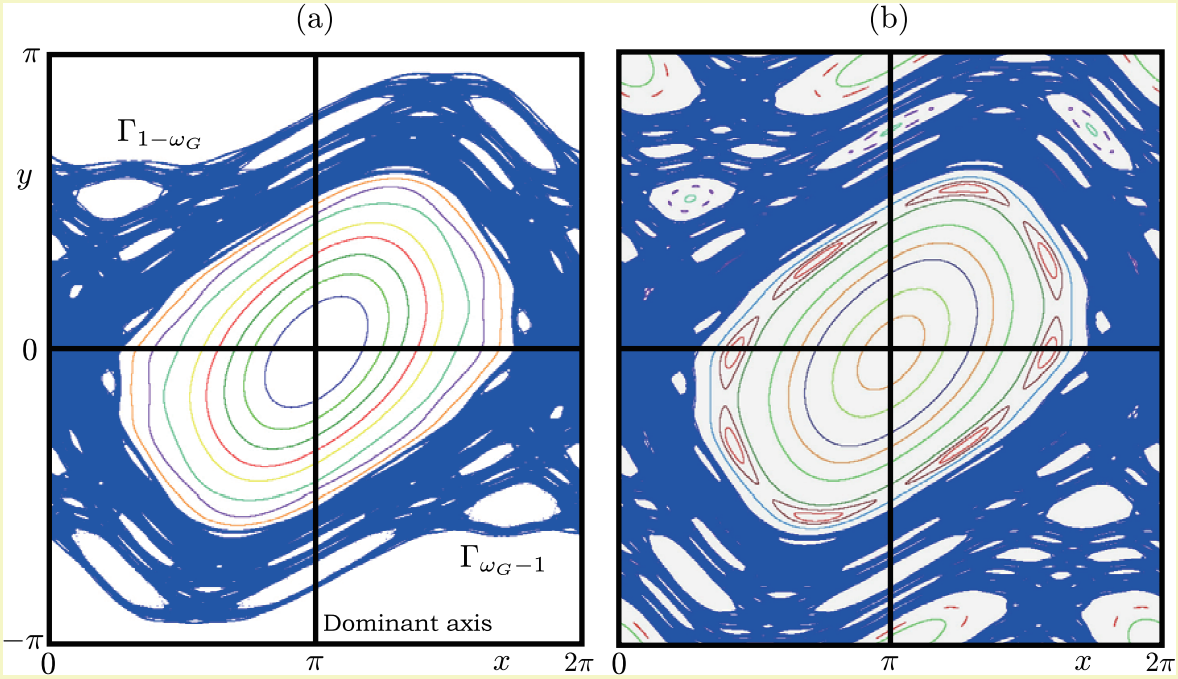
ISSN 0915-6089

形の科学会誌

第 33 巻 第 2 号 2018

Journal of the Society for Science on Form



形の科学会

http://katachi-jp.com/

形の科学会誌 第 33 巻 第 2 号 (2018)

目　次

【論文】
不変曲線が崩壊する臨界値を決定するグリーンの判定法の正当化
山口 喜博 …… 48
【書評】
Ryuji Takaki「Introduction to the Science of Forms」
永田 裕作…… 60
【シンポジウム】
第 85 回 形の科学シンポジウム 「かたちの機能，機能のかたち」
討論記録 …… 62
【会告など】
会告…… 69
原稿募集 …… 71

不変曲線が崩壊する臨界値を決定する グリーンの判定法の正当化

山口喜博
帝京平成大学 〒290-0193 千葉県市原市うるいど南 4-1
(連絡先:〒290-0073 千葉県市原市国分寺台中央 2-4-14)
chaosfractal@iCloud.com

Justification of Greene's criterion to determine the critical value at which the invariant curve is destructed

Yoshihiro Yamaguchi
Teikyo Heisei University

(2018 年 9 月 26 日受付, 2019 年 1 月 10 日受理)

Abstract: In this paper, the breakup of the invariant curve for the standard map T defined in cylinder is studied. The map T is represented by the product of involutions G and H. Let Γ_ω $(=T\Gamma_\omega)$ be the invariant curve on which the orbital points of quasi-periodic orbits with an irrational rotation number ω exist. Furthermore, it satisfies the relation $\Gamma_\omega = G\Gamma_\omega$ named G-invariance. In 1979, J. M. Greene proposed the criterion to determine the critical value $a_c(\omega)$ at which the invariant curve Γ_ω is disintegrated. The invariant curve Γ_ω exists at $a \le a_c(\omega)$ and does not exist at $a > a_c(\omega)$. This is named Greene's criterion. The justification of Greene's criterion was done under the condition that the set of quasi-periodic orbits named Aubry-Mather set is uniformly hyperbolic. The proofs already carried out are not complete as far as there exists the condition for Aubry-Mather set. Even in the present, Greene's criterion is not justified. In this paper, using the geometric method with G-invariance and the properties of periodic orbits accumulating to Γ_ω, we justify Greene's criterion.

Keywords: Standard map, Invariant curve, Quasi-periodic orbit, Greene's criterion, G-invariance

1. 本論文の目的

円筒面 $(0 \le x < 2\pi, -\infty < y < \infty)$で定義された二次元面積保存写像を考える．パラメータが小さく系が可積分系に近い場合，準周期軌道で構成された不変曲線が存在する．パラメータを大きくして系が可積分系から離れるにつれて不変曲線が順次崩壊することが知られている．不変曲線の存在は軌道の閉じ込めに寄与している．しかし，不変曲線が崩壊すると軌道を閉領域に閉じ込められなくなる．軌道の閉じ込めと拡散現象の解明は様々な系に応用できるため，不変曲線の崩壊に関する研究が行われてきた．特に不変曲線の崩壊現

象を調べる場合，不変曲線が崩壊する臨界値の判定法が問題になる．グリーン（Greene）[1]によって提唱された臨界値の判定法（Greene's residue criterion とも言う）は計算しやすいため多くの研究者が利用している．

グリーンの判定法の証明にはくりこみ群による方法がある[2]．しかし，くりこみ群の手法が使えるためにはカントール構造の準周期軌道集合（オーブリー・マザー集合[3, 4, 5]）が一様双曲性をもつという条件が必要である．また，ファルコリニー とデラ・ラーブ(Falcolini and De La Llave)[6]の証明に関しても同様である．そのため，彼らの論文のタイトルは「グリーンの判定法の厳密であるが部分的な正当化」となっている．筆者は，準周期軌道集合の一様双曲性という条件がある限りグリーンの判定法の正当性は証明されていないと考えている．以上のことを踏まえて本論文では，グリーンの判定法の正当性をオーブリー・マザー集合の不安定性を必要としない幾何学的な手法で証明する．

最初に本論文で使用する写像を導入し，不変曲線の崩壊を議論するために必要な概念について説明する．次にグリーンの臨界値の判定法を紹介する．

二次元面積保存写像として円筒面上で定義された標準写像Tを用いる[7, 8]．

$$T:\ y_{n+1} = y_n + a\ \sin x_n\ ,\ \ x_{n+1} = x_n + y_{n+1}\ (\bmod 2\pi). \tag{1}$$

ここで，$a \geq 0$，$0 \leq x < 2\pi$，$-\infty < y < \infty$.

周期軌道について線形解析を行った結果，得られた固有値を$\lambda_{\pm}$とする．これらが複素数の場合，周期軌道は楕円型周期軌道と呼ばれ安定である．固有値が$\lambda_{\pm} = -1$を満たす状況が，周期倍分岐の臨界点である．因みに$\lambda_{\pm} = 1$を満たす状況が，同周期分岐の臨界点である．固有値が$0 < \lambda_{-} < 1 < \lambda_{+}$を満たす場合，周期軌道はサドル型周期軌道と呼ばれ不安定である．また，固有値が$\lambda_{-} < -1 < \lambda_{+} < 0$を満たす場合，周期軌道は反転を伴うサドル型周期軌道と呼ばれ不安定である．以下では，楕円型，サドル型，反転を伴うサドル型と書く．

標準写像Tでは，$a > 0$で不動点$P = (0,0)$はサドル型であり不安定である．次にもうひとつの不動点$Q = (\pi, 0)$について説明する．不動点Qは，$0 < a < 4$では複素固有値をもつ楕円型で安定である．$a = 4$で周期倍分岐を起こし，$a > 4$で反転を伴うサドル型不動点となる．

ここで円筒面を一周する不変曲線について説明する．不変曲線Γは円筒面$0 \leq x < 2\pi$で$y = F(x)$とかける．関数$F(x)$はxに関して一価関数である．つまり不変曲線は円に同相なグラフである．不変曲線上の点をsとする．この像TsもΓ上にある．不変曲線を議論するためには，円筒面の持ち上げである普遍被覆面 $(-\infty < x, y < \infty)$で議論するとわかりやすい．用いる記号を煩雑にしないために，普遍被覆面においても写像と位置表示で円筒面と同じ記法を利用する．式(1)の表式で $\mathrm{mod}(2\pi)$ を外せば，xの定義区間が$-\infty < x < \infty$となるため普遍被覆面における標準写像が得られる．

不変曲線は無限個の点の集合である．不変曲線上に存在している軌道点は 準周期軌道の軌道点である．これらの軌道点が不変曲線を稠密に埋め尽くしている．図 1 に不変曲線の例を示した．準周期軌道の回転数ωは無理数である．これより回転数ωの不変曲線をΓ_{ω}と書く．準周期軌道の存在はコルモゴロフ（Kolmogorov)[9]，アーノルド（Arnold)[10]，モーザー（Moser)[11] によって証明された．得られた結果は三人の名称を利用して KAM 定理と呼ばれる．この定理に関しては参考文献[12, 13]の解説を参考にして欲しい．

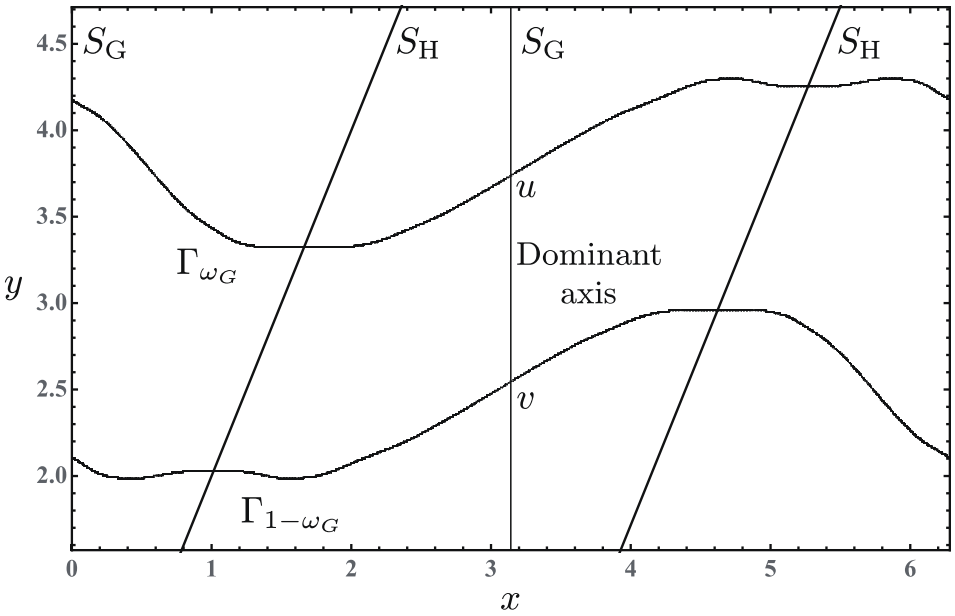


図 1：円筒面上における標準写像の不変曲線の例．$a = 0.97163540631$における，不変曲線Γ_{ω_G}と$\Gamma_{1-\omega_G}$のグラフ（$\omega_G = 0.618033\cdots$）．これらの不変曲線と主軸$x = \pi$との交点が点$u$と点$v$．記号$S_G$と$S_H$は対称線（式(6)を参照）．不変曲線$\Gamma_{\omega_G}$（$\Gamma_{1-\omega_G}$）は，点$u$（$v$）から出発した軌道点の集合として描いた．

