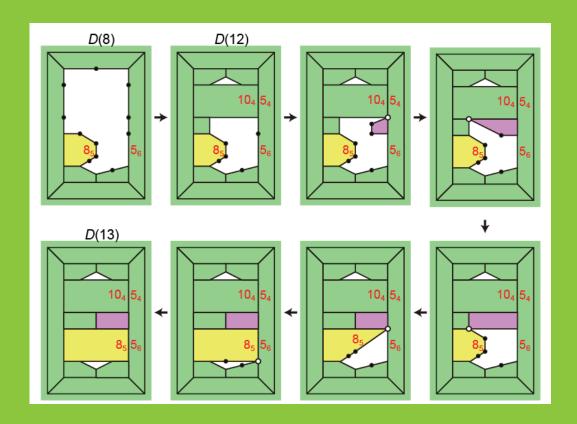


Journal of the Society for Science on Form



形の科学会

http://katachi-jp.com/

形の科学会誌 第32巻 第1号 (2017)

目 次

【解説論文】	
多面体コード - 多面体に隠されていた規則 -	
西尾憲吾,宮崎剛英]
【シンポジウム】	
第82回 形の科学シンポジウム 「産業技術とかたち」	
討論記録	41
【会告など】	
会告	45
原稿募集	54

多面体コード

- 多面体に隠されていた規則 -

西尾憲吾*, 宮崎剛英

産業技術総合研究所 〒305-8568 つくば市梅園 1-1-1 中央第 2

*k-nishio@aist.go.jp

Polyhedron code

- Polyhedron's hidden rules -

Kengo Nishio, Tkehide Miyazaki

National Institute of Advanced Industrial Science & Technology (AIST), Central 2, Umezono 1-1-1, Tsukuba, 305-8568, Japan

(2017 年 4 月 7 日受付, 2017 年 6 月 15 日受理)

Abstract: This paper is a commentary on the polyhedron code which we have created recently [Sci. Rep. 6, 23455 and Sci. Rep. 7, 40269]. The polyhedron code consists of (1) an encoding algorithm for converting a way of how polygons are arranged to form a polyhedron into a p_3 -codeword (p_3 for short) and (2) a decoding algorithm for recovering the original polyhedron from its p_3 . By generalizing the polyhedron code, we have created the polychoron code for representing polychora.

Keywords: polygon, polyhedron, polychoron, polytope, tiling

1. イントロダクション

多面体は人類が最も長く研究してきた対象の一つと考えてよいでしょう。エジプトのギザにあるピラミッドの建設に四角錐の幾何学が応用されていることを考えると、多面体の研究は少なくとも 4500 年以上の歴史を持つことになります [1,2]。このように長い歴史を持つ多面体ですが、驚くべきことに、プラトンの多面体やアルキメデスの多面体などの対称性の高い多面体を除くと、無限に存在する多面体のほとんどに名前がありません。多面体は複雑な形を表現するための基本となる形です。その多面体に名前がなければ形をうまく表現できません。そして、形を表現できなければ、形を理解することはできません。なぜ無限に存在する多面体のほとんどに名前がないのでしょうか?対称性の高い多面体はその美しさから人々に注目されてきたのに対し、美しくないその他多数の多面体はこれまであまり興味を持たれていなかったからだと著者は考えます。興味の対象が対称性の高い形だけであれば、対称性の低い多面体に名前がなくても問題にならないでしょう。しかし、人類の興味の範囲が科学技術の進歩とともに広がるにしたがい、多面体に名前がないことが次第に問題になってきました。

著者の専門である材料科学の分野では、計算機の発展にともない 1950 年頃から、液体やアモルファスの原子構造がシミュレーションを用いて盛んに研究されるようになりました [3-6]。原子が周期的に配列した結晶と異なり、原子が不規則に配列した液体やアモルファスの原子配列を理解することは現在でも挑戦的な課題です [7-11]。シミュレーションを用いて液体やアモルファスの構造モデルを作ると、すべての原子の座標を手に入れることができます。しかし、すべての座標データを知っているからといって、原子配列を理解できたとはいえません。原子配列を理解するためには、座標データから重要な情報を人間が理解できる形で抽出する必要があります。そのための方法の一つにボロノイ多面体解析があります。この方法では、原子をボロノイ多面体に置き換えて、ボロノイ多面体による空間充填として原子配列を表現します(図 1)。注目している原子のボロノイ多面体の形とその原子を取り囲む最隣接原子の配列パターンが一対一に対応しているため、ボロノイ多面体の形を調べることによって注目している原子近傍の原子配列を理解することができま

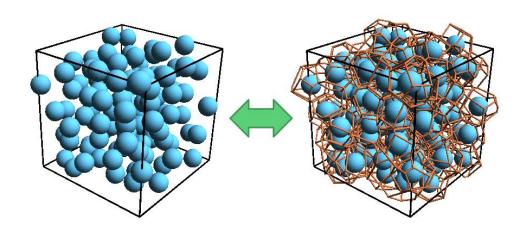


図1:ボロノイ多面体の空間充填による原子配列の表現。多面体の中に原子が1個だけ入っている。多面体の形は隣接原子の配列パターンを表している。

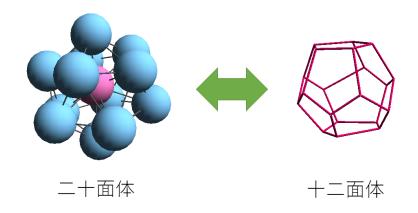


図2:原子配列とボロノイ多面体の関係。

す。例えば、ある原子のボロノイ多面体が十二面体であるとすると、その原子に隣接する原子は二十面体の頂点を形成するように配列しています(図 2)。ボロノイ多面体に名前があれば、その名前によって原子配列を表現することができますが、不規則な原子配列に関係する多種多様なボロノイ多面体のほとんどに名前がありません。液体やアモルファスの不規則な原子配列を理解するためには、任意の多面体に名前を与える方法が必要です。

多面体に名前を与えることは、一見、簡単なことだと思うかもしれませんが、実はとても奥の深い問題です。このことを説明するために、まずは多角形の名前について説明したいと思います。多角形に名前を与えるということは、注目したい共通の性質に従って多角形を分類することです。我々は、辺が三つの多角形を三角形、辺が四つの多角形を四角形、辺が五つの多角形を五角形と呼んでいますが、このとき、辺の数で多角形を分類しています(図 3a)。この分類法では長さや角度といった測量の違いを無視していますが、情報の細部を落とした結果、人間が容易に扱うことができる便利な名前になっています。じっさい、私たちは「三角形」、「四角形」、「五角形」といった名前を日常的に使っています。本記事では辺は曲がってもよいとして、図 3b のような図形も四角形と呼ぶことにします。

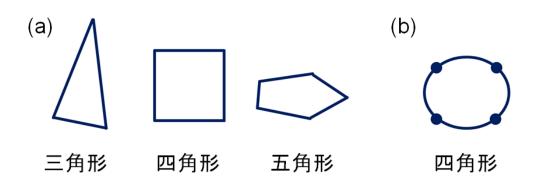


図3:辺の数による多角形の分類。

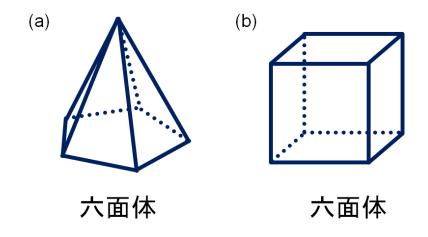


図4:面の数による多面体の分類。

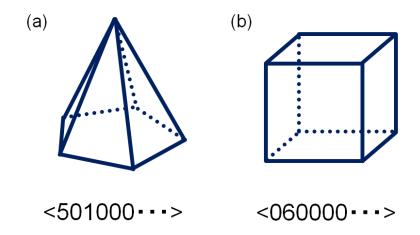


図5:ボロノイ指標による多面体の分類。

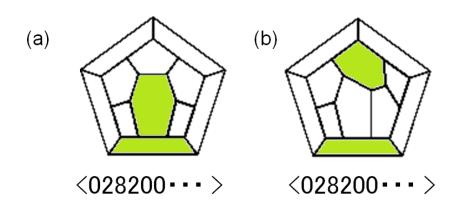


図 6: ボロノイ指標の問題点。多面体をグラフで表している。六角形を塗りつぶして表している。

さて、1次元の辺の数で分類して2次元の多角形に名前が付けられていますが、この方法を拡張して、2次元の面の数で3次元の多面体を分類するとどうなるでしょうか?図4aと4bに描いている多面体はどちらとも六つの面からなる多面体なのでどちらとも六面体となります。しかし、図4aは三角形と五角形から作られているのに対し、図4bは四角形だけでできています。このように、異なる形をした多面体が同じ名前になるため、面の数で分類して得られる名前は便利な名前とはいえません。

不規則原子配列のボロノイ多面体解析では、しばしば、ボロノイ指標 $(n_3n_4n_5\cdots)$ を用いて多面体を分類します。ここで、 n_i は多面体を構成している面のうちi角形の形をした面の数を表しています。図 4a の多面体は5 枚の三角形と1 枚の五角形から作られているので、ボロノイ指標を用いて表すと $(501000\cdots)$ となります(図 5a)。一方、6 枚の四角形から作られている図 4b の多面体は $(060000\cdots)$ となります(図 5b)。ボロノイ指標を用いると、面の数では分類できなかった図 4a と 4b の多面体を区別することができるようになります。しか

し、異なる形をした多面体が同じボロノイ指標を持つことがよくあります。例えば、図 6a と 6b の多面体のボロノイ指標はともに(028200…)ですが、図 6a の二枚の六角形は隣接しているのにたいし、図 6b の二枚の六角形は離れています。このように、異なるボロノイ多面体が同じボロノイ多面体とみなされる場合があるため、ボロノイ指標を用いても液体やアモルファスの原子配列を詳細に調べることはできません。

さて、長さや角度といった測量を無視するという条件のもとで多面体の形を区別するということは、多面体の面の配列パターンを区別するということです。それは、多面体の頂点と辺が作る多面体グラフを区別するということと等価です。多角形の場合、辺の数を指定すると多角形の頂点と辺が作るグラフが決まりました。しかし、多面体の場合、面の数やボロノイ指標を指定してもグラフは一つに定まりません。多面体に名前を付けるのが難しい理由はここにあります。

さて、多面体グラフを分類する方法の一つにt-指標を用いた分類があります [12]。t-指標は氷クラスターの水素結合ネットワークを分類するために著者の一人が考えた指標です。t-指標を用いるとボロノイ指標では区別できなかった多面体を区別できるようになることが経験的に分かっていますが、すべての多面体グラフの同値判定を行えるのかどうか厳密には分かっていません。そのため、多面体を完全に分類できたのか?という問題が常に付きまとう方法でした。

上述のように多面体の分類法に関して思案していた中、E. A. Lazar らは [13]、ボロノイ 多面体解析に Weinberg コードワード [14,15]を適用しました。Weinberg コードワードは 3 連結平面グラフ (多面体グラフは 3 連結平面グラフの一種)の同値判定を行うために考案 された数列で、Weinberg コードワードを用いると多面体グラフを厳密に分類することができます。しかし、Weinberg コードワードにも問題点がありました。例えば、十二面体を Weinberg コードワードで表すと「1234515678189102101112312131441415615161771718918191119201320162019181716151413121110987654321」となります。このように長いコードワードを人間が扱うのは困難です。

長すぎるという問題がありますが、多面体を厳密に区別するための素晴らしい手法ですので、Weinberg コードワードの仕組みを調べてみました。多面体から Weinberg コードワードを生成するさい、図 7 のようにパスを描いていきます。何度かパスを描いていくうち

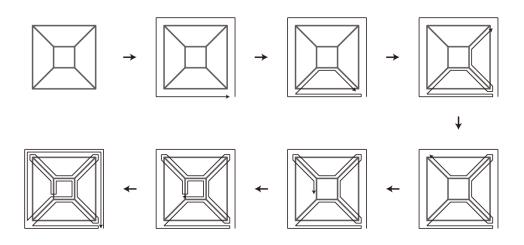


図7:Weinbergコードワードの生成過程。

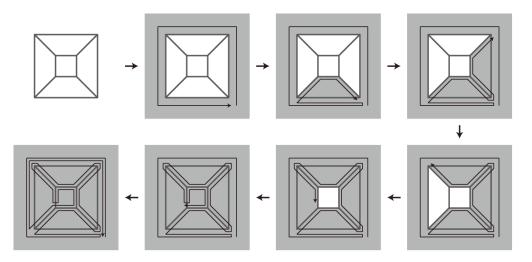


図 8:Weinberg コードワードの生成過程。パスに囲まれた面を塗りつぶして表している。

に、ある重要な事実に気が付きました。それは、多面体の面を一つずつ囲むようにパスが描かれているという事実です(図 8)。このことから、面の名前の並びで多面体を表現するような方法を構築できるのではないかというアイディアが浮かびました。このアイディアを発展させて、多面体を構成する多角形の並び方によって多面体を表現する理論を創出して Scientific Reports 誌で発表しました [16,17]。我々はこの理論を多面体コードと呼んでいます。

