報センター ; E-mail: imiya@faculty.chiba-u.jp

【参加費】 会員・非会員ともに一般 5,000 円、学生 1,000 円

【懇親会】 2018年 11月 29日(木) 18:00 より (樺会館 1階 レストランコルサ)

【懇親会費】 一般 4,000 円、学生 1,000 円

討論記録は質問者の討論記録シートの記載にもとづいており、講演者の校正がないものもあります。

Q: 質問、A: 回答、C: コメント

討論記録

11月 28日 (水)

公開講座

昆虫の色とシャボン玉

吉岡伸也 (東京理科大学)

Q. 松岡篤

カワセミの発色の原因となっているスポンジ状の構造のところでアモルファスという表現があったが、どういう意味なのか。

A.

実体部と空間部の配列に規則性がないということをアモルファスと表現している。

招待講演・公開講座 (形と人間)

超音波によるマルチスケールでの生体組織性状評価

山口匡 (千葉大学)

Q1. 金澤洋隆

超音波において出力される画像の鮮明さは術者の特技に依存することが臨床では問題である。今日のお話では超音波のプロブのあて方によって波の干渉が起こることがこの問題の原因の1つであると考えられるが、この干渉を数理的に補正することで出力される画像を術者に依存しない形で鮮明にすることは可能か。

A1.

数理的に補正する技術は導入されている。これを用いる事で評価値の補正を行っている。ただし、目視での評価なら補正が有効であったり許容されるが、定量診断を行う上では、補正することで「作られた画像」を提示することは好ましくないと考えている。その点から画像を補正するより「きちんと映っていない」ことを評価して提示の方が良いし、そのようなスタンスを私は取っている。

Q2.

肝細胞は正常では静脈優位の癌化が進むと動脈優位の血液供給を受ける。超音波で動静脈を区別することで癌化を評価することは可能か。

A2.

動静脈を区別することは可能である。また、マイクロバブルを用いて、それを細胞が取り込む率を考慮することで癌化などを評価することができる。加えて血液の力場を考えることで評価することも可能であり、その主題は最近の私の研究テーマでもある。

Q. 井宮淳

超音波による生体計測の限界は何か？

A.

1GHz まで超音波の周波数を上げることが可能であるが、薄いものしか映像化できなくなる。薄くなると対象の表面付近しか振動しないため、内部の情報を計測することが不可能で

ある。実際に、1GHz で単体の細胞を計測している例はある。

形の科学一般

くしゃくしゃの紙の数理

三浦公亮 (宇宙科学研究所、東京大学・名誉教授)

Q. 松本崧生

Fig.5. Miura-ori について。正確に p2mg ではないように見えます。完全な miuraori でなく、pseudo-miuraori のようですが、御教示ください。

A.

立体なので、斜めから見た写真では、p2mg ではありませんね。しかし、真上 (無限遠) からだと、折り目の角度によらず、常に p2mg です。

Q. 高木隆司

くしゃくしゃの折り目を見ると、1 頂点から奇数個の折り目が出てるように見えるところがある。そこで、折った時の小領域が曲面になっている場合、奇数個の折り目が 1 点に集まることが起き得るか。

A.

平坦折り紙(折った状態で平面状に押し付けることができる)でなければ起き得る。Maekawa の定理は成立せず、Gauss の曲率はゼロを保ちます。

Q. 手嶋吉法

等高線の図が変化して行く様子が示されていたが、実験あるいは計算機実験に基づくものか。

A.

薄板の微分方程式を用い、宙に浮いたあるいは弾性的にサポートされた限りなく薄い板の計算機実験です。因みに、今世紀になって、ゼラチンの層のうえに薄い皮膜を生成し、実験的に証明された(Mhadevan and Rica)。

学習段階に対応した科学折り紙の利用法

石原正三 (埼玉県立大)

Q. 松本崧生

御苦勞な教育論関心拝聴しました。次元問題如何に教えてもらえるか御教示下さい。

A.

保健医療福祉学部の教養科目として授業を担当しています。ここで取り上げた「数理科学」の授業では、物理量の次元に関する説明は行っていません。

Q. 手嶋吉法

年代を 5 段階にわけて、それぞれに科学折り紙の題材を与えていたが、それらはどのように割り当てていたのか。題材の難易によってか、折り方の難易によってか、それ以外か。

A.