これからの議論で必要となる主軸性の概念について紹介する．標準写像において，主軸性の概念を最初に導入したのはグリーンである．標準写像において，$a > 0$ではポアンカレ・バーコフの定理[14]で保証される円筒面を回転する回転数p/qの周期軌道が存在する．回転数p/qは既約分数である．この周期軌道はバーコフの順序保存性を持つ[14]．円筒面を回転する周期軌道には二つの周期軌道が存在し，それらをp/q-BE とp/q-BS と書く．B でバーコフの順序保存性を表現している．E は楕円型（Elliptic）を意味し，S はサドル型（Saddle）を意味する．ただし，固有値が± 1の場合も，反転を伴うサドル型周期軌道もp/q-BE に含める．

グリーンは数値計算で得られた結果をもとに，「p/q-BE は対称線$x = \pi$に軌道点をひとつ持つ」という仮説をおいた．対称線$x = \pi$は主軸（Dominant axis）と呼ばれ，この仮説は主軸仮説と呼ばれるようになった．その後，主軸仮説が正しいことはマッカイとミース（MacKay and Meiss）によって証明された[15]．今日において，標準写像では主軸性が成り立つと表現される．

黄金数を$\phi = (\sqrt{5} + 1)/2$と書く[16, 17]．グリーンは回転数$\omega_G = 1/\phi = 0.618033\cdots$を持つ準周期的運動が構成する不変曲線$\Gamma_{\omega_G}$の安定性を調べた．また回転数$1 - \omega_G = 1/\phi^2 = 0.381966\cdots$の不変曲線$\Gamma_{1-\omega_G}$も不変曲線$\Gamma_{\omega_G}$と同様の性質を持つ．これらの不変曲線は最後の不変曲線と呼ばれている．不変曲線Γ_{ω_G}と$\Gamma_{1-\omega_G}$のグラフを図 1 に描いた．

次にグリーンの行なったことを簡単に紹介する．回転数ω_Gに集積する回転数の列

$$\{p_n/q_n\} = \{1/1, 1/2, 2/3, 3/5, 5/8, 8/13, \cdots\}$$

を用意する．$p_0/q_0 = 1/1$，$p_1/q_1 = 1/2$として，$n \geq 1$において$p_{n+1} = p_n + p_{n-1}$と$q_{n+1} = q_n + q_{n-1}$が成り立つ．つまり，回転数の列を構成するためにフィボナッチ数列を利用している．不変曲線Γ_{ω_G}と主軸の交点uに，p_n/q_n-BE の軌道点が漸近する模式図を図 2 に描いた．

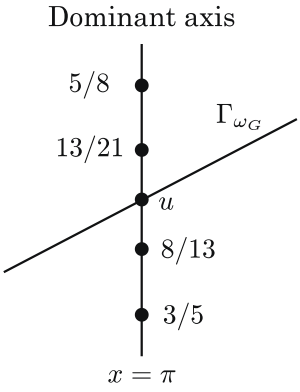


図２：円筒面上における不変曲線Γ_{ω_G}と主軸の交点uに，p_n/q_n-BE の軌道点が漸近する様子の模式図．例として，5/8は5/8-BE の軌道点を表す．主軸の近くの様子．

グリーンは，p_n/q_n-BE が周期倍分岐を起こす臨界値$a_c(p_n/q_n)$を数値計算で求め，臨界値が集積する値$a_c(\omega_G)$を不変曲線が崩壊する臨界値とした．

$$a_c(\omega_G) = \lim_{n\to\infty} a_c(p_n/q_n). \tag{2}$$

臨界値として$a_c(\omega_G) = 0.97163540631$が得られた．$a > a_c(\omega_G)$では回転数$\omega_G$の不変曲線は存在しないとした．結果として，$a > a_c(\omega_G)$では 軌道点は円筒面全体に拡がる．

図３ではいくつかの初期点から出発した軌道点を描いた．図３(a)は最後の不変曲線が崩壊する直前の様子を表す．軌道は上部のある$\Gamma_{1-\omega_G}$と下部にあるΓ_{ω_G-1}が バリアーとなって上部にも下部にも抜けることができない．図３(b)は崩壊した後の様子を表す．最後の不変曲線が崩壊すると軌道は上部にも下部にも抜けられる．

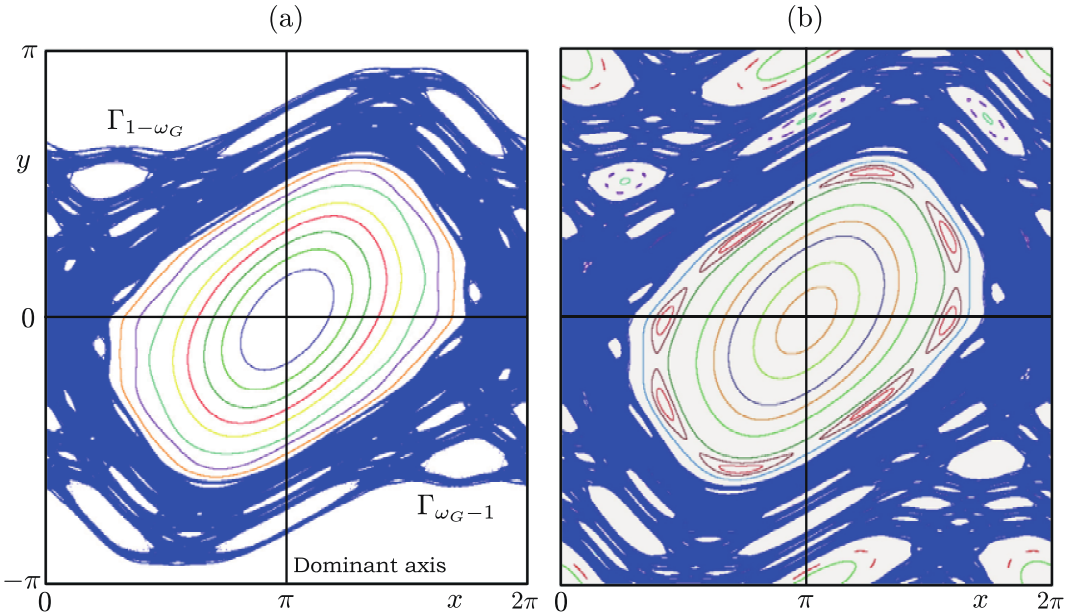


図３：標準写像（$0 \le x \le 2\pi$，$-\pi \le y \le \pi$）．(a) $a = 0.9716$．不変曲線$\Gamma_{1-\omega_G}$ と Γ_{ω_G-1}が存在している．(b) $a = 1$．カオスの海．ソフトウエアーStd Map[18]を使用した．

nの増大とともに臨界値は，$a_c(1/1)=4$，$a_c(1/2)=2$，$a_c(2/3)=1.51754$，$a_c(3/5)=1.28558$ のように減少し$a_c(\omega_G)$に漸近する．$a>a_c(\omega_G)$では，不変曲線Γ_{ω_G}は消滅しているが，回転数ω_Gの準周期軌道は存在していることに注意しよう．準周期軌道の存在と不変曲線の存在は別の概念である．グリーンの判定法と異なった方法でも臨界値を求められる．これについては付録 A を参考にしてほしい．グリーンの判定法は次のように一般化できる．

グリーンの判定法．任意の無理比回転数ωの連分数展開[16]を利用して，回転数ωに集積する回転数の列$\{p_n/q_n\}$を構成する．p_n/q_n-BE が周期倍分岐を起こす臨界値を$a_c(p_n/q_n)$とする．不変曲線が崩壊する臨界値$a_c(\omega)$を次のように定義する．

$$a_c(\omega)=\lim_{n\to\infty}a_c(p_n/q_n). \tag{3}$$

$a\le a_c(\omega)$では回転数ωをもつ不変曲線Γ_ωが存在し，$a>a_c(\omega)$では回転数ωをもつ不変曲線Γ_ωは存在しない．

不変曲線が満たす対合不変性と，不変曲線に漸近するp_n/q_n-BEの軌道点の性質を利用した幾何学的な手法で，グリーンの判定法の正当性を証明することが本論文の目的である．

本論文で使用する数学的道具を§2 で用意する．§3 でグリーンの判定法の正当性を証明する．§4 で本論文のまとめを行い，最後に今後の課題を述べる．

2. 数学的道具

2.1. 対合と対合不変性

標準写像Tを対合GとHを用いて$T=H\circ G$と分割する．ただし，$H\circ H=G\circ G=id$と，$\det\nabla H=\det\nabla G=-1$ が成り立つ．記号$\circ$は単なる分離記号である．写像Tを作用することは，対合Gを先に作用し，後に対合Hを作用することを意味する．対合による作用は一種の反転操作である．写像が対合の積で書ける場合，写像はバーコフの意味での可逆性をもつといわれる[14]．

ここで，円筒面における対合GとHの定義を与える．

$$G\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y+f(x)\\-x\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)\end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$H\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\y-x\ (\mathrm{mod}\ 2\pi)\end{pmatrix}. \tag{5}$$

対合表現の意味を説明する．例として式(4)は，対合Gを縦ベクトル (y,x) に作用すると右辺の表式になることを意味している．つまり，Gを作用すると新しいy座標値は $y+f(x)$ となる．x座標値については，y軸に関して反転して新しいx座標値は $-x$ となる．または，$y=\pi$軸に関して反転して $2\pi-x$ となる．

対合の不動点の集合は対称線と呼ばれる．対合Gの対称線をS_Gと書き，対合Hの対称線をS_Hと書く．

$$S_G:\ x=0,\pi,\ \ S_H:\ y=2x,2(x-\pi). \tag{6}$$

曲線$F(x)$が点$z=(\pi,y)$で$x=\pi$と交差しているとする．曲線$F(x)$のzでの傾きを$\xi(\pi)$とする．曲線$F(x)$にGを作用すると，像として

$$y=F_G(x)=F(2\pi-x)-f(x) \tag{7}$$

が得られる．像$F_G(x)$の$x=\pi$における傾きを$\xi_G(\pi)$とする．式(7)の両辺をxで微分して$x=\pi$とおくと，次の関係が成り立つ．

$$\xi_G(\pi)+\xi(\pi)=a. \tag{8}$$

不変曲線はTに関して不変である．更に対合GとHに関しても不変である．この不変性を不変曲線の対合不変性と名付ける．

$$\Gamma_\omega=G\Gamma_\omega, \tag{9}$$

$$\Gamma_\omega=H\Gamma_\omega. \tag{10}$$

式(9)の両辺にHを作用すると式(10)が得られる．つまり，$H\Gamma_\omega=HG\Gamma_\omega=T\Gamma_\omega=\Gamma_\omega$.