多面体コードは(1)多面体を多面体コードワードとよぶ数列に変換するエンコード法と (2)多面体コードワードから元の多面体を復元するデコード法からなります。補足しておくと、多面体コードワードとは多面体を表す数列、すなわち多面体の名前、であるのに対し、 多面体コードとは多面体と多面体コードワードの間にある規則、いいかえると構成要素である多角形の並び方の規則を記述したものです。十二面体を多面体コードワードで表すと「55555555555」となります。5が12回続いているので、「5¹²」と短く表すこともできます。この例から明らかであるように、多面体コードワードは Weinberg コードワードよりも短くて扱いやすいコードワードです。しかし、それ以上に重要な点は、多面体コードは4次元以上の多胞体を扱えるように簡単に拡張できる点です。ここで、多胞体とは3次元の多面体と2次元の多角形を一般の次元に拡張したものです。多面体は3次元の多胞体です。Weinberg コードは多面体を表現する方法ですが、4次元以上の多胞体を扱えるように拡張できるような理論ではありません。著者の知る限り、任意の次元の任意の多胞体を簡潔に表現する方法は、我々の理論以外にありません。

この解説記事では、多面体コード、そして、多面体コードを4次元へ拡張した4次元多胞体コードを詳しく説明したいと思います。

2. 多面体コード

2.1. 多角形の部位と多面体の部位

多面体コードでは、多角形を多面体の部品とみなし、多角形の組み合わせで多面体が作

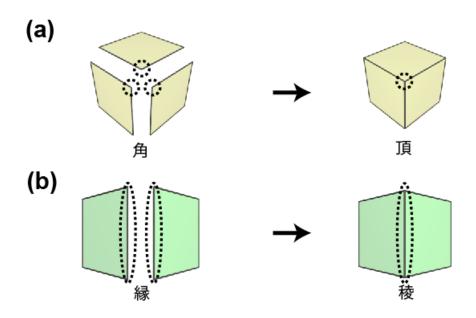


図 9: 多角形の部位と多面体の部位。多角形の角が集まる 0 次元領域を多面体の頂とよぶ。 多角形の縁が集まる 1 次元領域を多面体の稜とよぶ。

られていると考えます。そして、多面体の部位と多角形の部位を区別します。具体的には、 多角形の頂点を「角(かど)」、多面体の頂点を「頂(いただき)」と呼んで、多角形の頂点と 多面体の頂点を区別します(図 9a)。多面体の頂とは3つ以上の多角形の角が出会う0次元 領域です。同様に、多角形の辺を「縁(へり)」、多面体の辺を「稜(りょう)」と呼んで、多 面体の辺と多角形の辺を区別します(図 9b)。多面体の稜とは多角形の縁と縁が出会う1次 元領域です。また、多面体の面は多角形ですが、多面体の部品であることを強調するとき は多角形という言葉を用いるのに対し、多面体の部位であることを強調するときは面とい う言葉を用いることにします。例えば、面も稜も多面体の部位ですので、「面の稜」という 表現を用いる場合があります。同様に、「面の頂」という表現を用いる場合もあります。一 方、稜や頂は多角形の部位ではないので、「多角形の稜」や「多角形の頂」という表現を用 いることはありません。

多面体の部位と多角形の部位の関係を述べるために「生む」という言葉を用います。例えば、図 9a のような状況を、3 つの角が頂を生む。もしくは、頂は 3 つの角から生まれると表現します。同様に、図 9b のような状況を、2 つの縁が稜を生む。もしくは、稜は 2 つの縁から生まれると表現します。また、多角形の角(縁)が頂(稜)を生んでいる場合、単に、多角形が頂(稜)を生んでいると表現します。同様に、縁の端点の角が頂を生んでいる場合、単に、縁が頂を生んでいると表現します。

2.2. 単純多面体

すべての頂が三価である多面体は「単純多面体」とよばれています。頂が三価であるとは、頂に三本の稜が入射していることを意味しています。単純多面体の例として四面体、 六面体、十二面体などを挙げることができます(図 10a)。不規則原子配列のボロノイ多面

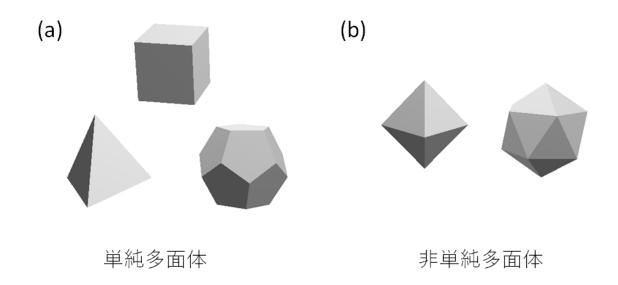


図10:単純多面体と非単純多面体。

体は偶然の一致を除くと単純多面体です。一方、八面体や二十面体は単純多面体ではありません(図 10b)。最初に単純多面体を対象とした方法を説明します。2.7 で説明するように、単純多面体の方法は一般の多面体を扱えるように簡単に拡張することができます。

2.3. デコード法(手順)

多面体コードは多面体を多面体コードワードに変換するエンコード法と、多面体コードワードから元の多面体を復元するデコード法からなっています。詳細な説明はあとで行いますが、エンコード法にデコード法が組み込まれているため、エンコード法を説明するためにはデコード法を説明する必要があります。デコード法を構築するためには、簡単ではあるものの新しい考え方をたくさん導入する必要があります。しかし、完成したデコード法を説明するのは比較的簡単に行えます。そこで、ここでは、多面体コードの概要をつかんでいただくために、多面体をデコードする手順の説明を天下り的に行います。デコード法の構築は、2.5 で行います。

2.3.1. 34443-多面体を復元する方法

結論から言うと、我々の方法では、図 11 に描いた多面体を 34443-多面体とよびます。 34443 という数列は多面体の名前であると同時に多面体の設計図になっています。数列 「34443」のそれぞれの数字は多面体を構成している多角形の名前、すなわち形、を表しています。一番左の数字が 3 であるということは、一番目の多角形が三角形であることを表しています。同様に、二番目から四番目の多角形は四角形、五番目の多角形は三角形であることを表しています。 34443 から多面体を復元するには、最初に、それぞれの数字を多角形に変換します(図 12a)。

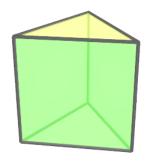


図 11:34443 多面体。

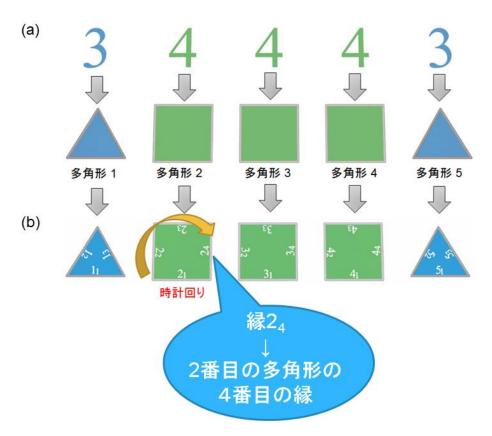


図 12: デコードの手順。

多角形から多面体を作る手順を説明するために、多角形iの縁に時計回りで i_1,i_2,i_3,\cdots と認識番号(ID)を振ります(図 12b)。ここで、縁 i_j とは多角形iのj番目の縁を意味します。この i_j は値を持っています。図の例では、 $1_1,\cdots,1_3,2_1,\cdots,2_4,3_1,\cdots,3_4,4_1,\cdots,4_4,5_1,\cdots,5_3$ の順で値が大きくなるとみなします。

多角形 1 を部分多面体 1 とよびます(図 13a)。部分多面体 1 の縁 1 に多角形 2 の縁 2 をくっつけて得られる構造を部分多面体 2 とよびます(図 13b)。ここで、「孤独縁」という言

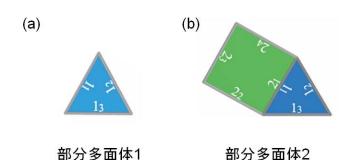


図 13:部分多面体 1 と 2。

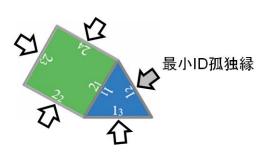


図 14: 孤独縁。

葉を導入します。孤独縁とは他の縁にくっついていない縁のことです。図 14 の例では、縁 1_2 , 1_3 , 2_2 , 2_3 , 2_4 は孤独縁です。一方、縁 1_1 と 2_1 は互いにくっついているため孤独縁ではありません。孤独縁のうち最も ID が小さいものを「最小 ID 孤独縁」とよびます。図 14 の場合、孤独縁 1_2 が最小 ID 孤独縁です。

部分多面体 2 の最小 ID 孤独縁 1_2 に多角形 3 の縁 3_1 をくっつけると図 15a の構造がえられます。さて、多面体の頂とは多角形の角と角が出会う 0 次元領域だと述べましたが、多面体を復元する過程で得られる部分多面体では「孤立した角や集まった二つの角も部分多面体の頂を生む」とみなします。同様に、「孤独縁も稜を生む」とみなします。そうすると、図 15b のように、部分多面体でも頂の価数を考えることができます。完成した単純多面体の頂はすべて 3 価ですが、部分多面体の頂の価数は 2 , 3 , 4 価のいずれかです。特に、4 価の頂を「不都合な頂」とよび他と区別します。その名前の由来は、不都合な頂をそのままにしていると、5 価、6 価、7 価と頂の価数が制限なく大きくなって単純多面体を作ることができなくなることにあります。図 15b の例では、黒丸で示した頂が不都合な頂です。不都合な頂は必ず 2 つの孤独縁から生まれています。多面体を復元する過程で不都合な頂が作られたら、不都合な頂を生んでいる 2 つの孤独縁を互いにくっつけます(図 16)。その結果、4 価の頂が 3 価になり、不都合な頂が取り除かれます。こうして得られる構造を部分多面体 3 とよびます。

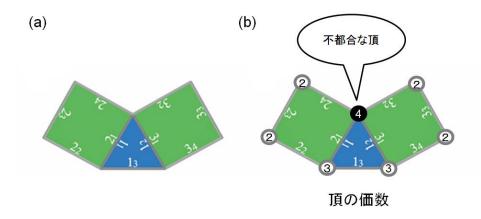
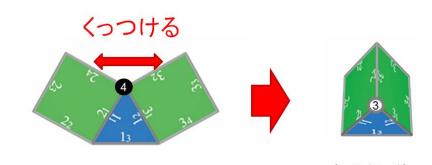


図15:部分多面体3と頂の価数。



部分多面体 3

図 16:不都合な頂を取り除く。

あとは上述の作業を繰り返すだけです。具体的には、部分多面体 3 の最小 1D 孤独縁 1_3 に多角形 4 の縁 4_1 をくっつけます。そうすると不都合な頂が作られますが、その不都合な頂を取り除いて得られる構造が部分多面体 4 です。その後、部分多面体 4 の最小 1D 孤独縁 2_3 に多角形 5 の縁 5_1 をくっつけます。そうすると不都合な頂が作られますが、その不都合な頂を取り除くと孤独縁がなくなり、多面体が完成します。

さて、数列 34443 のほかにも、43434 と 44343 から図 11 の多面体を復元することができます。複数の数列が同じ多面体を表すのは不便ですので、数列を数とみなし、最も小さい三万四千四百四十三に対応する数列 34443 を名前として多面体に割り当てます。このように、任意の多面体に唯一の数列を割り当てることができます。

2.3.2. 多面体コードワード

2.3.1 で述べたように、図 11 の多面体は 34443 と表されます。多面体を表す 34443、すなわち多面体の名前を、多面体コードワード (p_3) とよびます。 p_3 の添え字の 3 は、多面体

が3次元の図形であることを示しています。

一般に、多面体コードワードは「多角形の並びのコードワード (ps_2) 」と「縁の対の並びのコードワード(sp)」からなります。一般の多面体の多面体コードワードを形式的にあらわすと、

$$p_3 = ps_2; sp, \tag{1}$$

です。ここで、";"は分離記号です。 p_3 に含まれる ps_2 を形式的に表すと、

$$ps_2 = p_2(1)p_2(2)p_2(3)\cdots p_2(F),$$
 (2)