これまでに実施してきた授業や公開講座での経験に基づいています。小学生では折り紙の色に関心があり、30 色程度の折り紙を自由に選択させると、いつまでも色を選んでいきます。

中学生は色よりも立体の形状に関心が向くようで、色々な多面体を組み合わせて作品を作ってもらくと、色々と工夫してくれます。このため、中学生と高校1年生はグループでアイデアを出し合いながら作品制作するようにしています。高校2年生以上では、三角関数の計算ができるようになってるので、ユニット折り紙を設計して個性的な立体を制作してもらっています。

カプトムシの角と折りたたみ可能な三角柱

佐藤郁郎（宮城県立がんセンター）、中川宏（積み木インテリアギャラリー）、山口康之（東京理科大学）、秋山仁（東京理科大学）

Q1. 手嶋吉法

液晶ディスプレイの制御に Boerdijk-Coxeter helix (BCH) が用いられるとのことだったが、この構造を用いる利点は何か。（フィボナッチ的に液晶分子の角度を変えるなど、他の構造でもできそうだが、BCH が適する理由）

A1.

液晶ディスプレイに用いられる液晶分子は1種類で、分子間の角度は電極を用いて自由にかつ迅速に調整することができます。もし、液晶分子が 180° くらい回転することにより光の透過性を調節するという仕組みならば迅速な on/off は失われてしまいますが、わずかなねじれによって迅速に透過性をコントロールできるというのが液晶ディスプレイの原理であり、この構造が適している所以です。

Q2.

Hurley の方程式を解けばねじれ角が簡単に求まるとのことだが、BCH の構造をどのようにして Hurley の方程式として書き下すのかについては、本日の講演では省略されたという理解で良いか。

A2.

ねじれ角の計算は最も簡単な BCH の場合であっても Hurley の方程式なしでは結構骨の折れる作業です。

Hurley は多分化学者だと思うのですが、実に数学に堪能な方です。彼のアイデアはどちらかというと代数的なものであって、幾何学的に簡単に説明できるような代物ではありません。ここでは割愛せざるを得ないのですが、興味をお持ちの方は参考文献にある論文にあたってくださいのがよいと思います。

ホモメトリック構造－3

松本崧生（金沢大学・名誉教授）

Q. 手嶋吉法

今回は $n=16$ かつ $r=8$ のホモメトリック構造について新しい性質を乱されたと理解した。他の n, r においても、それぞれ面白い性質があるのか、あるいは、特別の n, r の場合に限られるのか。

A.

ホモメトリック構造は、Pauling & M. D. Shappell (Th-7-Ia3, 24d; x, x two non-congruent structures) (1930)、L. Pauling (Oh-10-Ia3d) (1939) 等によって 1930 年代から採り上げられた古典的かつ基礎的問題であり、再検討を行う。

フリーデルの法則を仮定すれば、X 線回折強度 $|F|^2$ の分布は結晶内原子間ベクトル集合のフーリエ変換で与えられる。従って、回折対称は原子配列の対称そのものでなく、原子間ベクトル集合の対称と対応する。

一次元の周期構造を円周上の点配列で表現しよう。原子間ベクトルの大きさは、円弧の長さであるが、その弦でおきかえてもよい。円に内接する正 n 角形の頂点のどこかに r 個の同種原子を配置するおき方を考察する。ただし、合同又は対掌体になる組はすべて計 1 通りと数える。A. L. Patterson (1944) は、 $n \leq 16, 4 \leq r \leq n/2$ についてのおき方を全部調べた。1 次元の周期構造として、円に内接する正 n 角形の頂点のどこかに r 個の同種原子を配列し、 (n, r) に異種原子をおき、ホモメトリック構造を検討する。 r と (n, r) とが異なれば多くの点検となり、同数であれば、最小の点検ですむ。例えば、 $n=16, r=(n, r)=8$ は、最小の点検で済む。

Voronoi ランダム充填と Delaunay ランダム充填

種村正美（統計数理研究所・名誉教授）

Q. 平田隆幸

充填密度への境界の影響はどうなっているか。

A.

除いている。

Q. 本多久夫

実際の生活での考えられるどんな分割をイメージすると良いか。

Voronoi ランダム充填: 領域の面積をどれもが均等に?

Delaunay ランダム充填: 隣人からの影響が少なくなるように?

A.

Voronoi ランダム充填については森林中の樹木の分布において、樹木個体が生存のために最小の面積を確保する例として以前に述べたことがある。

Delaunay ランダム充填については、一次元の場合はランダム駐車問題と同じである。

Q. 手嶋吉法

今回は、正方形という境界を有する条件下での計算。正方形を引き延ばしてトーラス状の周期境界条件にすると、計算結果は変わるのか。

A.