特に式(9)のことをG-不変性と名付ける．次にG-不変性から導かれる関係式を導出する．式(8)より，Γ_ωの$x=\pi$での傾きは $\xi(\pi)=a/2$であることが導かれる．この事実は回転数ωに依存しないことに注意しよう．これを性質 1 としてまとめておく．

性質 1． 不変曲線Γ_ωと主軸$x=\pi$との交差点をuとする．点uにおけるΓ_ωの傾きは回転数ωに依らず$a/2$である．

2.2. 副軸の導入

これから普遍被覆面で対称線$x=\pi$と$y=2(x-\pi)$をもつ対合GとHを利用する．

$$G\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y+f(x)\\-x+2\pi\end{pmatrix}, \tag{11}$$

$$H\begin{pmatrix}y\\x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\y-x+2\pi\end{pmatrix}. \tag{12}$$

次に周期軌道p/q-BE を，既約分数p/qの分子と分母の自然数の偶奇性で三つに分類する．

分類 2． 回転数p/qは$0<p/q<1$を満たすとする．普遍被覆面における対称線$x=j\pi$を$S_G(j)$と書き，対称線$x=2(x-j\pi)$を$S_H(j)$と書く．p/q-BE の軌道点z_kは主軸上$S_G(1)$にあるとする．

(i) $q=2k+1$ $(k\geq 1)$，$p=2m+1$ $(m\geq 1)$．軌道点z_0は対称線$S_H(-2m)$上にある．

(ii) $q=2k+1$ $(k\geq 1)$，$p=2m$ $(m\geq 1)$．軌道点z_0は対称線$S_H(-2m+1)$上にある．

(iii) $q=2k$ $(k\geq 1)$，$p=2m+1$ $(m\geq 1)$．軌道点z_0は 対称線$S_G(-2m)$上にある．

ここでは分類 2(i)について説明する．軌道点z_kが$S_G(1)$上にあることから，$Gz_k=z_k$が成り立つ．両辺にT^{-k}を作用する．右辺は$T^{-k}z_k=z_0$で，左辺は$T^{-k}Gz_k=GT^kz_k=Gz_{2k}$．よって，$z_{2k}=Gz_0$が得られる．この関係を利用すると

$$Hz_0 = HGGz_0 = HGz_{2k} = Tz_{2k} = z_{2k+1} \tag{13}$$

が得られる．

軌道点z_0が$S_H(-2m)$上にあることから，$z_0 = (x_0, 2(x_0 + 2m\pi))$と書く．軌道点$Hz_0$を式(12)の対合$H$を用いて 計算すると，$Hz_0 = (x_0 + (4m+2)\pi, 2(x_0 + 2m\pi))$が得られる．軌道点$Hz_0$と$z_0$は$x$軸方向に$(4m+2)\pi$離れている．円筒面では両者は同じ点である．式(13)より周期として$q = 2k+1$が得られる．回転回数は$p = (4m+2)\pi/(2\pi) = 2m+1$である．同様の方法で(ii)と(iii)も示せる．

分類 2 のそれぞれの場合において副軸（Subdominant axis）を定義する．

定義 3．

（1）分類 2(i)の場合，像$T^k S_H(-2m)$を副軸とする．

（2）分類 2(ii)の場合，像$T^k S_H(-2m+1)$を副軸とする．

（3）分類 2(iii)の場合，像$T^k S_G(-2m)$を副軸とする．

分類 2(i)の場合の対称線$S_H(-2m)$を図 4 に示した．初期点z_0は対称線$S_H(-2m)$上にある．副軸$T^k S_H(-2m)$と主軸の交点が軌道点z_kである．

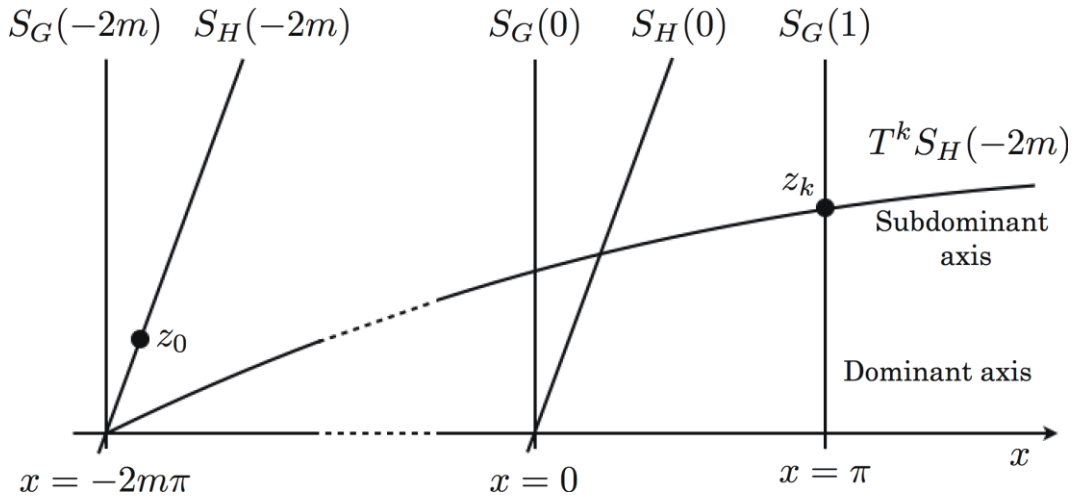


図 4 ：分類 2(i)場合の副軸と主軸の交差．模式図は普遍被覆面で描いた．軌道点z_0は対称線$S_H(-2m)$上にあり，軌道点z_kは主軸上にある．

ここで分類 2(i)の副軸$T^k S_H(-2m)$にGを作用する．

$$\begin{aligned} G(T^k S_G(-2m)) &= T^{-k} G S_G(-2m) = T^{-k} S_G(-2m) \\ &= T^{-2k}(T^k S_G(-2m)) = T^{-q}(T^k S_G(-2m)). \end{aligned} \tag{14}$$

つまり副軸にGを作用することは，副軸にT^{-q}を作用することと同値であることを意味している．点 $s \in S_{\mathrm{SD}}$ ならば $Gs \in GS_{\mathrm{SD}}$である（図 5 (a)）．つまり，GsにT^qを作用した点がsである．つまり，T^qによる z_k の周りの回転の仕方が時計回りであることが導かれた．

軌道点z_kは主軸と副軸の交差点である．ここで軌道点z_kにおける副軸 S_{SD} の傾きをξとし，像 GS_{SD} のz_kにおける傾きをηとする．関係式

$$\xi + \eta = a \tag{15}$$

が成り立つ．次に副軸と副軸にGを作用した像のなす角をθとする（図 5 (a)）．角度は副軸より時計回りに測る．$\xi > a/2 > \eta$ならば$\theta > 0$で，$\xi < a/2 < \eta$ならば$\theta < 0$である．$\xi = \eta = a/2$の場合，$\theta = 0$ となる．軌道点z_kが周期倍分岐を起こす臨界値を a_c^{pd}と書くと，命題4が成り立つ．

命題 4．

(i) $a < a_c^{\mathrm{pd}}$ では，$\theta > 0$である．

(ii) $a = a_c^{\mathrm{pd}}$ では，$\theta = 0$である．

(iii) $a > a_c^{\mathrm{pd}}$ では，$\theta < 0$である．

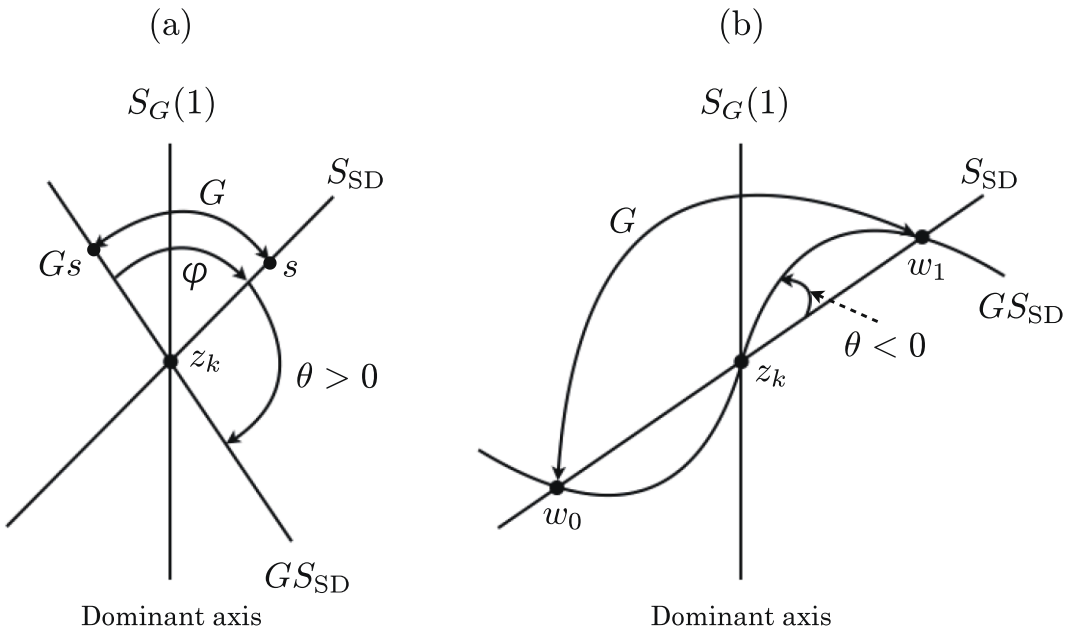


図 5：円筒面上における副軸S_{SD}と像GS_{SD}の関係（模式図）.(a) 周期倍分岐前．角度$\theta > 0$.(b) 周期倍分岐後．角度$\theta < 0$．$w_1 = Gw_0$．軌道点w_0とw_1は，z_kから生じた娘周期軌道点．

証明． $a = 0$の場合，$S_H(0)$ $(y = 2x)$にTを作用する．像$TS_H(0)$は$y = (2/3)x$である．像$GTS_H(0)$は$y = -2/3(x - 2\pi)$である．$z_1 = (\pi, 2\pi/3)$で，副軸S_{SD}の傾きは $2/3$ で，GS_{SD}の傾きは $-2/3$である．$a = 0$では，$\theta > 0$が成り立つ．