です。ここで、 $p_2(i)$ はi番目の多角形の名前、すなわち多角形iの縁の数、を表しています。Fは多面体の面の数、いいかえると多角形の数、を表しています。一般に、 $p_3=ps_2$; spですが、図 11 の多面体の p_3 は ps_2 だけでできています。すなわち、 $p_3=ps_2=34443$ です。 ps_2 だけで表すことができる多面体は沢山ありますが、なかには ps_2 だけでは表すことができない多面体もあります。例えば、図 17 に示した Tutte の多面体は ps_2 だけでは表すことができません。数字の 10 をAで、数字の 13 をE で表すと、Tutte の多面体の p_3 は $p_3=4555A4559554AA555555454555; <math>E_6$ 9e0です。";"の前にある数列 e000年のe10年のe1年のe2年の前にあるとを表しています。一方、";"の後にある数列 e26年のe2年のいていることを表しています。e3年のいていることを表しています。e4年の表示の後にある数列 e50年のe5年のいていることを表しています。e5年のいていることを表しています。e5年の表示の後に表すと、

$$sp = y(1)x(1)y(2)x(2)y(3)x(3) \cdots y(N_{nc})x(N_{nc}),$$
 (3)

です。y(i)とx(i)が対になって表れていますが、これを「必要な追加の対」とよびます。語源の説明はあとで行いますが、ここでは、y(i)とx(i)は縁の ID で、縁y(i)と縁x(i)がくっついていることを示しているとだけ覚えてください。 N_{nc} は必要な追加の対の数です。

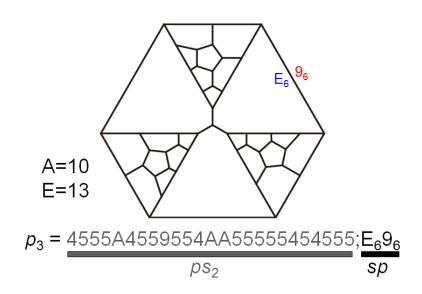


図 17: Tutte の多面体。

2.3.3. 多面体コードワードから多面体を復元する方法

34443-多面体を復元する方法を 2.3.1 で説明しましたが、ここでは一般の多面体を復元する方法を説明します。アルゴリズムの裏付けはあとで行いますが、以下の手順で $p_3 = ps_2$; spから多面体を復元することができます。

アルゴリズム A(図 18)

- 1. $i = 1 \ge j \le 3$.
 - (a) 多角形 α は $p_2(\alpha)$ 角形 $(1 \le \alpha \le F)$ 。
 - (b) 時計回りで多角形 α の縁に $ID(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots, \alpha_{n_2(\alpha)})$ を振る。
 - (c) 多角形 1 が部分多面体 1。
- 2. $i = i + 1 \ge j \le 3$.
 - (a) 多角形iの縁i₁を部分多面体i-1の最小 ID 孤独縁にくっつける。
 - (b) $y(\beta)$ が多角形iの縁ならば、縁 $y(\beta)$ を縁 $x(\beta)$ にくっつける $(1 \le \beta \le N_{nc})$ 。
 - (c) 不都合な頂が存在したら取り除く。
 - (d) こうして得られる構造が部分多面体i。
- 3. すべての多角形を配置するまで手順2を繰り返す。

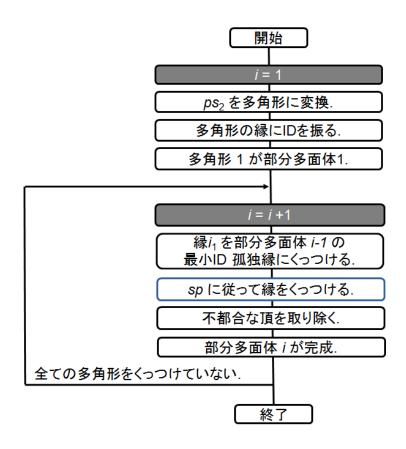


図 18:多面体を復元する手順。

2.4. エンコード法

2.4.1. Schlegel 図

これまでは 3 次元図形として多面体を取り扱ってきましたが、今後は利便性から図 19a のように多面体を 2 次元平面に射影した Schlegel 図 [2,18]を用います。ここで 2 点注意したいことがあります。1 点目は、Schlegel 図の外枠の多角形 abc の外部は、3 次元空間に置かれた多面体の多角形abcの内部に対応している点です。2 点目は、Schlegel 図の外枠の多角形以外の多角形では、反時計回りで多角形を一周することが、3 次元空間に置かれた多面体の多角形を時計回りで一周することに対応している点です。例えば、図 19a の Schlegel 図では $a \to c \to z \to x \to a$ は反時計回りですが、3 次元空間に置かれた多面体では時計回りです。一方、Schlegel 図の外枠の多角形abcの時計回りは、3 次元に置かれた多面体の多角形abcの時計回りと一致します。Schlegel 図を用いて 34443-多面体を復元する過程を表すと図 19b の様になります。

2.4.2. *ps*₂の作り方

多面体から p_3 を生成する際、最初に種として任意の多角形とその縁を選びます。種の選び方によって得られる p_3 が異なりますが、 p_3 を数とみなして最も値の小さいものをユニークなコードワードとします。そうすることで多面体に唯一の p_3 を与えることができます。 p_{s_2} だけからなる p_3 を数に変換する方法は 2.3.1 で説明しましたが、spを含む一般の p_3 を数

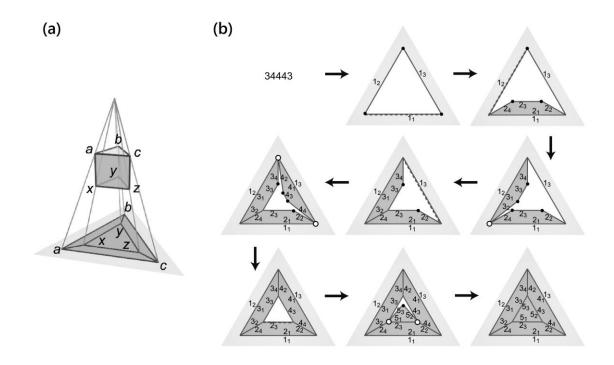


図 19: Schlegel 図。(a) Schlegel 図の作り方。(b) Schlegel 図を用いたデコード過程の説明。黒丸は 1 価の頂。白丸は不都合な頂。

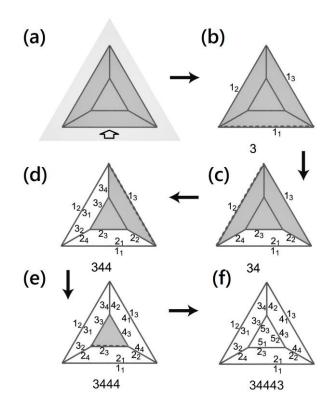


図 20:エンコードの手順。最小 ID 孤独縁を点線で表している。

に変換する方法は2.4.7で説明します。

 p_3 は ps_2 とspからなりますが、最初に ps_2 の作り方を説明します。 ps_2 は $p_2(i)$ の並びですので、 ps_2 の生成とは多角形に ID を振ることです。すでに ID が振られた多角形とこれから ID を振る多角形を区別するために色を用います。最初にすべての多角形を色付けし、ID を振った多角形を透明にします。

これから、34443-多面体を例にとって ps_2 を生成する手順を説明します。図 20 では 34443- 多面体を Schlegel 図で表しています。種として外枠の多角形と矢印の縁を選ぶとします(図 20a)。種となった多角形が多角形 1 です。したがって、 $p_2(1)=3$ です。種となった縁から時計回りで多角形 1 の縁に ID を振ります。そして、多角形 1 を透明にします(図 20b)。

デコードの過程では他の縁にくっついていない縁を孤独縁とよびましたが、エンコードの過程では色付いた多角形にくっついている透明な多角形の縁を孤独縁とよびます。図20bでは、縁 1_1 、 1_2 、 1_3 が孤独縁です。そして、IDがもっとも小さい縁 1_1 が最小 ID 孤独縁です。この最小 ID 孤独縁 1_1 にくっついている多角形が多角形 2 です。したがって、 $p_2(2)$ = 4です。縁 1_1 にくっついている縁から時計周りで多角形 2 の縁に ID を振り、多角形 2 を透明にします(図 20c)。図 20c では反時計周りで ID が振られていますが、これは、Schlegel図の外枠以外の多角形の反時計周りは、3 次元空間に置かれた多面体の多角形の時計回りに対応するからです。

あとは上述の作業を繰り返すだけです。具体的には、最小 ID 孤独縁 1_2 にくっついている多角形が 3 番目の多角形ですので、 $p_2(3)=4$ です。縁に ID を振ったのち、多角形 3 を透明にします(図 20d)。多角形 4 は最小 ID 孤独縁 1_3 にくっついている多角形ですので、

 $p_2(4)=4$ です。縁に ID を振ったのち、多角形 4 を透明にします(図 20e)。多角形 5 は最小 ID 孤独縁 2_3 にくっついている多角形ですので、 $p_2(5)=3$ です。縁に ID を振ったのち、多角形 5 を透明にします(図 20f)。すべての多角形が透明になり、 $ps_2=34443$ の完成です。 まとめると、種を選んだ後、以下の手順で ps_2 を生成することができます。

アルゴリズム B(図 21)

- 1. $i = 1 \ge j \le 3$.
 - (a) 種として選ばれた多角形が多角形 1。
 - (b) 種として選ばれた縁から時計回りで多角形 1 の縁に $ID(1_1,1_2,1_3,\cdots,1_{p,(1)})$ を振る。
 - (c) 多角形 1 を透明にする。
- 2. $i = i + 1 \ge j \le 3$.
 - (a) 最小 ID 孤独縁にくっついている多角形が多角形i。
 - (b) 最小 ID 孤独縁にくっついている縁から時計回りで多角形iの縁に $\mathrm{ID}(i_1,i_2,i_3,\cdots,i_{p_2(i)})$ を振る。
 - (c) 多角形iを透明にする。
- 3. すべての多角形が透明になるまで手順2を繰り返す。

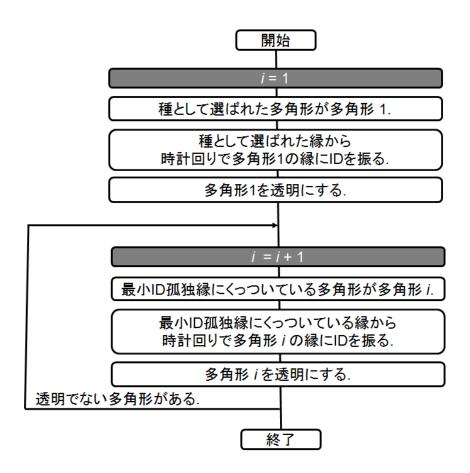


図 21: ps₂を生成する手順。

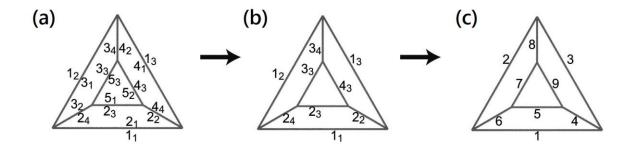


図 22: 稜に ID を振る手順。

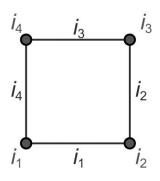


図 23: 角に ID を振る手順。

 ps_2 を生成することによって多面体の面に ID を振ることができますが、稜と頂にも ID を振ることができます。稜の ID は多面体コードを 4 次元多胞体コードへと拡張するときに用います。頂の ID は単純でない多面体を扱うときに用います。

まずは、多面体の稜に ID を振る方法を説明します。稜に ID を振るために、まずは、多角形の縁の ID を利用して仮 ID を稜に振ります。具体的には、稜は 2 つの縁から生まれているので、その 2 つの縁の ID のうち小さいほうを稜の仮 ID とします(図 22b)。すべての稜に仮 ID を振ったのち、i番目に小さい仮 ID を持つ稜に本 ID としてiを与えます(図 22c)。

次に、多面体の頂に ID を振る方法を説明します。頂に ID を振るために、多角形の角に ID を図 23 のように振ります。縁 $i_{p_2(i)}$ と縁 i_1 が共有する角に i_1 を振ります。 $1 < j \le p_2(i)$ について、縁 i_{j-1} と縁 i_j が共有する角に i_j を振ります。こうして振られた多角形の角の ID を利用して頂に ID を振ります。具体的には、頂を生む角の ID のうち最も小さいものを頂の仮 ID とし、i番目に小さい仮 ID を持つ頂に本 ID としてiを与えます。以上のことから、 ps_2 を生成する方法は多面体の部位に ID を振る方法であるともいえます。この方法を用いて単純でない多面体の部位にも ID を振ることができます。しかし、得られた ps_2 をアルゴリズム A にしたがってデコードしても多面体を復元することはできません。