正方形の境界がある条件下で行った計算では、境界の影響を受けるものは除去してあるのは最初の質問に対する回答の通り。

周期境界条件では除去しないことになるが、計算結果はあまり変わらないと思われる。正方形の1辺を大きくするとほとんど変わらない。

不変曲線の崩壊

山口喜博（元帝京平成大学）

11月29日（木）

形と人間

人体における管構造の最適形態について

金澤洋隆（京都府立医科大学）、茂田昌樹（京都府立医科大学）

Q. 本多久夫

多発性嚢胞腎の中心で丸くみえるのは、袋(丸い)なのか筒なのか。

A.

筒の異常で膨らんだものが胞になっている。

C. 高木隆司

重要な問題を扱っているという印象を受けた。ただし、形態を表現する用語、数式の提示の仕方などですぐには理解できないところがあると感じた。今後、理学系の研究所と議論するのが良いと思う。

Q. 前畑謙次

三次元的(構造)判定を受ける。とは?

多次元的 Torsion の意味をもう少し詳しく説明してください。

A.

管は人体内(3次元)に存在する。

Q. 高田宗樹

管表面積は一定とみなせるのか。

管が閉じているので $\int k ds = 0$ と見てよい?

異形と判別するとすると $\int |k| ds$ でいいのではないか。

A.

3種類の管があり、そのうち1つは確認できている。

形の科学一般

セント・ヘレナ島黎明期

杉本剛（神奈川大学）

Q. 高田宗樹

構成された地図の形から、文化的な交流は考察できないのか。

A.
交流というよりは、情報を盗む時代であった。鳥瞰図の挿入などの特殊要素から考察はできる。

ジュラ・白亜系境界の GSSP と放散虫の系統進化：イタリア中部の Bosso Valley section における検討

松岡篤（新潟大学）、LI Xin（Nanjing Institute of Geology and Palaeontology, CAS）、CHIARI Marco（Institute of Geosciences and Earth Resources, CNR）、BERTINELLI Angela（University of Perugia）

Q. 荏原小百合

ジュラ、白亜系というのはあくまで人間が決めた境界ですが、地質の化学分析によって、境界確定は行なっていないのか。地質から出てくる化石のみによって境界確定は進められているのか。両方（地質の化学分析とあわせて）で行うことはないのでしょ

A.
人間が決めたものだが、150 年以上の研究の歴史があり、化石に基づく検討が継続されている。これまで、ヨーロッパを中心に化石に基づいて境界確定の作業が行われている。

形と人間

史上最年少プロ棋士藤井聡太のレーティング評価と問題点
高津和紀（福井大学）、高田宗樹（福井大学大学院）、平田隆幸（福井大学大学院）

Q1. 金澤洋隆

月別平均悪手(技巧)グラフの解釈の妥当性について。

A1.
藤井聡太の夏の平均悪手が大きくなることについては、暑さからくる集中力の低下や、試験や課題に追われ将棋の勉強時間が減少したことが原因であると考え

Q2.
平均悪手と平均一致率に相関関係はあるのか。

A2.
将棋 AI が悪手と評価したプレーヤーの指し手は、将棋 AI の示す候補手と一致しない。そのため、平均悪手と平均一致率に相関があると考える。しかし、平均悪手のピークと平均一致率のピークは月がずれているという事実もあり、強い相関はないと考える。

精細度が異なる映像が体平衡系に及ぼす影響に関する研究
山本将太（福井大学大学院）、高田宗樹（同）、篠野雄介（同）、高田真澄（中部学院大学）

Q1. 太田溪介

被験者が男女になった時の性差

A1.
先行研究からみられないと考える。

Q2.
実験中、セット間での疲労の効果
・映像を見せない時の時間経過による疲労による値のバックグラウンドを除去する
・底→高の順のセットを行うとどうなることが期待されるのか

A2.
結果から見る限り、疲労の効果はないと考えられる。

Q. 高木隆司

最初に見た高精細と低精細の画像はほとんど差がないように見えた。そのために、結果に大きな差がない可能性がある。高精細画像は私個人では見ていると疲れる。それが実験結果に影響する可能性があるか。