次にaの値を大きくしよう．周期倍分岐は，aの増大により複素固有値を持つ楕円型軌道点の周りの回転の仕方が速くなることが原因である．これよりこの事実を利用する．点sはz_kの近傍にあるとする．また，点sは領域$x > \pi$に存在する副軸S_{SD}上にあるとする．像Gsは領域$x < \pi$にありかつGS_{SD}上にある．像Gsから見るとsは 1 周期未来の点である．像Gsから点sへの時計回りの回転角をφとする（図 5 (a)）．aを増加すると，軌道点z_kの周りの回転の仕方が速くなるためS_{SD}はより右方向に傾く．これよりGS_{SD}はより左方向に傾くことが導かれる．aを増加すると角度φが増加するため，角度$\theta = 2\pi - \varphi > 0$は減少する．$\theta = 0$が満たされた状況が周期倍分岐の臨界点である．つまり，$a = a_c^{\mathrm{pd}}$で$\theta = 0$が成り立つ．

周期倍分岐の後，z_kから二つの娘周期軌道点w_0とw_1が生じる．これらは副軸上にある[19]．この結果，軌道点z_kの近傍におけるS_{SD}とGS_{SD}の配置は図 5 (b)で描かれたようになる．これは$\theta < 0$を意味する．以上で命題 4 の証明を終える．

最後に角度に関する定義 5 と性質 6 を与える．

定義 5． 無理数ωに集積する既約分数の列を$\{p_n/q_n\}$と書く．p_n/q_n-BE は主軸上に軌道点をもつ．この軌道点における副軸と副軸にGを作用した像のなす角をθ_nとする．ただし，角度は副軸より時計回りに測る．

性質 6． 不変曲線Γ_ωが主軸と交差する点uにおける不変曲線の傾きは性質1より$a/2$である．周期軌道の場合と同じように角度を決めると$\theta_u = 0$が成り立つ．

3. 証明

不変曲線Γ_ωが存在するならば下記の関係が成り立つことが必要である．

$$\lim_{n\to\infty} \theta_n = 0. \tag{16}$$

左辺の極限はθ_uである．不変曲線Γ_ωが存在するならば$\theta_u = 0$である（性質6）．よって上式が成立する．つまり不変曲線Γ_ωに漸近しているp_n/q_n-BE の固有値は(-1)に集積していることを意味する．この場合，集積している軌道点は複素固有値をもつ楕円型であっても，反転を伴うサドル型であってもよい．

次に列$\{p_n/q_n\}$を考える．極限は無理数でωとする．p_n/q_n-BE が周期倍分岐を起こす臨界値を$a_c(p_n/q_n)$とし，その極限値をa_c^*とする．

$$a_c^* = \lim_{n\to\infty} a_c(p_n/q_n). \tag{17}$$

ここで ϵを微小量とし，パラメータを$a = a_c^* + \epsilon$としよう．臨界値$a_c(p_n/q_n)$がnに関して単調減少している場合，交点uに近いところにあるp_n/q_n-BE から周期倍分岐が生じる．逆に単調増大している場合，交点uより遠いところにあるp_n/q_n-BE から周期倍分岐が生じる．何の場合でも，パラメータが臨界値$a_c(\omega)$を越せば交点uの近傍に存在する周期の長いp_n/q_n-BE は周期倍分岐を終えている．これらの周期軌道は反転を伴うサドル型である．このことは，$n \geq n_c > 0$において$\theta_n < 0$を満たす正の自然数n_cが存在することを意味する．θ_nの極限であるθ_uが負になっていることが導かれた．不変曲線のG-不変性は$\theta_u = 0$が成り立つことを要請している（性質 1）．$\theta_u < 0$ならば，性質 1 が成り立たない．つまり，不変曲線のG-不変性は破れている．以上より，$a > a_c^*$では不変曲線Γ_ωは存在しないことが導かれた．よって，$a_c(\omega) \leq a_c^*$である．

次に $a_c(\omega) < a_c^*$とする．ここで微小量$\delta > 0$を導入する．$a_c(\omega) + \delta < a_c^*$が成り立つとする．$a = a_c(\omega) + \delta$では，臨界値$a_c(p_n/q_n)$が$n$に関して単調減少している場合でも単調増大している場合でも，交点uに複素固有値をもつ楕円型p_n/q_n-BE の軌道点が漸近している．一方で$a = a_c(\omega) + \delta$において不変曲線は存在しない．そのため下記の命題 7 を利用できる[20]．

命題 7． 不変曲線Γ_ωが存在しなければ，交点uの近傍に存在するp_n/q_n-BE の軌道点は反転を伴うサドル型軌道点である．

複素固有値をもつ楕円型p_n/q_n-BE の軌道点の点uへの漸近は命題7に反する．よって，$a_c(\omega) < a_c^*$は成り立たない．以上より臨界値$a_c(\omega)$を$a_c(\omega) = a_c^*$と決定できる．これはグリーンの臨界値の判定法である．以上で証明を終える．

4. まとめと今後の課題

本論文では，主軸性が成立しているとの条件のもとで不変曲線の対合不変性を利用してグリーンによる判定法の正当性を証明した．グリーンの判定法は，「無限の性質を有限の周期軌道の性質で理解する」という考えがもとになっている．本論文における証明でも，交点uに漸近するp_n/q_n-BE の性質が交点uの性質に影響を与えることを利用している．§3 の証明では命題 4 が本質的な役割を果たした．命題 4 は対称性をもとに幾何学的に導出された命題である．つまり我々の証明方法は幾何学的であり，参考文献[2，6]で用いられたオーブリー・マザー集合に関する仮定は不要である．写像が対合の積で記述されかつ主軸性が成立する系において不変曲線が崩壊する臨界値を決めるために，グリーンの判定法が利用できる根拠を本論文で与えた．

検討が必要な課題を述べて本論文を終える．

(1) 不変曲線Γ_{ω_G}と$\Gamma_{1-\omega_G}$が最後の不変曲線であることの証明．無理数ω_Gは，既約分数で最も近似しにくい．この性質が不変曲線の崩壊にどのような寄与をしているのかはっきりしない．

(2) 主軸性が成立しない写像においては，不変曲線が消滅したり再生したりする現象が生じることがある．このような系でグリーンの判定法が使えるのだろうか．

(3) 三次元体積保存写像系で不変曲面の存在または非存在を示すために，グリーンの判定法が利用できるのか検討する必要がある[21]．

A. 不変曲線の崩壊の判定法

不変曲線の非存在について議論する際に，軌道の順序保存性の破れを利用した方法がわかりやすい．ここで軌道点の順序保存性について述べる．ここで$\pi_x(s)$を普遍被覆面における軌道点sのx-座標値とする．s と t を不変曲線上の任意の二点とし，$\pi_x(s) < \pi_x(t)$が満たされるとする．どんな整数kにおいても，$\pi_x(T^k s) < \pi_x(T^k t)$が成り立つならば，軌道点は順序保存性を満たすと言う．順序保存性は不変曲線が存在するための必要条件である．

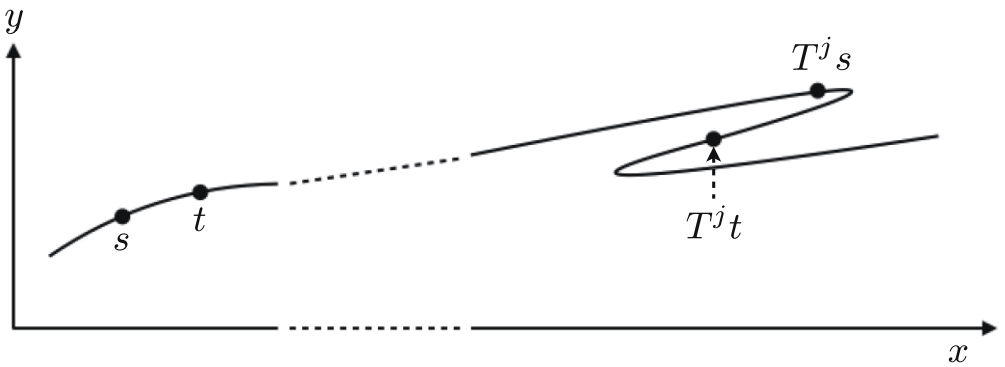


図 6 ：普遍被覆面で，二つの軌道点の追い越しが生じると不変曲線が存在しないことを示す模式図．軌道点$T^j s$と$T^j t$のあたりで不変曲線は少なくとも三つに折り曲げられる．

順序保存性が破れると不変曲線が存在しなくなることについて説明する．$\pi_x(s) < \pi_x(t)$を満たす二点 s と t が不変曲線上にあると仮定する．ここで，$\pi_x(T^j s) \geq \pi_x(T^j t)$を満たす

整数jが存在するとしよう．そうすると$T^j s$と$T^j t$のあたりで不変曲線が少なくとも三つに折り曲げられていることになる（図６）．これは不変曲線がグラフ（一価関数）であることに反する．よって，不変曲線が存在しないことが導かれる．この性質より不変曲線が存在しない条件を導出できる．得られた結果を以下で紹介する．

不変曲線の傾きがある程度大きくなると不変曲線上の軌道点の順序保存性が破れる．このことを利用してマザー（Mather）は，$a > 4/3$では全ての不変曲線は存在しないという理論的結果を得た[22]．オーブリー（Aubry）はマザーの方法を改良して，臨界値として1.23 を得た[3]．

マッカイとパーシバル（MacKay and Percival）は，制度保証付き計算で臨界値63/64を得た[23]．ジュングリース（Jungreis）は，制度保証付き計算を精密化して臨界値0.9718を得た[24]．この値はグリーンの臨界値に近い．

順序保存性を持たない周期軌道を利用して臨界値を決定する方法もある．順序保存性を持たない周期軌道については参考文献[8,20]を見て欲しい．参考文献[25]で得られた臨界値の数値計算結果を見ると，臨界値はグリーンの臨界値に漸近している．

最後に，参考文献[26]には本論文と関係した多くの文献が収録されていて役に立つことを述べておく．

参考文献

[1] Greene, J. M., A method for determining a stochastic transition. J. Math. Phys. 20 (1979), 1183-1201. 参考文献[26]に収録されている. https://doi.org/10.1063/1.524170

[2] MacKay, R. S., Greene's residue criterion, Nonlinearity, 5 (1992), 161-187. http://iopscience.iop.org/article/10.1088/0951-7715/5/1/007/pdf

[3] Aubry, S., The twist map, the extended Frenkel-Kontorova model and the devil's staircase, Physica D7 (1983), 240-258. 参考文献[26]に収録されている. https://doi.org/10.1016/0167-2789(83)90129-X

[4] Mather, J. N., Action minimizing invariant measures for positive definite Lagrangian systems, Math. Z., 207 (1991), 169-207. https://gdz.sub.uni-goettingen.de/id/PPN266833020_0207?tify=%7B%22view%22%3A%22info%22%2C%22pages%22%3A%5B175%5D%7D

[5] Siburg, K. F., The Principle of least action in geometry and dynamics, (Springer, 2004). Lecture Notes in Mathematics No.1844.