2.4.3. tsp⁽⁰⁾の概要

spの生成方法を説明するためには、簡単ですが沢山の新しい考え方を導入する必要があります。その一つにspを生成するための中間生成物ともいえる「 $tsp^{(0)}$ 」があります。 $tsp^{(0)}$ をゼロ番目の仮のspとよびます。詳細な説明はあとで行いますが、 $tsp^{(0)}$ は次のような性質を持つように作られています。

- (1) ps_2 ; $tsp^{(0)}$ をデコードすると元の多面体を復元できるが、
- (2) 多面体の復元に必要でない情報も含まれる可能性がある。

tsp⁽⁰⁾から不必要な情報を取り除いたものがspです。

ここで、エンコードのさいに得られる部分多面体の並び $E(1)E(2)E(3)\cdots E(F)$ とデコードのさいに得られる部分多面体の並び $D(1)D(2)D(3)\cdots D(F)$ に注目します。 $ps_2;tsp^{(0)}$ をデコードすると、 $1\leq i\leq F$ でE(i)=D(i)になるように $tsp^{(0)}$ は作られています(図 25a)。しかし、実際に必要なのはE(F)=D(F)だけです。そこで、i< Fで $E(i)\neq D(i)$ を許し、 $tsp^{(0)}$ から不必要な情報を取り除いたものがspです(図 25b)。

さて、*tsp*⁽⁰⁾の詳細を説明するためには「追加の対」という言葉を導入する必要があります。そのためには「プロット」という言葉を導入する必要があります。次の章でプロットの説明を行います。

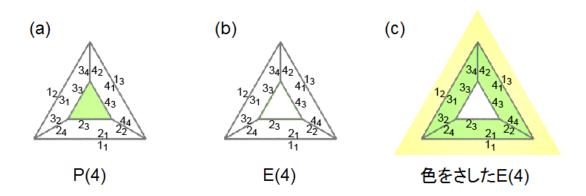


図 24:多面体P(i)と部分多面体E(i)。

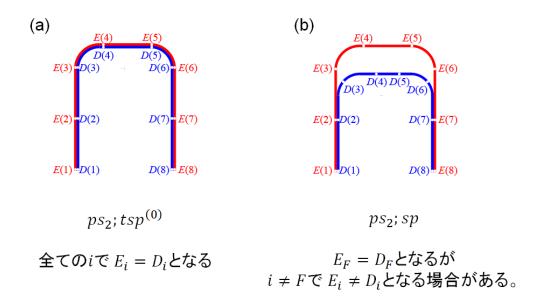


図 $25: tsp^{(0)} \& sp$ の違い。

2.4.4. プロット

異なる多角形の孤独縁が隣接している場合、隣接する孤独縁は連結しているとし、連結した孤独縁の集まりを「プロット」とよびます。また、連結していない単独の孤独縁もプロットとよびます。プロットを構成する孤独縁の ID のうち最も小さいものをプロットの ID とします。図 26 の例では、孤独縁 1_2 と 2_4 は異なる多角形の縁なので連結しています。同様に、孤独縁 1_4 と 2_2 も連結しています。一方、孤独縁 1_2 と 1_3 は同じ多角形の縁なので連結していません。同様に、孤独縁 1_3 と 1_4 、孤独縁 2_2 と 2_3 、孤独縁 2_3 と 2_4 は連結していません。したがって、孤独縁 1_2 と 2_4 はプロット 1_2 を、孤独縁 1_4 と 2_2 はプロット 1_4 を、孤独縁 1_3 はプロット 1_3 を、孤独縁 1_2 と 1_3 を作っています。プロット 1_3 を構成する孤独縁 1_2 と 1_3 と 1_4 は同じ四角形にくっついています。一般に、同じプロットを構成する縁はすべて同じ多角形にくっついています。

論文 [16]では「隣接する孤独縁から生まれた頂が 2 つの透明な多角形からも生まれている場合、隣接する孤独縁は連結している」としましたが、解説記事を書いている最中に、



図 26: プロット。縁と縁の連結部分を○で表す。

「異なる多角形の孤独縁が隣接している場合、隣接する孤独縁は連結している」とした方が簡潔であることに気が付いたので、そのように説明することにしました。

2.4.5. tsp⁽⁰⁾の作り方

tsp⁽⁰⁾は追加の対を集めたものですので、まずは追加の対を説明します。ps₂を生成してい る時、多面体は次第に透明になっていきます。その過程をP(1)P(2)P(3)…P(F)の様に表す ことができます。追加の対は多角形iが透明になったときに得られる多面体P(i)と多角形iに 関係しています。このことを説明するために、図 27a の多面体のps,を、種として外枠の多 角形と矢印で示した縁を選び、2回生成します。1回目の生成が終わった時点で多面体と 多角形のすべての部位に ID が振られているので、すべての部位の ID をあらかじめ知って いる状況で2回目の生成を行うことができます。図27bは多角形1が透明になったときに 得られるP(1)です。P(1)では縁 1_1 、 1_2 、 1_3 、 1_4 が孤独縁ですが、これらはそれぞれプロット 1_1 、 1_2 、 1_3 、 1_4 を作っています。P(1)にはそれ以外のプロットはありません。P(1)の多角形 2 は最小 ID プロット 1_1 にくっついています。一般に、多面体P(i-1)では、多角形iは必ず 最小 ID プロットにくっついています。それは、定義より、P(i-1)の最小 ID 縁にくっつ いている多角形が多角形iだからです。図 27c に示しているP(7)では、孤独縁56と63がプロ ット56を作っています。多角形 8 は最小 ID プロット34に加えて、プロット56にもくっつ いています。このプロット 5_6 を「追加のプロット」とよびます。一般に、多面体P(i-1)に おいて、多角形iがくっついているプロットのうち、最小 ID プロット以外のプロットを追 加のプロットとよびます。さて、定義より、追加のプロット56を構成する孤独縁のうち最 も ID が小さいものは孤独縁 5_6 です。この孤独縁 5_6 は多角形 8 の縁 8_5 にくっついています が、この縁 8_5 と 5_6 の対を追加の対 8_5 5 $_6$ とよびます。ここで、値の大きい 8_5 を 5_6 の前に書いて いる点に注意してください。図 27d にP(9)を示していますが、10454も追加の対です。図 27a の多面体の ps_2 を矢印で示した縁を種として生成した場合、追加の対は 8_55_6 と 10_45_4 にな ります。これらを集めたものが $tsp^{(0)} = 8_5 5_6 10_4 5_4$ です。

一般の*tsp*⁽⁰⁾を形式的に書くと、

$$tsp^{(0)} = y_a(1)x_a(1)y_a(2)x_a(2)y_a(3)x_a(3)\cdots y_a(N_a)x_a(N_a), \tag{4}$$

となります。ここで、 $y_a(i)x_a(i)$ はi番目の追加の対です。 $y_a(i) > x_a(i) \ge y_a(i) < y_a(i) < y_a(i+1)$ を満

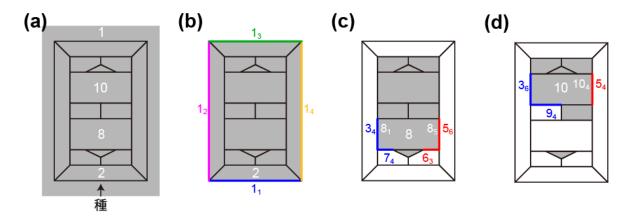
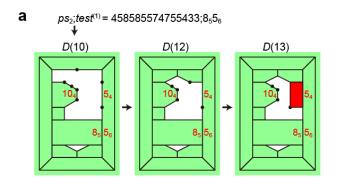


図27:追加の対の説明。

たします。Naは追加の対の数です。

2.4.6. *tsp*⁽⁰⁾から*sp*を作る方法

図 27a の多面体を矢印で示した縁を種としてエンコードすると、 $ps_2; tsp^{(0)} = 458585574755433; 8_55_610_45_4$ が得られます。詳細はあとで説明しますが、2.3.3 で述べたアルゴリズム A は、 $ps_2; tsp^{(0)}$ から元の多面体を復元できるように作られています。しかし、 $tsp^{(0)}$ には多面体を復元するために必要でない情報も含まれている可能性があります。そこで、追加の対 10_45_4 が本当に必要かどうかを調べるために、 $ps_2; tsp^{(0)}$ から 10_45_4 を取り除いた $458585574755433; 8_55_6$ をデコードしてみます(図 28a)。追加の対 10_45_4 に関する情報を持っていないので、多角形 10 を配置した時に得られる部分多面体D(10)では縁 10_4 と 5_4 がくっついていません。そして、D(13)では多角形 13 が縁 5_4 にくっついてしまい、 10_4 を 5_4 にくっつけることができなくなってしまいました。このことから、追加の対 10_45_4 が必要であることが分かりました。一方、 $ps_2; tsp^{(0)}$ から 8_55_6 を取り除いた $458585574755433; <math>10_45_4$ をデーコードすると、D(8)では縁 8_5 と 5_6 がくっついていませんが、D(13)では縁 8_5 と 5_6 がくっついて、最終的に元の多面体を復元できます。従って、追加の対 8_55_6 は不必要です。 $tsp^{(0)}$



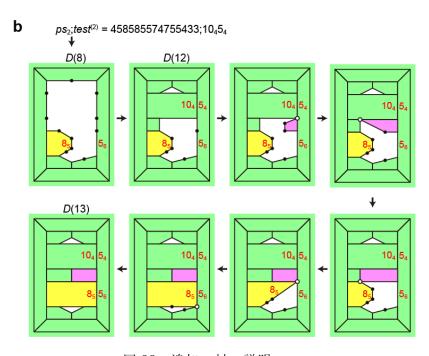


図 28:追加の対の説明。

 $8_5 5_6 10_4 5_4$ から不必要な追加の対を取り除いた $10_4 5_4$ がspです。以下の手順で、一般の $tsp^{(0)}$ からspを作ることができます。

アルゴリズムC

- 1. $i = 0 \ge 5$
 - (a) $tsp^{(0)} = y_a(1)x_a(1)y_a(2)x_a(2)y_a(3)x_a(3) \cdots y_a(N_a)x_a(N_a)$
- 2. $i = i + 1 \ge j \le 3$.
 - (a) $tsp^{(i-1)}$ から $y_a(N_a-i+1)x_a(N_a-i+1)$ を取り除いたものが $test^{(i)}$ 。
 - (b) ps_2 ; $test^{(i)}$ ε \vec{r} \vec{r}
 - ① ps_2 ; $test^{(i)}$ から元の多面体を復元できた場合、 $tsp^{(i)} = test^{(i)}$ 。
 - ② ps_2 ; $test^{(i)}$ から元の多面体を復元できなかった場合、 $tsp^{(i)} = tsp^{(i-1)}$ 。
- 3. $i = N_a$ まで手順2を繰り返す。 $sp = tsp^{(N_a)}$ 。

 $tsp^{(0)}$ から不必要な追加の対を取り除いたものがspです。いいかえると、必要な追加の対を並べたものがspです。

2.4.7. 辞書的順序とユニークな p_3

種の選び方によって異なる p_3 が生成されます。複数の p_3 から唯一の多面体コードワードを選ぶために辞書的順序 $\operatorname{Lex}(p_3)$ を導入します。2.3.1 では、数列 34443、43434、44343 を数とみなし、最も小さい三万四千四百四十三に対応する数列 34443 を名前として多面体に割り当てました。この考え方を拡張したものが辞書的順序です。

 $Lex(p_3)$ をn進法で表された数とみなします。nは十分に大きければどのような数でもよいのですが、どのくらい大きければよいのかは、あとで説明します。 p_3 は p_{S_2} とspからなりますので、 $Lex(p_3)$ も $Lex(p_{S_2})$ と Lex(sp)からなります。まずは $Lex(p_{S_2})$ を説明します。 p_{S_2} = $p_2(1)p_2(2)p_2(3)\cdots p_2(F)$ はF個の数字が並んだ数列です。数列 $p_2(1)p_2(2)p_2(3)\cdots p_2(F)$ をn進法で表示されたF桁の数とみなしたものが $Lex(p_{S_2})$ です。このとき、 $p_2(i)$ は $Lex(p_{S_2})$ のF-i+1 桁目の数です。同様に、数列 $sp=y(1)x(1)y(2)x(2)y(3)x(3)\cdots y(N_{nc})x(N_{nc})$ をn進法で表示された $2N_{nc}$ 桁の数とみなしたものがLex(sp)です。