A.
スライドの映像では差がないが、実際には大きな差がある。確かに、高精細にはそのような傾向がある。この点は今後検討する。

仮想現実感を利用した MCI 予防手法とその生体評価

平山洪介（福井大学大学院）、田原博史（株式会社視空間工房）、伊藤菊男（株式会社ニューロスカイ）、谷村亨（福井大学大学院）、平田隆幸（福井大学大学院）、高田宗樹（福井大学大学院）

複数の立体を折れる展開図について

上原隆平（北陸先端大）

Q. 井宮淳

3 次元を折って、4 次元物体を構成する展開図はどうなるのか。

A.
それは可能であるが、発表者は対象としていないが、難しい問題である。

C. 宮崎興二

2 次元の展開図計算は計算機による数え上げに負けるかもしれない。しかし、高次元は今の所そうでもない。

Q. 手嶋吉法

デモで見せていただいた立体はどちらも二面角が 90 度となっていたが、その条件下で展開図を探索するという問題設定か。

A.
探索アルゴリズムでは、2 面角は情報として利用していない。つまりそれは特に探索の条件ではない。同じアルゴリズムで他の立体を探索する場合は 2 面角が 90 度以外の角度にもなりうる。

形と知

ダヴィンチと寺田寅彦—形の科学のキーパーソン

高木隆司（東京農工大学・名誉教授）

C. 宮崎興二

形の科学会の英名は Society for Science of Form が適当という意見を異国人から聞いた覚えがあり、本日のお話でもそのようになっていたのが印象に残りました。

A.
学会設立当時に「on」という言葉を使ったのは、形そのものを研究するだけでなく、形の研究にもとづいて(based on)必ずしも形に限らない新しい概念を構築するという気持ちがあったように思います。しかし、そのような方向の発展があったかどうか、よくわかりません。

私自身は、「Science of f o r m」で良いと思います。将来、研究体制や研究対象に大きな変化が出たときに、学会名の変更を考えてもよいでしょう。

可変双曲型メタマテリアルによる符号変化問題のモデル化

楠見蛭（東京学芸大学）、太田溪介（同）、小林晋平（同）

Q. 宮崎興二

結論として 4 次元球面が 4 次元つづみ形に変わると考えてよろしいか。

今後、 $x^2 + y^2 - z^2 - u^2 = 1$ （つづみ形がつづみ形に沿って動く）についても考えられてはいかがですか。

A.
<回答の記載なし>

水面波に対して負の屈折率を示すメタマテリアルの作製

渡邊慧（東京学芸大学）、太田溪介（同）、楠見蛭（同）、小林晋平（同）

形の科学一般

高空隙率ダスト凝集体の衝突によるクレーター形成と破壊

桂木洋光（名古屋大学大学院）、Jürgen Blum（TU Braunschweig）

Q. 手嶋吉法

充填率 0.35 はかなり低い、どのような充填構造となっているか。

A.
凝集体の構成粒子のサイズが小さいため付着力によるネットワークが構成されており、大きなボイドが（ただし一様に）

内部に存在している。

アニメ・特撮等のキャラクターのサイズ分布について
山本健（琉球大学）

Q. 桂木洋光

体重を身長で割った線密度などの密度データは(ガウス分布になるなどの)特性を示さないか？

A.

密度については一定とならずキャラクターによって大きく変化する。(風船のようなキャラクターもある)。BMI 値の分布はべきのテイルを示すようでもある。

Q. 松岡篤

キャラクターには、特撮に登場する実体のあるものと、ポケモンに代表されるアニメにのみ表現されているものがある。検討結果について、両者で違いはあるか。

A.

アニメはポケモンだけであり、現段階では比較するにはデータが少ない。

漢字における線長と画数のべき乗則

太田守洋（琉球大学）、山本健（同）

C. 高木隆司

漢字の楷書体フラクタル次元が 2 に近い値になったのは、字体を決めるとき、平面を均一に埋めようとする傾向があるからだと思う。一方、隷書体では、もっと小さな値になるだろうと思う。

Q. 桂木洋光

フラクタル次元が 2 であれば、面積と周長の関係でもチェックできるのではないか。

A.

アウトラインの解析がそれに相当するので、今後調べ続ける。アウトラインは線長をほぼ 2 倍したものであり、線長は面積を線幅で割ったものであるので、アウトラインと面積はほぼ比例関係であると思われるが、現在解析中である。

特別講演（功労賞受賞記念講演）

カタチとチカラ、その適合を追及する

— 建築構造の世界における例 —

川口衛（法政大学・名誉教授）

11 月 30 日（金）

形と人間

組織切片の伸展性応答による病態に依存したひび割れパターン形成

大社奈摘（同志社大学）、池川雅哉（同）、剣持貴弘（同）、吉川研一（同）

Q. 平田隆幸

検査に必要な時間は？

A.