[6] Falcolini, C. and De La Llave, R., A rigorous partial justification of Greene's criterion, J. Stat. Phys. 67 (1992), 609-643. https://link.springer.com/article/10.1007/BF01049722

[7] MacKay, R. S., Renormalisation in area-preserving maps, (World Scientific, 1993). 不変曲線については §1.3.1(pp.69-70) に説明がある.

[8] 山口喜博，谷川清隆，標準写像におけるファーレイ型非バーコフ周期軌道と不安定ゾーン. 国立天文台報，第 13 巻（2010), 45-84. https://www.nao.ac.jp/contents/about-naoj/reports/report-naoj/13-34-2.pdf

[9] Kolmogorov, A. N., On the conservation of conditionally periodic motions under small

perturbation of the hamiltonian. Dokl. Akad. Nauk. SSR 98 (1954), 527-530.

[10] Arnold, V. I., Small divisor problems in classical and celestial mechanics. Russian Math. Survey. 18 (1963), 85-191. 参考文献[26]に収録されている.
http://iopscience.iop.org/article/10.1070/RM1963v018n06ABEH001143/pdf

[11] Moser, J. K., On invariant curves of area-preserving mappings of an annulus. Nach. Akad. Wiss. Göttingen, Math. Phys. Kl. II 1 (1962), 1-20.

[12] De La Llave, R., A tutorial on KAM theory. Smooth ergodic theory and its application. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics (AMS). 69 (2001),175-292.
http://citeseerx.ist.psu.edu/viewdoc/download?doi=10.1.1.622.1196&rep=rep1&type=pdf

[13] 柴山允瑠, 重点解説 ハミルトン力学系（サイエンス社,2016). 第 6-8 章.

[14] 山口喜博, 谷川清隆, 馬蹄への道（共立出版, 2016).

[15] MacKay, R. S. and Meiss, J. D., Linear stability of periodic orbits in Lagrangian systems. Phys. Lett. A, 98 (1983), 92-94. 参考文献[26]に収録されている.
https://doi.org/10.1016/0375-9601(83)90735-1

[16] ハーディ, G. H, ライト, E. M., 数論入門, (訳:示野信一, 矢神毅, 丸善出版, 2012).

[17] 根岸利一郎, ひまわりの黄金比（日本評論社, 2016).

[18] ソフトウェア Std Map は, 下記のホームページよりダウンロード可能. Mac OS 専用.
http://amath.colorado.edu/faculty/jdm/stdmap.html

[19] Dullin, H. R., Meiss, J. D. and Sterling, D., Symbolic codes for rotational orbits. SIAM J. Appl. Dyn. Sys. 4 (2005), 515-562. https://doi.org/10.1137/040612877

[20] Yamaguchi, Y. and Tanikawa, K., On Mather's connecting orbits in the standard mapping, Prog. Theor. Phys. 119 (2008), 533-559.
https://academic.oup.com/ptp/article/119/4/533/1821664

[21] Fox, A. M. and Meiss, J. D., Greene's residue criterion for the breakup of invariant tori of volume-preserving maps, Physica D 243 (2013), 45-63.
https://doi.org/10.1016/j.physd.2012.09.005

[22] Mather, J. N., Non-existence of invariant circles, Ergodic Theory Dynam. Syst. 4 (1984), 301-309. 参考文献[26]に収録されている. https://doi.org/10.1017/S0143385700002455

[23] MacKay, R. S. and Percival, I. C., Converse of KAM theory and practice, Comm. Math. Phys. 98 (1985), 469-512.
https://projecteuclid.org/download/pdf_1/euclid.cmp/1103942538

[24] Jungreis, I., A method for proving that monotone twist maps have no invariant circles, Ergodic Theory Dynam. Syst. 11 (1991), 79-84.
https://doi.org/10.1017/S0143385700006027

[25] Chang, S-J. and Yurchenko, A., Localized zero modes and the breakup of KAM Tori, Chinese J. Phys. 35 (1997), 780-788.
https://www.psroc.org/cjp/issues.php?vol=35&num=6-II

[26] MacKay, R. S. and Meiss, J. D., Hamiltonian dynamical systems, A reprint selection. (CRC Press, 1987).

Ryuji Takaki「Introduction to the Science of Forms」

永田 裕作

本書は、長年に渡り形の科学を牽引してきた著者による、同分野に関する書である。およそ 400 ページの同書は、以下の 5 章から構成されている。

1. Overview of the Science of Forms（形の科学の概要）
2. Properties of Space（空間の性質）
3. Mechanism of Pattern Formation（パターン形成のメカニズム）
4. Nonlinear Dynamics and Randomness（非線形動力学とランダム性）
5. Mathematical Modeling of Biological Systems（生物システムの数理モデリング）

一方、著者には同様の趣旨の和書「形の数理」（朝倉書店、1992 年）がある。全 180 ページの内容は

1. 形の数理序説
2. 形の定量化
3. 空間の性質と幾何統計
4. 平衡形とエネルギー原理
5. 成長形の解析
6. 形の変化と転移
7. 形の科学の展望

の 7 章から構成されている。両者の内容を比較すると、和書の 1 章と 7 章は本書の 1 章（と前書きおよび後書き）に、和書の 3 章は本書の 2 章に、和書の 4 章と 5 章は本書の 3 章に、和書の 6 章は本書の 4 章に対応している。また、和書の 2 章はトポロジーやフラクタルなど、形を定量的に扱うために必要な諸概念の説明であるが、本書では章を立てずに各章で必要に応じて書かれている。その一方で本書では生物に関係した形態形成を章として独立させている（5 章）。和書と英書の違いはあるが、ページ数は 2 倍となり、和書発行後 25 年の著者のグループの研究や形の科学の展開が反映されており、内容もより充実したものとなっている（和書は現在絶版となっているが、もし図書館などで入手できるならば、長文の英文を読むのに慣れていない若い読者には本書を読む前の導入として役立つであろう。復刊を望む）。読者としては、学部教養課程を終えて少し背伸びをしたい学生から大学院生までの自習あるいは輪読のテキストとして、それから形について研究の範囲を広げていきたいと考えている研究者がこれまでの形の科学の概要を理解するための参考書として利用することなどが考えられるであろう。

本書は「形の研究を通じて、科学のアイディアを探究する」をコンセプトとして、形の科学の歴史と定義、形の静的性質（空間）、形の動的性質（形成機構）といった基礎的な概念を扱った前半と、「非線形・ランダムと形」「生物と形」といった各論的な後半とで構成されている。この構成は、形についての全般を扱った書籍としてはオーソドックスであるが、それぞれの章の中で扱われているトピックや議論にはまさに著者の個性が表れている。その中には著者自身の研究（および著者自筆のイラスト）が数多く含まれていて、読者は在りし日の研究室をあたかも著者の解説入りで見学しているように感じるであろう。

現在「形」や「パターン」をテーマの一つとして掲げる研究者は数多くいる（例えば、日本物理学会 2018 年秋季大会で「形」「パターン」をタイトルに掲げる発表は６０件ほどある）。しかし各研究者の専門や自前のツールを用いることができる対象に限定して扱っている場合が多く、「形」そのものを全般的に対象としている研究者は非常に少ない。各分野で発達しているアイディアを「形」の視点で俯瞰的に捉え、そこに新たなアイディアを見出して形だけでなく科学全体を進めていくということが、今後はとても大事になるのではないだろうか。それはまさにこの本のコンセプト「形の研究を通じて、科学のアイディアを探究する」と一致する。

はるか昔、著者のかつての研究室を、他大学の学生であった評者が（手広く流体を研究しているところと思って）訪問した際、多様なテーマが同時並行で進められていることに圧倒されて、いったい何が本来の専門なのかを伺うと

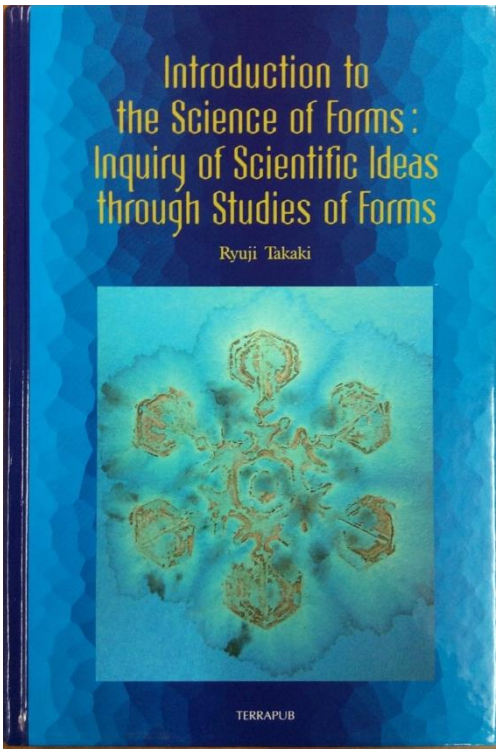
「形と流体に関することなら、何でもテーマになる」

というのが答えであった。その多様性に魅せられた評者はその後、著者の研究室に博士課程の学生として入り、研究室最後の学位取得者となった。学生当時は研究室の根底にあるコンセプトが充分に分かっておらず、先生の趣味でいろんな事やってるなぁ、くらいに思っていた。改めてこの本を読んで、当時の様々な研究がつながりを持って見えてきた。また、この本を最初に手に取った際には、評者の専門である流体力学のここ数年の発展のことを考えると、少し内容が古くなっているのではと（不遜にも）思ったりしていたのであるが、注意深く読んでいると現代につながる様々な概念が垣間見えている。（改めて恩師の先見の明に深く感じ入り、また自分の不明さを恥じ入りました。）

著者は大学を定年退官した後もなお、本会を中心に研究活動を続けておられ、年齢を感じさせない活発さで発言されている。今後も末永く活動を続けられ我々を見守っていただくとともに、現在のテーマを中心とした次の本をぜひ執筆して頂きたいと一読者として願っています。

書籍情報

書名：Introduction to the Science of Forms
著者：Ryuji Takaki
ISBN：978-4-88704-169-1
出版社：TERRAPUB
ページ数：388 ページ
発行年月：2018 年 1 月
税込み価格：24,000 円



第 85 回 形の科学シンポジウム 「かたちの機能，機能のかたち」

討論記録（討論記録のあるもののみ掲載）

【主催】形の科学会　　【共催】東北大学工学部・工学研究科
【会期】2018 年 6 月 22 日（金），23 日（土），24 日（日）
【会場】東北大学　青葉山東キャンパス 青葉記念会館
【代表世話人】 村田 智　〒980－8579 宮城県仙台市青葉区荒巻青葉 6-6
TEL：022-795-4100　E-mail: murata@molbot.mech.tohoku.ac.jp
【参加費】 会員・非会員ともに一般 5,000 円、学生 1,000 円
【懇親会】 2018 年 6 月 23 日（土）17：45 より
【懇親会費】一般 3,500 円、学生 3,500 円