 $Lex(p_3)$ は $Lex(ps_2)$ と Lex(sp) を 結合して得られるn進法で表示された $F+2N_{nc}$ 桁の数 $p_2(1)p_2(2)p_2(3)…p_2(F)y(1)x(1)y(2)x(2)y(3)x(3)…y(N_{nc})x(N_{nc})$ です。数の結合について補足すると、例えば、十進法で表示された 24(二十四)と 5(五) を結合すると 245(二百四十五) になります。

 $\operatorname{Lex}(p_3)$ をn進法で表示された数とみなすためには、 $\operatorname{ntp}_2(i)$ 、 $\operatorname{y}(i)$ 、 $\operatorname{x}(i)$ より大きく選ぶ必要があります。多面体に含まれる縁の数は $\operatorname{2E}=6(F-2)$ ですので、 $\operatorname{ne}\operatorname{2E}$ より大きな数にすればよいです。ここで、 $\operatorname{2E}=6(F-2)$ は、オイラーの式 $\operatorname{F}-\operatorname{E}+\operatorname{V}=\operatorname{2e}\operatorname{3V}=\operatorname{2E}\operatorname{ne}\operatorname{SP}$ とができます $\operatorname{E}\operatorname{E}\operatorname{SP}$

種の選び方に2E種類あるので、多面体から2E個の p_3 が得られます。注目する多面体とその鏡像を同じ多面体だと考えると、さらに、2E個、合計4E個の p_3 が得られます。4E個の p_3

のうち $Lex(p_3)$ が最も小さいものを選ぶことで、任意の多面体に唯一の p_3 を与えることができます。注目する多面体とその鏡像を同じ多面体だと考えることによって、 p_3 を多面体グラフの同値判定に使うことができます。鏡像を区別したいときは、2E個の p_3 から $Lex(p_3)$ が最も小さいものをユニークとみなします。しかし、こうして作られた p_3 を用いて多面体グラフの同値判定はできません。多面体グラフは多重辺を持たない 3 連結平面グラフです。ここで、多重辺を持たないとは、2 つの頂点を結ぶ辺は多くても 1 つであることを意味しています。多重辺によって囲われた領域を二角形とみなすと、 p_3 を用いて 3 連結平面グラフの同値判定も行うことができます。

2.5. デコード法(構築)

デコード法の手順を 2.3.3 で述べましたが、ここではその裏付けを行います。多面体をエンコードすると、多面体の列 $P(1)P(2)P(3)\cdots P(F)$ が得られます。それぞれのP(i)は同じ多面体を表していますが、多角形の色付けかたに違いがあります。P(i)から色の付いた多角形を取り除くと、多面体の列から部分多面体の列 $E(1)E(2)E(3)\cdots E(F)$ が得られます。P(F)の多角形はすべて透明ですので、E(F)=P(F)です。

 ps_2 ; $tsp^{(0)}$ をデコードすると部分多面体の列 $D(1)D(2)D(3)\cdots D(F)$ が得られます。デコード法の裏付けを行うために、これから、

$$1 \le i \le F \circ D(i) = E(i), \tag{5}$$

になることを示します。D(F) = E(F) = P(F)なので、式(5)を示せば、 ps_2 ; $tsp^{(0)}$ をデコードすると元の多面体が復元されることを示したことになります。

2.4.4 では多面体P(i)に対してプロットを定義しましたが、その定義は部分多面体E(i)にも用いることができます。そして、P(i)でプロットxを構成していた孤独縁はE(i)でもプロットxを構成します。図 27a の多面体を矢印で示した縁を種としてエンコードしたさいに得られるP(7)とE(7)を図 29a と 29b に描いています。P(7)では、孤独縁 3_4 と 7_4 が最小 ID プロット 3_4 を、孤独縁 5_6 と 6_3 は追加のプロット 5_6 を作っています。同様にE(7)でも、孤独縁 3_4 と 7_4 が最小 ID プロット 3_4 を、孤独縁 5_6 と 6_3 がプロット 5_6 を作っています。

これから、数学的帰納法を用いて式(5)を示します。すべての多角形の名前はps2に記録

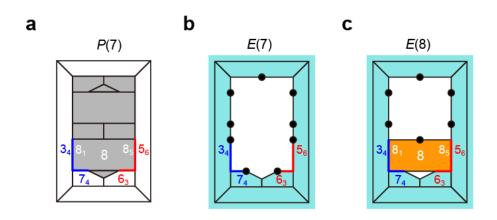


図29:図27aの多面体をエンコードした時に得られる多面体と部分多面体。

されているので、 ps_2 からすべての多角形とその縁の ID を復元することができます。E(1)は多角形 1 の縁に ID を振ったものです。アルゴリズム A-1 にしたがうと、多角形 1 の縁に ID を振ったものがD(1)なので、D(1)=E(1)です。

- (A-2-a) 多角形iの縁 i_1 をD(i-1)の最小 ID 孤独縁にくっつける。
- (A-2-b) $y(\beta)$ が多角形iの縁ならば縁 $y(\beta)$ を縁 $x(\beta)$ にくっつける $(1 \le \beta \le N_{nc})$ 。
- (A-2-c) 不都合な頂が存在したら取り除く。

順は次の通りです。

不都合な頂を取り除く操作によって同じプロットに属する縁は全て同じ多角形にくっつくので、D(i)はD(i-1)の最小 ID プロットとプロット $x(\beta)$ に多角形iをくっつけて得られる部分多面体です。D(i-1)=E(i-1)なので、D(i)=E(i)です。

このことを、図 27a の多面体を例として補足説明します。図 27a の多面体を矢印で示した縁を種としてエンコードした場合、 ps_2 ; $tsp^{(0)}=458585574755433$; $8_55_610_45_4$ になります。また、図 29a に示したP(7)からE(7)とE(8)を作ると、それぞれ図 29b と 29c のようになります。E(7)、多角形 8、E(8)を比較すると、E(8)とは多角形 8 をE(7)の最小 ID プロット 3_4 と追加のプロット 5_6 にくっつけたものです。さて、アルゴリズム A-2 にしたがって、多角形 8、D(7)(=E(7))、 ps_2 ; $tsp^{(0)}$ からD(8)をつくる手順は次のようになります(図 30)。

- (A-2-a) 多角形 8 の縁8₁をD(7)の最小 ID 孤独縁3₄にくっつける(図 30b)。
- (A-2-b) 追加の対 8_55_6 が $tsp^{(0)}$ に記録されているので、縁 8_5 と縁 5_6 をくっつける(図 30c)。
- (A-2-c) 不都合な頂を取り除く(図 30d、30e)。

不都合な頂を取り除く操作によって、D(7)(=E(7))の最小 ID プロット 3_4 と追加のプロット 5_6 の縁はすべて多角形 8 にくっつくので、D(8)=E(8)です。

以上、式(5)が示されたので、アルゴリズム A にしたがって ps_2 ; $tsp^{(0)}$ をデコードすると元の多面体が復元されることが示されました。

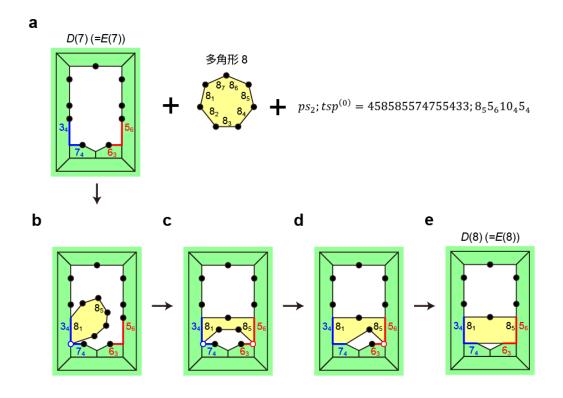


図 30: D(7)(=E(7))と ps_2 ; $tsp^{(0)}=458585574755433$; $8_55_610_45_4$ から D(8)(=E(8))が作られる過程。

2.6. ps2の冗長性

 p_3 から多面体を復元するとき、部分多面体D(F-1)には一つのプロットが存在し、そのプロットは $p_2(F)$ 個の孤独縁からできています。D(F-1)から $p_2(F)$ が定まるので、 ps_2 の $p_2(F)$ は冗長です。D(F-1)を作らなくても、 $p_2(1)p_2(2)p_2(3)\cdots p_2(F-1)$ とオイラーの式から導き出される $3n_3+2n_4+n_5-n_7-2n_8-3n_9-\cdots=12$ より、 $p_2(F)$ を定めることができます。

実は $p_2(F-1)$ も冗長で、 $p_2(1)p_2(2)p_2(3)\cdots p_2(F-2)$ から $p_2(F-1)$ と $p_2(F)$ を定めることができます。詳細は文献 [16]の Supplementary Information をご覧ください。

2.7. 非単純多面体

2.7.1. 四価以上の頂を切り取る方法

これまで、すべての頂が三価である多面体、すなわち単純多面体を仮定して理論を構築しました。単純多面体の理論は、簡単に、四価以上の頂をもつ非単純多面体に拡張することができます。図 31 に五角錐が描かれていますが、五価の頂が存在するので、五角錐は単純多面体ではありません。しかし、その五価の頂を切り取ると単純多面体が得られます。そして、頂を切り取ったさいに作られる五角形の断面を他の面と区別すると、非単純多面体と断面を区別した単純多面体との間に一対一の関係を作ることができます(図 31)。四価

以上の頂を切り取るという操作は、四色問題で重要な貢献をしたケンプのパッチ法をヒントに考え出しました [2]。断面を区別した単純多面体を利用すると、五角錐を5444445と表すことができます。一番右の5の上のドットは、その五角形が断面であることを意味しています。

単純多面体では、孤独縁のうち最も ID が小さいものを最小 ID 孤独縁と定義しました。理由はあとで説明しますが、断面を区別した単純多面体では、最小 ID 孤独縁を「断面以外の多角形の孤独縁のうち最も ID の小さい孤独縁」とします。この定義の元、断面の稜を生まない縁を種に選んで断面を区別した多面体をエンコードした後に、断面に対応する多角形をドットで区別したものが非単純多面体のp3です。

エンコードすることによって、非単純多面体の面、稜、頂に ID を以下の手順で与えることができます(図 32)。

- (1) 断面を区別した単純多面体をエンコードして面、稜、頂に ID を振る。この ID を暫定 ID とよぶ。
- (2) 断面を点に縮約する。その結果、断面に関係する暫定 ID がなくなる。
- (3) i番目に小さい暫定 ID を持つ面、稜、頂の本 ID をiとする。

非単純多面体の最小 ID 孤独縁の定義を変更しましたが、その結果、上述の方法で与えら

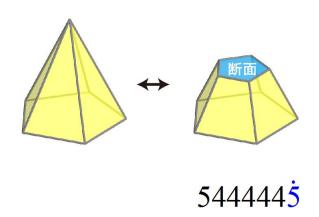


図 31: 非単純多面体と断面を区別した単純多面体との間の一対一対応。

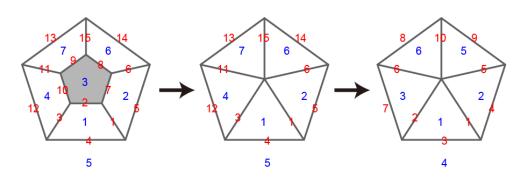


図 32: 非単純多面体の面と稜に ID を与える方法。

れる ID とアルゴリズム B を非単純多面体に直接適用して与えられる ID とが一致します。 補足ですが、単純多面体のエンコード法を非単純多面体に直接適用してもコードワードを 生成することができますが、生成されたコードワード、例えば 533333、から非単純多面体 を復元できません。

非単純多面体にユニークな p_3 を与えるために、ドットを含んだ p_3 の $\operatorname{Lex}(p_3)$ を定義します。そのために、ドットを含んだ p_2 の $\operatorname{Lex}(ps_2)$ を、 $\operatorname{Lex}\left(ps_2^{(1)}\right)$ と $\operatorname{Lex}\left(ps_2^{(2)}\right)$ を結合したものと定義します。ここで $ps_2^{(1)}$ と $ps_2^{(2)}$ は ps_2 から作られる数列です。 ps_2 の p_2 (i)を、 p_2 (i)がドットを持たないとき 0 に置き換え、ドットを持つときドットを取り除いたものが $ps_2^{(1)}$ です。 $ps_2^{(2)}$ は ps_2 からドットを取り除いたものです。例えば、 $ps_2=5444445$ のとき、 $ps_2^{(1)}=0000005$ 、 $ps_2^{(2)}=5444445$ ですので、 $\operatorname{Lex}(ps_2)=00000055444445$ となります。