組織切片を薄切して接着させ染色をするという操作は従来の病理診断方法と同様の操作手順で行っております。また、張力印加は装置にセットするだけで簡単にできますので時間は数分ほどで可能です。そういった点から、手術中の迅速診断にも用いることができると考えております。

Q. 手嶋吉法

細胞の接着力が強いと直線的にひび割れるという考察がよく理解できないので、補足説明をお願いしたい。

A.

細胞間の接着力がある Control 組織では張力が印加されることで、組織切片が無理矢理引っ張られ、微小循環に沿った直線的なひび割れが発生します。一方、HCC では癌化に伴い細胞間の接着力が低下するため、微小循環に沿ったひび割れに加え、細胞間のあらゆるところからひび割れが生じ、細胞間で細かなひび割れが発生すると考えております。

初期心臓におけるキラリティーの出現

本多久夫（神戸大学大学院、理化学研究所）、阿部高也

（理化学研究所）、藤森俊彦（基礎生物学研究所、理化学研究所）

Q. 手嶋吉法

管の表面の細胞シートは何層か。その立体的な構造を厚さの無いシートで近似しているという理解で良いか。

A.

そうです。

初期心臓の表面は心筋細胞が 2 層になって心臓をおおっています。いずれの層の細胞もほぼ多角形で敷詰まっているような記述がされています(Isao Shiraishi et al., Anat Embryol 185, 401-408, 1992)。今回はねじれの巻き方向を説明する目的です。この報告を考慮しながら一層の厚さのない細胞シートとみなして解析を進めました。

招待講演・公開講演（形と人間）

臓器の統計形状モデルの構築

本谷堅秀（名古屋工業大学）

Q. 羽石秀昭

染色病理標本画像の位置合わせについて、異なる染色像間の再構成像間でずれてないか。

C.

4 種の染色画像 2500 枚を、全て同時に位置合わせしているので大丈夫です。

形と人間

刑事事件における AI による個人識別

小川進（空間技術研究所）

Q. 井宮淳

写真は 2 次元、顔は 3 次元である。2 次元の画像から、3 次元である顔を正しく認識できるのか。

A.

現在、千葉県警ほか、3 次元画像によって顔の情報を鑑定している。

Q. 手嶋吉法

同様のソフトがいろいろあると思うが、このソフトの特徴(長所など)は何か。

A.

Amazon REKOGNITION と IBM の Watson が有力であり、犯罪捜査に米国で実際に使用されているのは、前者である。ほぼ無償で、インターネット登録で使用できる。

サハ共和国の口琴ホームスとヒトの関係性

荻原小百合（北海道科学大学）

Q. 小川進

サハから日本に流れてきた文化としては、何かあるか。

A.

わかりません。

補足ですが、1986 年に北海道札幌市で「ヤクーチャ展」が開催され(当時北海道新聞で報道)、それ以降サハ文化を知る人は少しずつ増えてきました。1991 年にサハ共和国で開催された第 2 回国際口琴大会への日本からの参加者の中には、アイヌ民族の 3 名のムックリ(竹製口琴)演奏家があり、それ以来北海道とサハを行き来する形で音楽交流が続いています。現在日本で、口琴の愛好家やサハとの交流の関係者の中には、サハのホームス(鉄製口琴)を演奏する人が増えています。

Q. 高木隆司

竹の口琴はどのように鳴らしているのか。ひもで引っ張ると音が止まるはずだが。

A.

瞬間的にひもを引き、すぐゆるめて音を持続させる。(実演での回答)

「百聞は一見に如かず」ではない：錯視からわかる人間の知覚情報処理特性

一川 誠（千葉大学大学院）

形と知

高次元正多胞体のかたちの原則

宮崎興二（京都大学・名誉教授）

4 次元正多胞体のリンゴの皮むき展開図について III

海野啓明（元仙台高専）

回転対称型接合部を持つ改良耐震シェルターについて

阿竹克人（株式会社阿竹研究所）、富岡万輝（株式会社カラフルコンテナ）、四方田彩花（名城大学）、武藤厚（名城大学）

Q. 宮崎興二

メロシステムを超えるジョイントを考えておられるのでしょうか。

A.

その通りです。（メロシステムで出来ることは回転対称型接合部でほぼカバーできます。）