討論記録は質問者の討論記録シートの記載にもとづいており、講演者の校正がないものもあります。
Q: 質問、A: 回答、C: コメント

討論記録

6 月 22 日（金）

形の科学一般
竹の自然美と機能美
　島弘幸（山梨大学）、佐藤太裕（北海道大学）、井上昭夫（熊本県立大学）
Q. 佐々木康成
他の木材では傾斜機能をもってないか？
A.
他の木は成長とともに太くなるので、竹と同じ傾斜にはなっていないと思われる。

潮の干満による「月」の軌道変化
　内田菜月（山梨大学）、島弘幸（山梨大学）
Q. 高木隆司
潮流によるエネルギー損失が計算されている。その効果は、地球自転エネルギーや月の公転のエネルギー減少につながるのか。
A.
そのとおりである。地球自転速度の減少が測定されているし、地球と月の間の距離が少しずつ増加している。
Q. 岩渕祥璽
今回発表者が提案したモデルおよびそれを別の天体に適用した場合における誤差はどの程度になるのか。
A.
まず、誤差を予測するというのは難しい。また、他のモデルにおいて適用する場合では表面のどの程度が水分(海)で覆われているか、いたのか、あるいはその天体の持つ衛星の個数によってもモデルは影響を受ける。これらについては今後検証／検討を行う予定とのこと。

かたちの機能，機能のかたち・第１部
中生代放散無視 Vallupus 類の殻形態とその”機能”
　松岡篤（新潟大学）
Q. 高木隆司
ゴンドワナ大陸で見つかった、赤色で示された Vallupus 類が高緯度で見つかっている理由として、ゴンドワナ大陸が元は赤道近くにあったという仮説はできないか。
A.
ゴンドワナ大陸の挙動は別の根拠によって，それほど南北方向に動いていないことがわかっています。
Q1. 手嶋吉法
予稿集(p.6) Vallupus 類の骨格写真を見ると、上部(孔のある多面体的な部分)と下部に別れているが、下部はどのような内部構造か？
A1.
筒状になった下部の内部は空洞になっています。
Q2.
Pantanellium から Vallupus への形状の変化の過程については既に解明されているか？
A2.
化石記録から，Pantanellium からまず Protovallupus が生じ，Mesovallupus を経て Vallupus に進化することが分かっています。
Pantanellium を特徴付ける主棘が，徐々に短くなるという定向的な進化傾向を示します。

フラクタル空間充填木構造の開放型流路による液滴収集
　甲斐洋行（東北大学）、豊里涼馬（東北大学）、西澤松彦（東北大学）
Q. 島弘幸
開き角 α が大きいと液滴の止まってしまう理由は？
A.
α 増に伴い液滴への駆動力は上がる一方、周縁部の濡れ面積も同時に大きくなるため、周縁部に保持されたままの液体が増えるためである。
Q. 安部桂太
スケールの影響について。
A.
収率は流路のスケールと液滴の大きさの影響を受けるが今は液滴の大きさを固定して実験している。
Q. 高木隆司
大変興味ある研究である。ところでフラクタル構造はぬれやすさを高める処理をさせているが、液体が中央に集まるには流体の表面張力が重要である。現在は純水で実験しているのか。
A.
そのとおりである。実際に収集する溶液は純水でない場合もあるため、溶液の種類による表面張力の違いの影響は今後検討したい。

招待講演・公開講座（かたちの機能，機能のかたち・第２部）
ワークプレイスのデザイン　－創造的なグループワークの技術と形
　本江正茂（東北大学 都市・建築学専攻）
Q. 甲斐洋行
「勝手に入っていって勝手にやる」が面白くて、これを実験系の研究室に応用できないか？
A.
Yahoo！の取り組みは、ビルの管理者からするとセキュリティリスクの点でかなり厳しいのは事実。それでも何とか新しいことをやろうと必死でやっている。サイロ型組織をやぶるためには有効かも。
Q. 佐々木康成
席替えの功罪は？
A.
ユニバーサルレイアウトにしておいて、定期的な席替えをす

る企業もたしかにある。営業マンのように席にあまりいない人のために、限られた数だけを用意しておいて席は都度好きに選べることにしていても、結局だんだん定位置が決まってくることになりがち。毎回くじを引いて決めるというのもある。その効果についての検証は出来ていないが。

Q. 松岡篤

生成物(成果物)の評価を含めて、いいワークプレイスの形というのはありますか。

A.

残念ながら、いつでも正解という「いい形」はない。組織と仕事の内容が常に変わっていくから。

Q. 河野奈菜子

本江先生ご自身の研究室における「ワークプレイスのデザイン」を教えてください。

A.

恥ずかしながら紺屋の白袴で、これというものではないが、家具レベルでは色々試したりはしている。

C. 高木隆司

興味ある講演ありがとうございました。講演でふれたワークプレイスの人物間の相互作用は、私が最近取り組んでいる物語の解析とつながっているという印象を受けた。とくに、今昔物語で、珍しい話で良い結果に終わるものでは、話のクライマックスの前に登場人物同士の相互作用が多い。これは、ワークプレイスにおける人物間の相互作用の制御に関係するかもしれない。

かたちの機能，機能のかたち・第３部

DNA オリガミも用いて膜に穴を開ける : Φ12nm 人工チャネルの設計と機能評価

岩渕祥璽（東北大学）、片山航一郎（東北大学）、川又生吹（東北大学）、鈴木勇輝（東北大学）、村田智（東北大学）、野村 M. 慎一郎（東北大学）

Q. 佐々木康成

自然界のリポソームは 20μm のような大きさのものはないと思う。この技術はどれぐらいから応用されているのか。

A.

視認で数を数えやすくするために大きなリポソームを作った。10 年ぐらい前から加速度的に進んできた技術。

Q1. 手嶋吉法

リポソームの膜面を形成する脂質の個数は？リポソーム(球体)の直径は？

A.

ここで使っているリポソームは 10 マイクロメートルくらいの大きさ。

Q2.

人工チャネルは、リポソームの球面上に何個ぐらい、どのように配置されるか？

A2.

数十ナノメートルからいろいろな大きさのリポソームをつくることができる。濃度計算上、この場合は数十万個のチャネルが一個のリポソームの上にいることになるが、貫通しているものがどれだけあるかはわからない。

複数の自己集合モードを持つ DNA オリガミ構造体の設計と構築

武田祐貴（東北大学）、村田智（東北大学）、鈴木勇輝（東北大学）

Q1. 甲斐洋行

六角形と直線は unit の構造は何が違うのか？

A1.

表同士／表+裏の組み合わせの違い。

Q2.

AFM の基板上で動くのか？

A2.

溶液中で会合させて後観ている。基板上でも少し動く。

Q3.

長さは制御出来るのか？

A3.

いまはできない

Q. 佐々木康成

塩基の突起部分の配列の違いを 1~6 量体の出方の分布で表せてることにならないか？

A.

検討してみます。

Q1. 手嶋吉法

正三角形を辺で連結して出来る形には多面体(正四面体、正八面体)もあるが、今回の三角形の構造では辺で連結すると平面的なものに限定されるという理解で良いか？

A1.

平面的な構造だけを許すように設計している。傾きをつけて立体をつくることも今後検討したい。

Q2.

六角形のモードは、説明図では中央に穴は無い(小さい)が、写真では中央の穴が割と大きい。何故か？

A2.

DNA は負に帯電しており、自分自身とも反発するため膨らんで見えているのだろう。

ヒト肺繊維芽細胞 WI-38 の培養より栄養枯渇下に形成されるフラクタル構造

春日井勲（宮城県立がんセンター）

Q. 村田智

どのような状態で長期保存しているのか？

A.

5%CO_2インキュベーター内で保存している。湿度はほぼ飽和しているが、実際は 95%前後と思われる。長期培養で培養液は減少するが、乾いてはいない。

Q. 甲斐洋行

フラクタル構造は生物的プロセスによってできているのか？例えば 7 日ぐらいで細胞を殺して同期間置いたらできないのか？

A.

構造の形成には、アポトーシスや自己組織化といった現象が密接に関係していると思われる。細胞死の方法にもよるが、アポトーシスに含まれるプロテアーゼ反応等の酵素的過程が阻害される状況においては、構造の形成は、妨げられるのではないかと考えている。

C. 高木隆司

図 2 と 3 を比べて見たときの印象を述べる。図 2 の写真で白黒のコントラストが弱いところは、図 3 では死んでいる領域になる。また、図 2 で細長い細胞の向きが揃っているところは早く死ぬ(単なる印象なので、確かでない)

A.

図 2 と 3 は、厳密には同一の視野ではない。培養のコントラストや細胞の配向と、細胞死の領域に相関があるかどうかは現時点では不明。

Q. 鈴木勇輝

140kDa 程度のタンパク質は、細胞を最初から低密度培養した際には発現しないのか。

A.

同分子は、飽和した培養の細胞外（培養液、細胞外マトリックス）に、銀染色レベルで検出されなかったので、低密度培養では、それ以下のレベルと思われる。細胞内の発現については不明。140kDa の分子は、プロテアーゼ耐性等で残存した、より大きな分子の一部である可能性も考えられる。

Q1. 手嶋吉法

予稿集の図 2 が図 3 に変化するとの事で、この間で生きている細胞の数は同じか？

A1

図 3 のフラクタル構造と同培養液を SDS-PAGE で解析したところ、培養液には低分子から高分子まで、大量のタンパク質が含まれていた。これら成分は、細胞由来のタンパク質やその分解物であり、細胞死により放出されたものと考えることができる。したがって、図 2 の増殖飽和到達時に生存していた細胞の大半は失われているものと思われる。

Q2.
図 2 や図 3 は平面的な構造か立体的か？ 図 3 はシャボン玉の構造に似ているが、膜はあるのか？
A2.
図 2 は増殖飽和した細胞であるので、単細胞程度の厚みを持った立体構造と考えられる。それら細胞や細胞外マトリックスから形成された図 3 のフラクタル構造は、同様に細胞の厚さ程の立体構造と推定されるが、突出した部分があるかどうかは不明。顕微鏡下では、膜的構造は認められなかった。

かたちの科学一般
笑顔の評価における主観と客観の比較　−目元と口元の表情の入れ替えによる実験的検討−
　佐々木康成（金沢星稜大学）
Q. 高木隆司
実験結果から私が受けたときの印象は、口を中途半端に開けたときは目の表情が大きな影響を持つ。話しているときも口を中途半端に開けるので、目の影響が強い。
A.
講演中に触れなかったが、確かにその傾向がある。