2.7.2. 多面体の双対を用いる方法

非単純多面体を表すためにドットを導入しましたが、その方法が非効率な場合もあります。例えば、ドットを用いて八面体を表すと、 $66\dot{4}6\dot{4}6\dot{4}6\dot{4}6\dot{4}6\dot{4}6\dot{4}6$ になります。6 が 2 回続いた後に $\dot{4}6$ が 6 回続いているので、 $6^2(\dot{4}6)^6$ と短縮して表すことができますが、美しい対称性を持つ八面体のコードワードが美しくないのは問題です。そこで、多面体の双対 [19]を用いる方法を導入します。八面体は六面体の双対なので、八面体を $\star 4^6$ と表します。ここで、 \star は双対を表し、 $\star 4^6$ は六面体のコードワードです。この方法の詳細をこれから説明します。多面体の双対性はケプラーによって発見されました [20]。任意の多面体が与えられたとき、その多面体に双対な多面体を次の様に作ることができます(図 33)。

- (1) 元の多面体の面 f_i の上に、双対多面体の頂 v_i^* を置く。
- (2) 元の多面体の面 f_i と f_j が稜eを共有する場合、双対多面体の頂 v_i^* と v_j^* を稜 e_{ij}^* でつなぐ。八面体の双対は六面体です。そして、六面体の双対は八面体です。すなわち、八面体と六面体は互いに双対の関係にあります。すべての面が三角形である非単純多面体の双対は単純多面体ですので、 \star を用いるとすべての面が三角形である非単純多面体を簡潔に表すことができます。

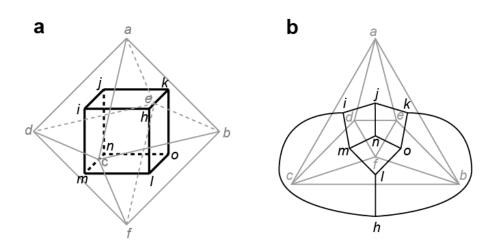


図 33: 双対性。(a)八面体(灰色)の双対は六面体(黒)。(b)図(a)をグラフで表したもの。

双対多面体と元の多面体との間にある一対一関係から、元の多面体の部位の ID を双対 多面体の部位の ID から定めることができます。例えば、八面体の面 dcf は六面体の頂 m に対応するため、六面体の頂 m の ID を八面体の面 dcf に与えます。また、八面体の稜 dc は六面体の稜 mi に対応するため、六面体の稜 mi の ID を八面体の稜 dc に与えます。

多面体をエンコードするさい、最初に種を選び、選んだ種に対してコードワードを生成しました。種として選んだ縁が生む稜が稜1となり、種として選んだ多角形が面1となるので、種を選ぶということは稜1と面1を定めることでもあります。双対性を用いて多面体をエンコードする場合も最初に元の多面体から種を選び、選んだ種にしたがって双対多面体をエンコードするための種を定めます。具体的には、元の多面体の種となった縁が生む稜が稜1となり、種となった多角形が面1となるように、双対多面体の種を選びます。例えば、図33aの八面体の多角形 dcfとその縁 dcを種とした場合、八面体の面 dcfに対応する六面体の頂 mのIDが1になり、かつ、八面体の稜 dcに対応する六面体の稜 miのIDが1になるように六面体の種を決めます。具体的には、多角形 mihlとその縁 miが種となります。ここで一点注意をしておきます。論文[16]では種を選ぶことを頂1と稜1を定めることと暗にみなして元の多面体の種と双対多面体の種とを対応させていましたが、解説記事を書いている最中に、種を選ぶことを稜1と面1を定めることとみなしたほうが簡潔な方法であることに気が付いたので、その方法を説明することにしました。

無限に存在する対称性の低い多面体に名前を与えるために多面体コードを創出しましたが、その方法は対称性のあるなしに関わらず任意の多面体に適用可能です。多面体コードを用いてプラトンの多面体を表すと、四角形は 3^4 、六面体は 4^6 、八面体は 4^6 、十二面体は 5^{12} 、二十面体は 5^{12} となります(図 34)。

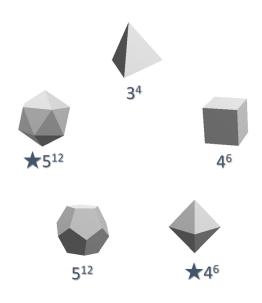


図 34: プラトンの多面体。

2.8. 理論構築時のターニングポイント

多面体コードの黎明期は、いろいろな概念が整理されていなかったので、今よりも複雑な理論でした。数々のターニングポイントを経て、より簡潔な今の形式の理論が出来上がりました。ここでは、特に重要だったターニングポイントをいくつか簡単に紹介したいと思います。

2.8.1. 多面体の稜について

通常、我々は多角形の辺と多面体の辺を区別しないで単に辺とよびます。同様に、多角形の頂点も多面体の頂点も単に頂点とよびます。そのため、多面体コードの黎明期には、多角形の部位と多面体の部位を区別していませんでした。部位を区別しない黎明期の理論はかなり複雑で、説明が困難なものでした。しかし、ある時、多面体の辺を side(縁)とよび、多角形の辺を edge(稜)とよんで両者を区別すると、理論が簡潔になることに気が付きました。具体的には、縁と稜を区別することにより孤独縁という言葉が生まれ、そのアイディアは角と頂という言葉で多角形の頂点と多面体の頂点を区別するというアイディアへと一般化され、その結果、不都合な頂を取り除くという操作が生まれました。この操作によって、多角形から多面体を組み上げる方法の説明が簡潔になりました。

多角形の辺と多面体の辺を区別すべきという考えにたどり着いたとき、些細であるが重要な本質を発見したと興奮したのですが、その後文献を調べると [1,20]、オイラーがすでに発見していた考え方でした。1750 年 11 月 14 日に友人のゴールドバッハに宛てた手紙の中でオイラーは多面体公式F-E+V=2の発見を報告していますが [1,20]、その準備として、多面体を構成する多角形の辺(latus)と辺が合う場所を acies とよびました。多面体の辺に acies という名前が与えられた瞬間が多面体の辺の発見です。不思議なことに、それ以前は、多面体の辺が明示的に言及されることはなかったようです。オイラーは多面体の辺を定義するために稜(acies)と縁(latus)を区別しましたが、それ以上の意味で稜と縁の区別が活用されることは著者が知る限りこれまでないようです。「縁が稜を生む」や「稜は縁から生まれる」という考えに基づく多面体コードを創出したことによって、オイラーが発見した「多角形の辺と多面体の辺を区別する」という考え方の新しい意義を発見したのではないかと思っています。

2.8.2. デコードを組み込んだエンコード法について

最終的な多面体コードは、不必要な追加の対を取り除くために、エンコードにデコードを組み込んでいます。具体的には、すべての追加の対を含んだ ps_2 ; $tsp^{(0)}$ から多面体を復元するアルゴリズム A を用いて、それぞれの追加の対が必要かどうかを判定しています。

一方、多面体コードの黎明期には、エンコードにデコードを組み込まないで、「領域」のトポロジーから追加の対が必要かどうかを判定しようとしていました。ここで領域とは、互いにつながった透明な多角形の集まりです。多面体をエンコードするさい、多角形の面は段階的に透明になっていきますが、追加の対が存在しない場合、P(i)の領域に穴はありません。追加の対が存在するとき、領域に穴ができたり、できた穴が消えたりします。穴の形成は追加の対が存在することを意味し、穴の消え方は、追加の対が自然に治癒するかどうかに関係しています。

領域のトポロジーから追加の対が必要かどうかを定める方法は、追加の対が必要であることの起源に関係する方法ですが、領域のトポロジーの変化の仕方に沢山のパターンがあるため、複雑で説明が困難な方法でした。また、その方法は4次元以上の多胞体に拡張ができるのか、できないのか、分からない方法でもありました。しかし、ある時、エンコードにデコードを組み込むことによって、簡単に説明ができ、かつ、4次元以上の多胞体に簡単に拡張できる方法を構築できることに気が付き、現在の理論ができました。

2.8.3. Spiral コードについて

イントロダクションでも述べましたが、多面体から Weinberg コードワードを生成するさい、多面体の面を一つずつ囲むようにパスが描かれることに気が付きました。そして、この発見が切っ掛けとなって、多面体を構成する多角形の名前の並びで多面体を表現する多面体コードを創出しました。

しかし、黎明期の理論では、多面体の Schlegel 図を年輪の様にとらえ、Schlegel 図を面が作る輪っか構造の集まりとみなしていました(図 35)。ここで、「多角形が作る輪っか構造」ではなく「面が作る輪っか構造」と書いているのは、黎明期の理論では多面体の部位と多角形の部位を区別していなかったからです。黎明期の理論でも、例えば十二面体を「5555555555555」で表していました。いまの理論と同じ数列ですが、数列の解釈の仕方が今とは異なっていました。具体的には、最初の 5 は外枠の面が五角形であることを示し、続く55555 は5 枚の五角形が作る輪っかが外枠の五角形の内側にくっついていることを示し、続く55555 はその輪っかの内側に 5 枚の五角形が作る輪っかがくっついていることを示し、最後の 5 は五角形がその輪っかの内側にくっついていることを示していました。黎明期の理論でも現在の理論でいう追加の対を持たない多面体を簡単に扱うことができましたが(当時は追加の対という概念は存在していませんでしたが)、追加の対を持つ多面体の扱いはとても複雑でした。

そのような中、多面体の面の並びを渦巻きとみなした Spiral コードという理論がフラーレンの構造を記述するために提案されていることを知りました [21-23]。この方法では、リンゴの皮をむくように多面体の面をむいて、むいた順番で面に ID を与え、多面体を $f_2(1)f_2(2)f_2(3)\cdots f_2(F)$ で表します(図 36)。ここで、 $f_2(i)$ はi番目の面の辺の数です。ここで、「多角形の縁の数」ではなく「面の辺の数」と書いているのは、Spiral コードは多面体の

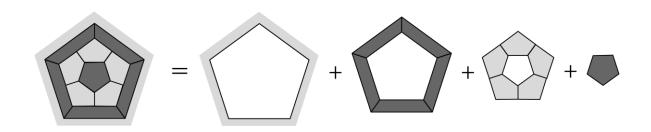


図35:黎明期の理論における多面体のとらえ方。

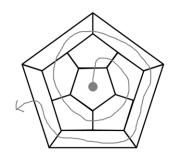


図36:スパイラルコードにおける多面体のとらえ方。



図 37:non-spiral 多面体の例。左下の三角形にたどりつけない。

部位と多角形の部位を区別しない方法だからです。Spiral コードはフラーレンを対象としているため、非単純多面体を扱えませんが、多くの単純多面体を表すことができます。コードワードの背景にある数学的構造は異なりますが、Spiral コードで扱うことができる多面体の Spiral コードワードは、我々の多面体コードワードと一致します。しかし、Spiral コードはすべての単純多面体を扱うことができません。Spiral コードで扱うことができる多面体は spiral とよばれています。一方、扱うことができない多面体は non-spiral とよばれています(図 37)。詳細は省略しますが、我々の理論で説明すると、spiral 多面体とは追加の対が現れないように種を選ぶことができる単純多面体のことです。一方、non-spiral 多面体とはどのように種を選んでも追加の対が現れる単純多面体のことです。

Non-spiral 多面体を扱うために Generalized spiral コードが提案されています [22]。この方法は、多面体の辺の ID を用いて non-spiral 多面体を扱います。例えば図 37 の non-spiral 多面体を Generalized spiral コードを用いて表すと、63838360244633 となります。02446 は、多面体のある辺に 24 と 46 という ID が与えられていることを示しています。 Generalized spiral コードは図 37 に描いた non-spiral 多面体を扱うことができますが、我々の多面体コードより長いコードワードになっています。実際、我々の多面体コードを用いると、同じ多面体をより短い 368838336 で表すことができます。 Generalized spiral コードワードが冗長である理由は、我々の理論でいう追加のプロットから生まれるすべての稜に関係する情報が記録されているからです。我々は、追加のプロットの背景にある多面体の構造を調べ、不必要な追加の対の情報を削除する方法を構築しました。その

ため、我々の理論は多面体を簡潔に表現することができます。

Spiral コードには取り扱えない多面体が存在するという問題がありましたが、多面体の面を一枚ずつ処理する操作は参考になりました。面を一枚ずつ処理する操作を我々の理論に取り入れた結果、複数の面が作る輪っかを扱うよりも簡潔な理論になりました。

また、Generalized spiral コードは non-spiral 多面体を扱うために辺の ID を導入しましたが、このことを参考にして、我々は多角形の縁の ID を導入しました。Generalized spiral コードでは辺の ID は non-spiral 多面体を扱うための副次的なものでした。一方、多角形の縁の ID にしたがって多角形と多面体の部位に ID を与える我々の理論では、多角形の縁の ID は理論の根幹をなしています。多角形の縁の ID を用いることによって、多角形に ID を振る方法の説明が簡潔になりました。