海外における書道ワークショップの実戦
　本田容子（盛岡大学）
Q. 神藤拓実
芸術としての書道（小学生に書かせた後、紙を自由に装飾させる？）、言語を超えたコミュニケーションとしての書道（起業家、書道家による活動）、二つの事例を見聞きしたことがあるが、自由に書く”芸術としての？”書道と手本を元に書いたり赤字で直されたりしながら形式を知って正しく書く書道は“書道の活用”と一口でくくってしまった場合には、これらが混在しているのか？
A.
現在、書道を表現している方々の中でも混在していると考えている。カリキュラムを通して芸術科としての書道および国語科としての書写を研究対象としている。
Q1. 河野奈菜子
手本を事前に渡していたのか？
A1.
このワークショップに敢えて手本はない、好きな漢字を書くことに設定した。漢字は表意文字でもあるため、漢字が苦手であるといった気持ち(苦手意識)をなくすことが第一目的。
Q2.
書道(手本がある、朱で直される) = 芸術？
A2.
書道は（文字を素材とした）線の芸術と考えている。とめ、はねを児童に示して児童が真似をする。その線を見て「美しい」「良い」と感じたら芸術と言える。
Q3.
書道に似た文化は他の国にもあるのか？
A3.
中国(韓国)には書道の文化がある。今後も、非漢字文化圏でのワークショップを考えている。文字 = 図形と考えるのか、「手本」などは難しいと考えるのか、これから研究していきたい。
Q. 高木隆司
ヨーロッパの人々はうまい書と下手な書を見分けるセンスをもともと持っているのか。
A.
持っているように思える(特に、曲線のある美についても)。しかし、この問題はまだきちんと調査されていない。

細胞内共生説：光栄養先行説における栄養連結のグラフ的特徴
　春日井勲（宮城県立がんセンター）

かたちの機能，機能のかたち・第４部
自己集合サイズがプログラム可能な DNA ナノモジュールの設計
　劉詩韻（東北大学）、安部桂太（東北大学）、内田健央（東北大学）、遠藤佑真（東北大学）、秋田賢（東北大学）、市堰翔成（東北大学）、荒舘笙（東北大学）、斎藤正崇（東北大学）、吉川太陽（東北大学）、福地成彦（東北大学）、川又生吹（東北大学）、野村 M.慎一郎（東北大学）、村田智（東北大学）
Q. 手嶋吉法
シリンダーの形はなぜこの形にしたのか？ また、「モジュール同士が無限に結合していくと考えられる」とのことだが、形状相補性だけで結合するとは考えにくい。何の力が働いているのか？
A.
DNA の平滑末端同士の結合(パイ電子共有)による。
Q. 宮本潔
オリガミという呼び名は、この分野の通称になっているのですか？　日本人としては誇らしいことですが、モジュールは立体的なので、レゴと呼んだ法が良いと思いますが。
A.
ナノモジュールは二次元の展開図から考えられているので、オリガミと呼ばれています。

池上式 3D ジグソーパズルの複製とピースの対称性について
　町屋佑季（千葉工業大学）、池上祐司（理化学研究所）、手嶋吉法（千葉工業大学）
Q1. 安部桂太
2D ジグソーとの違いについて。
A1.
ご指摘いただいた様に、ジグソーパズルを完成させる手順は、３D ジグソーの方が、制約が増える。2D ジグソーでは、任意の１ピースを独立に嵌め外し出来るが、３D ジグソーでは出来ない。３D ジグソーでは、各層ごとに組上げてから、それらを重ねる必要がある。これは、この３D ジグソーの内部構造を反映したもので、面白いところとも言える。別の見方としては、2D ジグソーで１ピースの嵌め外しが可能なのは、3D 空間内で動かしているからであって、2D ジグソーの動きを 2D 空間内に拘束すれば、全ピースが嵌め外し出来なくなる。池上式３D ジグソーが３D 空間内の動きで分解可能なのは、今回説明した３方向へのスライドによる。
Q2.
造形で手作業が低速になっていることについて。
A2.
今回、３D プリンタの中でも熱溶解積層法（FDM)と呼ばれるタイプのマシンで実体化をおこなった。この場合、サポートと呼ばれる余分な形状が付与されるので、その除去に時間を要した。これに関しては、ナイロン粉末焼結の３D プリンタなど、サポートを要しないタイプの３D プリンタを用いることで、時間短縮できる。しかし、仕上げ作業において最も時間を要したのは、ほぞと溝の嵌合の調整である。今回の実体化では、ほぞと溝を同じ寸法で実体化し、手作業で嵌合を調整したので、膨大な時間を要することとなった。３D プリンタの造形精度はさほど高くなく、マシンのタイプにも依存するので、従来の加工法（旋削など）の様に、はめあいを制御出来ていないのが現状である。今後の３D ジグソーのピースの実体化では、ほぞに対する溝のサイズをある比率で大きくし、適切な比率を見出し、手作業による嵌合の調整時間をゼロに近づけたい。

6 月 23 日（土）

形の科学一般
生物の体サイズに応じて収斂する生物個体のエネルギー利用
　森茂太（山形大学）、黒澤陽子（山形大学）、王莫非（山形大学）、山路恵子（筑波大学）、石田厚（京都大学）
Q1. 小川進

呼吸は表面であるので、質量に関して 2/3 乗則ではないか？
A.1
複雑。
Q2.
20℃ に正規化しているが、どのように補正を行っているか。
A2.
キャリブレーションを使った。
Q. 本多久夫
樹木は大きくなると死んだ細胞が増え、それが幹の力学的に支えになるといわれているが、これとの関連はどうか。
A.
若い植物では、個体重量 - 呼吸活動の勾配が 1 に近いが、大きくなるとこれから小さくなっている。活動していない細胞の影響はここに反映されている。

ブナ芽生えの根の省エネルギーによる急速成長
　黒澤陽子（山形大学）、森茂太（山形大学）
Q. ＜質問者氏名記載なし＞
フラクタル性について表面、分岐のフラクタルがあるが、呼吸速度と面積、質量との非線形との関係はどうか？
A.
まだやっていない。

発見された卑弥呼の墓のフラクタル性
　小川進（空間技術研究所）、谷口幸弥（長崎大学）、桜井貴子、福永晋三
Q1. 手嶋吉法
今回、前方後円墳の可能性がある地形をドローンで計測されたとのことで、これが墓であれば石室や副葬品が出土する可能性があるが、それらの発掘調査はこれからか？
A1.
10 月より、福永晋三さんが発掘調査に入ります。
Q2.
クニの形を河川で論じる場合、クニの境界線が河川か、河川をまたぐようにクニがあるのか？
A2.
クニの境界は河川か流域界になります。3 世紀当時にそのようなクニがあったかどうかはわかりませんが、基本的には河川がクニの要素になると考えられます。
Q. 安部桂太
卑弥呼は墓が作られるような存在だったのか？
A.
当時の国の代表であったので墓はあるだろう。7000 戸という、日本を代表するクニであったことは間違いなく、邪馬台国は大和朝廷につながったクニです。読みも「ヤマト」ともいわれます。

DNA 反応拡散系によるハイドロゲル媒質中への濃度勾配パターンの形成と制御
　安部桂太（東北大学）、川又生吹（東北大学）、鈴木勇輝（東北大学）、野村 M. 慎一郎（東北大学）、村田智（東北大学）
C. 本多久夫
DNA 、反応拡散、発生過程…が並ぶと生物学で遺伝情報が発現し形態形成が起こる問題と勘違いしてしまう。初め「に人工的に操作できる物質として DNA を使う」という意味のことを述べられるとよいと思う。
Q. 本多久夫
拡散速度が異なるものの間でできる拡大で形成される境界は直線ではなく曲線になることが知られているが、これと今日の結果の関係は？
A.
拡散によって濃度が小さくなり、それに伴って反応速度が小さくなることで境界が予想されるような曲線にならなかったと考えられる。

平行六面体状の脚部を持つ三脚巴ブロックの滑動性について
　松浦昭洋（東京電機大学）
Q. 村田智
滑動性の一般的な定義は？
A.
「滑動性」は本研究の造語であり、複数のブロック（より一般には事物）が噛み合い一定数敷き詰められた状態で、一部のブロックに力が加えられたとき、ブロックが隣接状態を維持したままスライドして動く性質を指す。

ホモメトリック構造―２
　松本崧生（金沢大学・名誉教授）
Q. 手嶋吉法
Patterson や Buerger が手計算でホモメトリック構造を見つけたとの事で、その後もっと大きな N, r についても計算機などを利用して求められているか？
A.
A. L. Patterson (1939, 1944), Martin J. Buerger (1976, 1977, 1978) 等、homometric structures, tautoeikonic sets を検討、円周上の点配列で表現（正 n 角形の頂点の r 個に同種と n-r 個の異種の配置法）を考察、$n \leq 16$, $4 \leq r \leq n/2$ につきすべて調査した。その後、計算機プログラムを使っての研究もされている。例えば、Chung Chieh (Zeit.Krist.150,261(1979)は、N＝16, 18, 20 を発表している。Juan E. Iglesias (Zeit. Krist. 150, 279 (1979); 155, 121 (1981))にも異なった試みがみられる。

招待講演・公開講演（かたちの機能，機能のかたち・第 6 部
ロボット機構の考案・具現化における『形』の熟考過程の実際
　多田隈健二郎（東北大学 応用情報科学専攻）
Q. 高木隆司
大変興味深い講演であった。ところで、複雑な機構においてもそのエレメントは球や円柱のように単純な形をもつものが多い。一方生物の体の部品ではエレメントも複雑な形を持つものが多い。たとえば、人間の指の関節間の長さは、先端から奥へ向かって約 1.6 倍ずつ長くなっている。そのために、種々の太さの棒を楽に握ることができる。このように生体から学ぶ可能性があるだろうか。
A.
＜記載なし＞
Q. 高田宗樹
体と客体を入れ替えたり、高次元化を考えるうえで何か工学的な問題意識や動機付けが研究を駆動させているようなことはあるのでしょうか。
A.
割と(理学的に)興味から研究を進めていることがあるが、要素数を減らしたり接点の数を少なくしたり、機構を簡単化させる意識を持っている。

形の科学一般
映像視聴時の意識統制が与える身体・精神への影響
　杉浦明弘(岐阜医療科学大学)、田中邦彦(岐阜医療科学大学)、大西達也(岐阜医療科学大学)、太田一樹(岐阜医療科学大学)、北村一騎(岐阜医療科学大学)、森下沙紀(岐阜医療科学大学)、梅田凌輔（岐阜医療科学大学)、高田宗樹（福井大学)

活字設計の基礎となる漢字の字形評価の検討
　沓名健一郎（福井大学)、高田宗樹（福井大学)
Q. 手嶋吉法
等高線(視覚誘導場)を文字に対して生成する方法と意義を直観的に説明するとどうなるか。
A.
視覚の誘導場による等高線は、ビオサバールの法則をもちいたポテンシャル場で示されます。
文字と文字、線と線は、お互いにその最適な距離を保っています。これは文字のパーソナルスペースともいうべきものです。これを視覚の誘導場による等高線によって図示できますと、文字の間隔や行間、線画の距離の均衡が整うメカニズム

が明確になります。
Q. 小川進
美しさには、「静」的な整った美と「動」的な動きのある美があります。極端に対立した美の形となります。対象として、王義之の楷書と行書には 2 つの異なる美があるのではないですか。α波とβ波の異なる反応の美が存在するのでは。
A.
文字の美の感受性については多くの研究がされております。王義之の書を見ますと、確かに静と動の文字がありますが、手で書くということに立脚した様式の違いと、そこに勢いや強さを感じる感受性の差であると解釈されています。文字の研究ではα波とβ波のような異なる反応の美であるとは考えられておりませんが、今後考察を深めていきたいと思います。なお本論では活字としての美を追求する観点から静的で整った文字を対象としています。