2.8.4. 縁の ID の表示方法について

黎明期の理論では縁に1,2,3,…という ID を振っていました。この方法をi-表示とよぶことにします。一方、完成した理論では、i番目の多角形のj番目の縁にi_jを振ります。この方法をi_j-表示とよぶことにします。i_j-表示を導入することによって、例えば、「サイドi₁を最小 ID ダングリングサイドにくっつける」という表現が可能になり、理論を簡潔に説明することができるようになりました。同じことをi-表示の ID を用いて述べようとすると、少し複雑な表現になってしまいます。また、人間が手で多面体をエンコードするさい、i_j-表示を用いるとミスを減らすことができます。例えば、図 27a の多面体のspは10454ですが、これをi-表示で表すと 72 49 になります。i-表示でspを表すためには、沢山の縁に ID を振る作業が必要で、この作業は意外と頻繁にケアレスミスを引き起こします。一方、i_j-表示では、必要な多角形の縁だけに ID を振ればよいので、ケアレスミスの頻度が減ります。

3. 多胞体コード

多面体コードは Weinberg コードや Spiral コードよりも簡潔に多面体を表現することができます。しかし、多面体コードが他の方法を真の意味で凌駕するのは、高次元の多胞体を扱えるように理論を拡張できる点にあります。多胞体コードを高次元に拡張できる理由は、明示的に多胞体の階層構造を基礎として理論が構築されている点にあります。多面体コードは 2 次元多胞体である多角形の縁と縁をくっつけて 3 次元多胞体である多面体を組み上げる手順を p_3 で表す方法です。この考え方を拡張すると、3 次元多胞体である多面体の面と面をくっつけて 4 次元多胞体を組み上げる手順によって 4 次元多胞体を表すことができます。一般に、n-1次元多胞体からn次元多胞体を組み上げる手順によってn次元多胞体を表すことができます。ここでは、4 次元多胞体コードについて説明します。n次元多胞体コードの詳細は文献 [17]の Supplemental Information をご覧ください。以後、4 次元多胞体を単に多胞体と書きます。

3次元空間に住む我々にとって、4次元空間に置かれた多胞体を理解することは簡単ではありませんが、3次元空間に射影された多胞体の Schlegel 図を理解することはさほど難しくありません。Schlegel 図を用いると 3次元の多面体を 2次元平面で表すことができました(図 19a)。同様に、Schlegel 図を用いると 4次元空間の多胞体を 3次元空間で表すことができます。図 38 に 2 つの 3333-多面体と 4 つの 34443-多面体からなる多胞体 abcdefgh

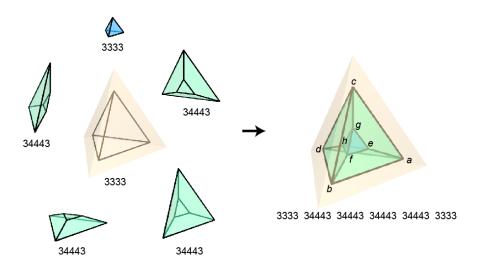


図 38: Schlegel 図で表した多胞体。

の Schlegel 図を描いています。多面体の面と面とをくっつけることによって多胞体が作られていることが分かります。ここで、Schlegel 図の外枠の多面体 abcd の外部は、4次元空間の多面体 abcd の内部に対応することに注意してください。多胞体コードを用いて図 38 の多胞体を表すと、3333 34443 34443 34443 34443 3333 になります。この数列の並びを多胞体コードワード (p_4) とよびます。 p_4 の添え字の4 は多胞体が4次元図形であることを示しています。 p_4 は多胞体の名前であると同時に、多胞体の設計図でもあります。それぞれの数列は構成要素の多面体の名前を表しています。一番左の数列が 3333 であることは、一番目の多面体が 3333-多面体であることを示しています。同様に、二から五番目の多面体は 34443-多面体、六番目の多面体は 3333-多面体であることを示しています。これから、多胞体を多胞体コードワードに変換するエンコード法と多胞体コードワードから元の多胞体を復元するデコード法の手順を説明しますが、その準備として、まずは多面体の部位と多胞体の部位について説明します。

3.1. 多面体の部位と多胞体の部位

多胞体コードでは、多面体を多胞体の部品とみなし、多面体の組み合わせで多胞体が作られていると考えます。そして、多胞体の部位と多面体の部位を区別します。具体的には、多面体の頂点を「頂」、多胞体の頂点を「節(ふし)」とよんで、両者を区別します(図 39a)。多胞体の頂とは 4 つ以上の多面体の頂が出会う 0 次元領域です。同様に、多面体の辺を「稜」、多胞体の辺を「束(たば)」と呼んで、両者を区別します(図 39b)。多胞体の束とは3つ以上の多面体の稜が出会う 1 次元領域です。同様に、多面体の面を「面」、多胞体の面を「重(かさなり)」と呼んで、両者を区別します(図 39c)。多胞体の重とは2つの多面体の面が出会う2次元領域です。また、多胞体の胞は多面体ですが、多胞体の部品であることを強調するときは多面体という言葉を用いるのに対し、多胞体の部位であることを強調するときは胞という言葉を用いることにします。

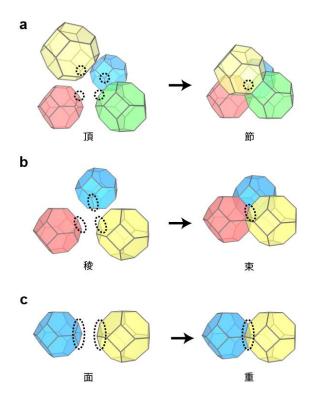


図 39:多面体の部位と多胞体の部位の関係。

3.2. 準単純多胞体

全ての節の価数が四価である多胞体は単純多胞体とよばれています。単純多胞体を構成する多面体はすべて単純です。多胞体コードを構築するために、「準単純多胞体」という言葉を導入します。準単純多胞体とはすべての束が3つの多面体から生まれている多胞体のことです。単純多胞体の全ての束は3つの多面体から生まれているので、単純多胞体は準単純でもあります。準単純多胞体を構成する多面体は非単純多面体である場合もあります。例えば、24個の八面体から構成される二十四胞体の束はすべて3つの多面体から生まれているので準単純です。

3.3. 多胞体コードワード

一般に、 p_4 は「多面体の並びのコードワード (ps_3) 」と「面の対の並びのコードワード(fp)」からなります。 p_4 を形式的にあらわすと、

$$p_4 = ps_3; fp, \tag{6}$$

です。 p_4 に含まれる ps_3 を形式的に表すと、

$$ps_3 = p_3(1)p_3(2)p_3(3)\cdots p_3(C),$$
 (7)

です。ここで、 $p_3(i)$ はi番目の多面体の多面体コードワードを表しています。Cは多胞体を構成する多面体の数です。fpを形式的に表すと、

$$fp = w(1)z(1)v(1)w(2)z(2)v(2)w(3)z(3)v(3) \cdots w(N_{\rm nc})z(N_{\rm nc})v(N_{\rm nc}), \tag{8}$$

です。w(i)z(i)v(i)は多胞体における必要な追加の対で、面w(i)と面v(i)がくっついていて、そのさい、縁z(i)から生まれる面w(i)の稜が面v(i)の稜のうち最も ID の小さなものにくっついていることを示しています。 $N_{\rm nc}$ は必要な追加の対の数です。また、w(i)>v(i)、w(i)< w(i+1)です。

3.4. ps₃の作り方

多胞体から p_4 を生成する際、最初に種として任意の多面体、その多面体の面、その面の稜を選びます。種の選び方によって得られる p_4 が異なりますが、3.8 で説明する辞書的順序を用いることにより、多面体に唯一の p_4 を与えることができます。 p_4 は ps_3 とfpからなりますが、最初に ps_3 の作り方を説明します。

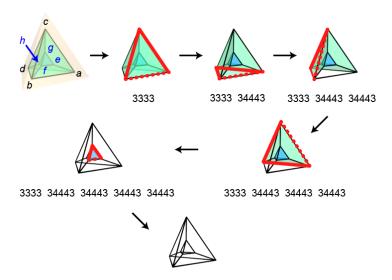
 ps_3 を生成することは、多胞体を構成する多面体に ID を振ることです。その方法を定めるために、多面体コードを用いて多面体の稜に ID を振ります。具体的には、i番目の多面体のj番目の稜に i_j を振ります。すなわち、稜 i_j とはi番目の多面体のj番目の稜を意味します。同様に、多面体の面にも ID を振ります。すでに ID が振られた多面体とこれから ID を振る多面体を区別するために色を用います。最初にすべての多面体を色付けし、ID を振った多面体を透明にします。色付いた多面体にくっついている透明な多面体の面を孤独面とよびます。

与えられた種に対して、次の手順でps3を生成することができます。

アルゴリズム D

- 1. $i = 1 \ge j \le 3$.
 - (a) 種となった多面体が多面体 1。
 - (b) 種となった面の ID が 1_1 になり、かつ、種となった稜の ID が 1_1 になるように多面体 1 をエンコードして p_3 (1)を求め、面と稜に ID を振る。
 - (c) 多面体 1 を透明にする。
- 2. $i = i + 1 \ge j \le 3$.
 - (a) 最小 ID 孤独面にくっついている多面体が多面体i。
 - (b) 最小 ID 孤独面にくっついている面の ID が i_1 になり、かつ、最小 ID 孤独面の稜の うち最も ID の小さい稜にくっついている稜の ID が i_1 になるように多面体iをエンコードして $p_3(i)$ を求め、面と稜に ID を振る。
 - (c) 多面体iを透明にする。
- 3. すべての多面体が透明になるまで手順2を繰り返す。

例として、図 38 に描いた多胞体の ps_3 を、種として多面体 abcd、面 abc、稜 ab を選んでエンコードした様子を図 40 に示しています。この多胞体の p_4 はfpを含まないため、 $p_4=ps_3$ です。多面体の場合と同様な手順によって、多胞体の節、束、重なりに ID を与えることができます。



3333 34443 34443 34443 34443 3333

図 40: 多胞体のエンコード過程。最小 ID 孤独面を太線で示している。最小 ID 孤独面の稜のうち ID が最小のものを破線で示している。

3.5. *tfp*⁽⁰⁾の作り方

fpを説明するために、ゼロ番目の仮の $fp(tfp^{(0)})$ を説明します。そのために、いくつかの考え方を導入します。異なる多面体の孤独面が隣接している場合、隣接する孤独面は連結しているとし、連結した孤独面の集まりを「プロット」とよびます。また、連結していない単独の孤独面もプロットとよびます。多胞体のプロットは2次元領域であることに注意してください。プロットを構成する孤独面の ID のうち最も小さいものをプロットの ID とします。

 ps_3 を生成しているとき、多面体は 1 個ずつ透明になっていきます。i-1番目の多面体が透明になったときに得られる多胞体で、多面体iが最小 ID プロット以外のプロット v_a にくっついている場合、そのプロットを追加のプロットとよびます。追加のプロットを構成する孤独面 v_a がくっついている多面体iの面の ID を w_a とします。孤独面 v_a の稜のうち最も IDの小さい稜がくっついている面 w_a の稜を稜 ϵ とします。稜 ϵ は多角形 w_a の縁 z_a から生まれているとします。 $w_a z_a v_a$ を追加の対とよびます。追加の対を $w_a(i) < w_a(i+1)$ となるように集めたものが $tfp^{(0)}$ で、

$$tfp^{(0)} = w_a(1)z_a(1)v_a(1)w_a(2)z_a(2)v_a(2)w_a(3)z_a(3)v_a(3)\cdots w_a(N_a)z_a(N_a)v_a(N_a), \quad (9)$$
 と表されます。ここで N_a は追加の対の数です。

3.6. ps_3 ; $tfp^{(0)}$ から多胞体を復元する方法

多胞体を復元するための手順を説明するために、最初に、デコードにおける「孤独面」と「不都合な束」を説明します。多胞体を復元するとき、部分多胞体を構成する多面体の

面のうち他の多面体にくっついていない面を孤独面とよびます。2つの孤独面から生まれた束が3つの多面体からも生まれている場合、その束を不都合な束とよびます。2つの孤独面をくっつけることによって不都合な束を取り除くことができます。

 ps_3 ; $tfp^{(0)}$ から以下の手順で多胞体を復元することができます。

アルゴリズム E

- 1. $i = 1 \ge j \le 3$
 - (a) 多面体 α は $p_3(\alpha)$ -多面体 $(1 \le \alpha \le C)$ 。
 - (b) $p_3(\alpha)$ をデコードして、多面体 α のj番目の面と稜に α_i を ID として振る。
 - (c) 多面体 1 が部分多胞体 1。
- 2. $i = i + 1 \ge j \le 3$.
 - (a) 多面体iの面i₁を部分多胞体i-1の最小 ID 孤独面にくっつける。
 - (b) 面 $w(\beta)$ が多面体iの面ならば、面 $w(\beta)$ を面 $v(\beta)$ にくっつける $(1 \le \beta \le N_a)$ 。その時、 多角形 $w(\beta)$ の縁 $z(\beta)$ から生まれた稜を、面 $v(\beta)$ の稜のうち ID の最も小さい稜にくっつける。
 - (c) 不都合な東が存在したら取り除く。
 - (d) こうして得られる構造が部分多胞体i。
- 3. すべての多胞体を配置するまで手順2を繰り返す。