画像の乱れを評価する
　根岸利一郎（埼玉工業大学）、関口久美子（埼玉工業大学）、船崎明美（(株) ビジネスサポート）、内田正哉（埼玉工業大学）
Q1. 高田宗樹
列の距離をとる計測円は半径の任意性など、計測位置等の任意性を含むが解析の安定性はみているか？
A1.
みている。半径を変化させると、計測の精度が変わる。現在は計測位置を手動で定めている。
Q2.
砂漠の点列は水路の節(分岐点)と思われ、フラクタル次元等別の計測も考えられるが、画像診断(例えば臓器の境界の識別)に使えそうか？
A2.
そういった応用性を十分考えて、研究を進めている。

6 月 24 日（日）

形の科学一般
立体概念の形成を支援する科学折り紙教材 Ⅱ. 体性感覚（触覚）を活用した立体概念形成の試み
　石原正三（埼玉県立大学）
Q. 杉本剛
履修者が 2 年で 10 人と少なく結果を統計的に解釈するには 2.5 倍のデータが必要だが、「数理科学」という科目名がハードルを上げていないか。
A.
そうかも知れないが、壁を乗り越えて受講者に「探求」の楽しさを知ってもらいたい。
C. 種村正美
石原先生の作られる折り紙は多面体の骨格をベースにしておられる。これは非常に基本的な着眼点で興味ある方向であると感じているが、受講する学生に 5 種の正多面体を教える場合、骨格で作った多面体（面がない多面体）について学生たちがどう感じるのかに興味を持った。
A.
基本的に科学折り紙を多面体の頂点、陵及び任意の多面体を四面体に分割したときの三角形面でつくるというスタンスで教育している。そのため、多面体の面がない構造でも学生たちは理解してくれると考えている。
Q. 高木隆司
「科学折り紙」という言葉はもっと広い意味を持つと思う。今回の発表内容以外にどんな科学折り紙が可能か考えてみたらどうだろうか。
A.
はい、「科学折り紙」という言葉はもっと広い意味を持つとは思いますが、ここでは、任意の形状をした三角形のユニットを設計し、色々な立体を組み立てる手法を、「科学折り紙」と呼んでいます。

脊椎動物の系統樹の位相的性質：Horton 解析と中立的確率分岐モデルに基づくアプローチ
　石井友一朗（神戸大学）、山崎和仁（神戸大学）
Q. 高木隆司
系統樹のシミュレーションは初期設定をどのように行うのか。枝の相互の距離は考えるのか。
A.
一つの種から始め、分岐していく。枝の相互の時間的順番は考えるが、それ以外の距離は考えない。あくまで位相的パターンのみに注目する。
C. 本多久夫
ホートンの法則は地形学での河川の分岐や樹木学の分岐などで調べられているが、今回の発表を聴くと生物系統学で大きな成果が得られる可能性があるように思います。ご健闘を祈ります。

二次元変形・流動現象におけるポテンシャル曲面の微分幾何学的構造
　山崎和仁（神戸大学）
Q. 杉本剛
「世界観」はいかなる意味か。
A.
物理学での抽象と幾何学での恒等式の対応の妙を表現している。
Q. 高木隆司
最初に定義された Q 値の意味は何か。
A.
流線が平行でなく、流れに従って広がるか、狭まるかによって正・負の値をとる。

第二次セント・ヘレナ島沖海戦
　杉本剛（神奈川大学）
Q1. 手嶋吉法
予稿の末尾に参考文献が挙げられていないが，イントロの一行目に出てくる「海難史」が全てか. 原著を読んでいるのか. 何語で書かれているか。
A1.
「海難史」がすべてではない。口頭発表の最後に参考資料を提示した。
16-8 世紀発行の様々な原著を読んでいる。これらは、ラテン語・ポルトガル語・オランダ語・イタリア語などで書かれている。英訳があるばあいには参考にしている。
Q2.
なぜこの時代のこの文献に関心を持っているのか。
A2.
大航海時代の世界観・宇宙観形成について研究している。素材は、地図・海図・星図である。
事実の洗い出しに、周辺の文献を読み漁っている。
Q1. 本多久夫
時代の確認をしたいのだが、ポルトガルとスペインの時代から次にオランダ、イギリスの時代に移るが、これはまだポルトガルとスペインが力を持っていた時代にポルトガル対オランダの戦いがあったのか。
A1.
その通り。
Q2.
Zealand はオランダのことか。ニュージーランドはこのジーランドを踏まえた名前か。
A2.
その通り。欧州人としてニュージーランドを初めて発見したタスマンはジーランド出身だった。

物語におけるグラフ表示と意図との相関
　高木隆司（東京農工大学・名誉教授）
Q. 佐々木康成
物語の中での作家のカテゴリ化はしているか. カテゴリ間の相互関係について可視化すると新しいことがわかるのでは？

A.
検討してみます。
Q. 石原正三
講演の結論に、『「人間の知能を超える知能」は自己矛盾を含んでいる。しかし、物語に含まれる過去の智慧の集積も借りたら、現代の人間の智慧を超えられる可能性があるかも知れない』とあるが、現状を見ると画一的な領域や専門性に閉じこもろうとすることが多い。単に狭い領域に縛られることなく、領域を超えるだけでも可能性はあるのではないか。
A.
そうだと思う、専門領域を超えるという意味で形の科学会の存在意義がある。

標準写像における横断性の新しい証明法
　山口喜博（元 帝京平成大学）
Q. 手嶋吉法
ホモクリニック点に漸近している反転サドルは通常の鞍形で良いか。「反転サドル」はどの様な形をイメージすれば良いか。
A.
サドルとして通常の峠点がイメージできます。峠を降っていく場合、どんどん峠点から離れます。 これは固有値が +1 より大きいことが原因です。 反転を伴うサドルの場合、 峠点をいったりきたりしながら峠点から離れていることをイメージしてください.。これは固有値が -1 より小さいことが原因です。
Q. 石原正三
安定多様性と不安定多様性の境界でのサドル型と反転サドル型の形状の変化は、ポテンシャルの形状変化のイメージと同様に考えてよいか。
A.
そう考えてもよい。

<u>形と知</u>
オンライン学習システムでの学生の記述ドリル解答に見られる文章パターン
　宮本光一郎（東京学芸大学）、松浦執（東京学芸大学）
Q. 安部桂太
解答を採点する際には、解答者がたくさんいる中で、「どういう解答が点数が高くて、こういう解答が（点数が）低い」という重みづけをする必要があると考えられるが、発表のようなパターンが出ると分かった上で、どのような重みづけをする必要があると考えているか。
A.
今発表は「他人に説明をする文章には論理的な型が存在する」という仮定に基づき、学生の解答パターンを分析することを主目的としました。ある程度模範的な解答の定まっている短文記述の領域とは異なり、意見や考えを述べる形式の長文記述では自動採点（点数化）にはまだ至っておりませんので、点数化の際の重みづけに関しましては今後の研究課題となっております。
Q. 海野啓明
平均 175 文字程度の解答を人間が採点するのか。またどの程度の時間がかかるか。
A.
あまり細かな採点はしておらず、興味ある内容がでてきたら評価する程度です。175 文字程度なら全体を把握しやすいので、時間はかかりません。しかし、もっと長い解答が多い場合には、ある程度の自動化が欲しいと感じます。

三文字を三面図として形成される立体について
　阿竹克人（(株) 阿竹研究所）
Q. 佐々木康成
設計のとき正射影でつくるが、見るときは投視投影で見るので、その差を埋める設計をしてもらえるとよいかと思うが、特に大きなものであると感じる場合がある。
A.
あまり見え方に差はないと思っています。むしろ面白い形が思いもよらずに出てくるのが楽しいです。
Q. 松浦昭洋
三文字の置き方（配置）には任意性があると思うが、どう決められているか。また、立体が作れないのはどんなときか。
A.
文字の性質を活かして選択している。

色の形「ペーパークロマトグラフィックス」
　河野奈菜子（お茶の水女子大学）
Q. 安部桂太
インク成分がわからないと原理に落とし込むことが難しいのではないか。
A.
食用色素（食紅）等、既知の試料を用いて研究中です。
Q1. 佐々木康成
シミュレーションにする際に、どのようなパラメータが必要だと思うか。
A1.
十分な考察に至っていません。温湿度、給水速度、乾燥速度が必要だと思います。色素ごとの特徴も分析する必要があると思います。
Q2.
パラメータはそれだけでよいと思うか。
A2.
少ないと思われます。これから細かく分けて実験を進める予定です。
Q3.
水性ペンで描いてからの時間は厳密に計っているか。
A3.
一日以上は置いたが、厳密には計っていません。

<u>形の科学一般</u>
2 番目に小さい n 次元多胞体
　宮崎興二（京都大学・名誉教授）
Q1. 手嶋吉法
k 番目に小さい n 次元多胞体は(k-1)番目から、もれなく導出できるという理解で正しいか。
A1.
報告者は多胞体を抽象的な理論面から考えたのではなく、形の科学にふさわしく、3 次元に投影された具体的な形で捉えて、それを側胞(側面の 4 次元版)の形と個数で区別し模型を作った。その場合、数学的な理論が不十分な投影という独特の操作が必要なこともあって、結局、(k-1)番目からもれなく k 番目を具体的な形を持たせて導出する作業は次元が上がるとともにきわめて困難になる、と指摘することになった。
それに対して本報告の直後にフロアから、数学上は、G. M. Ziegler らが、「n 次元空間における (n+2)個の頂点を持つ多胞体の個数は $n^2/4$ を超えない最大の整数になる」という定理を紹介している旨の指摘があった。ただしこの場合は、側胞でなく頂点の個数とそのトポロジカルなつながり方で理論的に多胞体が捉えられ、その双対関係に従って、n 次元空間で(n+2)個の側胞を持つ多胞体の個数は $n^2/4$ を超えない最大の整数になる、ということが知られるのみである。つまりここには、本報告で重視した側胞の具体的な形についての情報はない。結局、k 番目に小さい n 次元多胞体の個数は(k-1)番目からもれなく導出できるが、多方面へ応用する場合に重要な形については明確ではない、ということになる。
Q2.
本日の結論は 2 番目に小さい 4 次元多胞体は「現状では 4 種」ということで良いか。5 次元以上は不明で良いか。
A2.
報告者は具体的な模型を手掛かりにして 4 種類を見つけた。この個数は A1 で触れた「n 次元空間における(n+2)個の頂点を持つ多胞体の個数は $n^2/4$ を超えない最大の整数になる」という定理に適っている。したがって個数、形とも本報告の 4 種類ですべてといえる。また 5 次元以上については、個数は

この定理により明確（例えば 5 次元の場合は 6 種類、6 次元の場合は 9 種類)で、その形についても、本報告から類推することにより決定することができると思われる。

4 次元正多胞体のリンゴの皮むき展開図について II
海野啓明（仙台高等専門学校・名誉教授）