3333 34443 34443 34443 3333 から多胞体を復元する手順を文献 [16]の Supplemental Information に図示していますので、興味のある方はご覧ください。

3.7. $tfp^{(0)}$ からfpを作る方法

 ps_3 ; $tfp^{(0)}$ から元の多胞体を復元することができますが、 $tfp^{(0)}$ には不必要な情報が含まれている可能性があります。 $tfp^{(0)}$ から不必要な追加の対を取り除いたものがfpです。

以下の手順で、一般の $tfp^{(0)}$ からfpを作ることができます。

アルゴリズムF

- 1. $i = 0 \ge 5$
 - (a) $tfp^{(0)} = w_a(1)z_a(1)v_a(1)\cdots w_a(N_a)z_a(N_a)v_a(N_a)_{\circ}$
- 2. $i = i + 1 \ge j \le 3$.
 - (a) $tfp^{(i-1)}$ から $w_a(N_a-i+1)z_a(N_a-i+1)v_a(N_a-i+1)$ を取り除いたものが $test^{(i)}$ 。
 - (b) ps₃; test⁽ⁱ⁾をアルゴリズム E を用いてデコードする。
 - ① ps_3 ; $test^{(i)}$ から元の多胞体を復元できた場合、 $tfp^{(i)} = test^{(i)}$ 。
 - ② ps_3 ; $test^{(i)}$ から元の多胞体を復元できなかった場合、 $tfp^{(i)} = tsp^{(i-1)}$ 。
- 3. $i = N_a$ まで手順2を繰り返す。 $fp = tfp^{(N_a)}$ 。

3.8. 辞書的順序

種の選び方によって異なる p_4 が得られます。ユニークな p_4 を選び出すために、 $\operatorname{Lex}(p_4)$ を定義します。 $p_4=ps_3$; fpなので、まずは $\operatorname{Lex}(ps_3)$ を説明します。 $ps_3=p_3(1)p_3(2)p_3(3)\cdots p_3(C)$ はC個の数列が並んだものです。数列の列をC桁の数とみなしたものが $\operatorname{Lex}(ps_3)$ です。このとき、 $\operatorname{Lex}(p_3(i))$ はC-i+1桁目の数です。同様に、数列 $fp=w(1)z(1)v(1)\cdots w(N_{nc})z(N_{nc})v(N_{nc})$ を $3N_{nc}$ 桁の数とみなしたものが、 $\operatorname{Lex}(fp)$ です。 $\operatorname{Lex}(ps_3)$ と $\operatorname{Lex}(fp)$ を結合させたものが $\operatorname{Lex}(p_4)$ で、 $C+3N_{nc}$ 桁の数です。合計12P個の p_4 が多胞体とその鏡像から得られます。 $\operatorname{Lex}(p_4)$ が最も小さい p_4 を選ぶことによって、多胞体に唯一の p_4 を与えることができます。

3.9. 重なりの並びのコードワード

多胞体は多面体の面と面をくっつけて作られています。例えば、図 38 に描いた多胞体では、2番目の多面体である 34443-多面体の1番目の面(面 2_1)は、1番目の多面体である 3333-多面体の1番目の面(面 1_1)にくっついています。面 2_1 と 1_1 がくっついていることから、 $p_2(2_1) = p_2(1_1)$ になっています。ここで、 $p_2(i_j)$ はi番目の多面体の p_3 のj番目の p_2 の値です。一般に、a番目の多面体のp番目の面が、x番目の多面体のp3のp4番目の面にくっついているとき、 $p_2(a_b) = p_2(x_y) = 3$ になります。さて、多面体の面と面が出会う 2次元領域が多胞体の重です。さて、 $p_2(a_b) = p_2(x_y) = p_2(x_y) = p_2(x_y) = p_2(x_y) = p_2(x_y) = p_2(x_y) = p_2(x_y)$ です。重なりの束の数が p_4 0年の東の数が p_4 1年の表示と、 p_4 1年の記録は多胞体を多面体の集合体とみなしている点にあります。詳細は文献 p_4 1年の記録していますが、多胞体を重なりの集合体とみなし、「重なりの並びのコードワード p_4 1年を取り除くことができます。 p_4 2年を形式的に表すと、

$$rs = r(1)r(2)r(3)\cdots r(R), \tag{10}$$

です。ここで、r(i)は本 ID がiである重なりの束の数です。Rは多胞体を構成する重なりの数です。図 38 に描いた $p_4=ps_3=33333444333444334443330$ 表される多胞体をrsで表すと、rs=33334443443433となり、 ps_3 より簡潔に多胞体を表すことができます(図 41)。

3.10. 非進単純多胞体

非準単純多胞体は4つ以上の多面体から生まれる束を持っています。この束を切り取ると、準単純多胞体ができます。断胞(2次元断面を3次元に拡張したもの)の多面体を他の

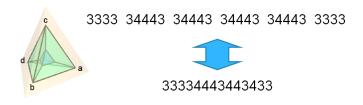


図 41:重なりの並びのコードワード

多面体と区別することで、非準単純多胞体と断胞を区別した準単純多胞体の間に一対一関係をつくることができます。この関係を利用することによって、非準単純多胞体を扱うことができます。詳細は文献 [16]をご覧ください。しかし、この方法は必ずしも最適でない場合があるので、双対性も利用します。双対性を利用すると、五胞体を T^4 、八胞体を H^8 、十六胞体を $\pm H^{16}$ 、二十四胞体を O^{24} 、百二十胞体を D^{120} 、六百胞体を $\pm D^{120}$ と表すことができます。ここで、 $T=3^4$ は四面体、 $H=4^6$ は六面体、 $D=5^{12}$ は十二面体の p_3 です。

4. 多様体との関係

多面体コードでは、多面体を多角形による 2 次元球面 (S^2) のタイリングと暗にみなしています。多角形による 2 次元トーラス (T^2) のタイリングも、多面体コードによって表現することができます。しかし、ドーナツ型の多面体を表現するには、 2 次元トーラスを 3 次元ユークリッド空間にどのように埋め込むのか、その方法を指定する必要があります。また、多角形i の縁に ID を振るさいの回転方向を、多角形i の 1 番目の縁がくっついている多角形の回転方向によって定めることによって、クラインの壺のような向き付け不可能な 2 次元多様体の多角形タイリングを扱うように多面体コードを拡張することができます。

さて、 p_3 のspは2次元多様体のトポロジーと関係があります。例えば、spを持たないように S^2 を多角形に分割することが可能です。一方、 T^2 をそのように分割することはできません。もう少し詳しく述べますと、2つの追加の対からなるspを持つ p_3 によって表現できるように T^2 を多角形に分割することはできますが、spを持たない、もしくは1つの追加の対からなるspを持つ p_3 によって表現できるように T^2 を多角形に分割することはできません。

このような考え方を3次元多様体に拡張することができます。例えば、fpを持たないように3次元球面(S^3)を多面体に分割することができます。ここで、多様体に関する知識が十分でない著者には答えられない次の問いが生じます。

- ある3次元多様体をfpを持たないように多面体で分割できたとき、その多様体は S^3 と同相なのでしょうか?
- その答えが YES であるならば、それはポアンカレ予想 [24]が真であることから保証 されているのでしょうか?

上述の問いに答えを与えることができる読者がおられたら、その答えを著者に教えていた だけると幸いです。

参考文献

- [1] P. R. Cromwell, *Polyhedra* (Cambridge University Press, 1999).
- [2] R. Wilson and I. Stewart, Four Colors Suffice: How the Map Problem Was Solved, Revised Color edition with a New foreword by Ian Stewart edition (Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2013).
- [3] J. D. Bernal, Proc. R. Soc. Lond. Ser. Math. Phys. Sci. 280, 299 (1964).
- [4] J. Finney, Proc. R. Soc. Lond. Ser. -Math. Phys. Sci. **319**, 479 (1970).
- [5] J. Finney, Proc. R. Soc. Lond. Ser. -Math. Phys. Sci. 319, 495 (1970).
- [6] F. Yonezawa, Solid State Phys. 45, 179 (1991).

- [7] Y. Q. Cheng and E. Ma, Prog. Mater. Sci. **56**, 379 (2011).
- [8] K. Nishio, T. Miyazaki, and H. Nakamura, Phys. Rev. Lett. 111, 155502 (2013).
- [9] K. Nishio, J. Kōga, T. Yamaguchi, and F. Yonezawa, J. Phys. Soc. Jpn. 73, 627 (2004).
- [10] K. Nishio, W. Shinoda, T. Morishita, and M. Mikami, J. Chem. Phys. 122, 124715 (2005).
- [11] A. Hirata, L. J. Kang, T. Fujita, B. Klumov, K. Matsue, M. Kotani, A. R. Yavari, and M. W. Chen, Science **341**, 376 (2013).
- [12] K. Nishio and M. Mikami, J. Chem. Phys. 130, 154302 (2009).
- [13] E. A. Lazar, J. K. Mason, R. D. MacPherson, and D. J. Srolovitz, Phys. Rev. Lett. 109, 095505 (2012).
- [14] L. Weinberg, IEEE Trans. Circuit Theory 13, 142 (1966).
- [15] L. Weinberg, SIAM J. Appl. Math. 14, 729 (1966).
- [16] K. Nishio and T. Miyazaki, Sci. Rep. 6, 23455 (2016).
- [17] K. Nishio and T. Miyazaki, Sci. Rep. 7, 40269 (2017).
- [18] G. M. Ziegler, Lectures on Polytopes (Springer, New York, 2012).
- [19] R. J. Wilson, *Introduction to Graph Theory*, 5 edition (Pearson, Harlow, England; New York, 2012).
- [20] D. S. Richeson, Euler's Gem: The Polyhedron Formula and the Birth of Topology, Reprint edition (Princeton University Press, Princeton, NJ, 2012).
- [21] D. E. Manolopoulos, J. C. May, and S. E. Down, Chem. Phys. Lett. 181, 105 (1991).
- [22] G. Brinkmann, Chem. Phys. Lett. 272, 193 (1997).
- [23] P. W. Fowler and D. E. Manolopoulos, *An Atlas of Fullerenes* (Dover Publications, Mineola, N.Y, 2007).
- [24] D. O'Shea, The Poincare Conjecture: In Search of the Shape of the Universe, Reprint 版 (Walker & Co, New York, 2007).

第82回 形の科学シンポジウム 「産業技術とかたち」

討議記録 (記録のあるもののみ掲載)

【主催】形の科学会

【後援】国立研究開発法人 産業技術総合研究所

【会期】2016年10月7日(金)、8日(土)、9日(日)

【会場】国立研究開発法人 産業技術総合研究所 (つくば市) つくばセンター 共用講堂

【代表世話人】 中島善人 (産業技術総合研究所 地圏資源環境研究部門)

〒305-8567 茨城県つくば市東 1-1-1 中央第7 E-mail: nakashima.yoshito@aist.go.jp

【参加費】 会員・非会員ともに一般 5,000 円、学生 1,000 円

【懇親会】 2016年10月7日(金)17:30より、共用講堂1階ホワイエにて

【懇親会費】一般 4.000 円、学生 1.000 円

討論記録は質問者の討論記録シートの記載にもとづいており、講演者の校正がないものもあります。

Q: 質問、A: 回答、C: コメント

討論記録

10月7日(金)

産業技術と形(公開講演)

材料の原子構造を表現するための多面体の命名法 西尾憲吾(産業技術総合研究所)

Q. 高木隆司

命名されたコードから決まる多面体は1つに限るか。コード の左端の数字はどのような原理で選ぶのか。

Δ

辞書的順序を用いることによって、任意の多面体に唯一のコードワードを与えることができます。

例えば、3つの数列 34443、43434、44343 はすべて三角柱(注 1)を表します。

数列を数とみなしたものが辞書的順序です。

34443 が最も小さいので、34443 を唯一のコードワードとして 選びませ

注1:本手法は長さや角度の違いを無視するので、正確には、 三角柱を連続的に変形して得られる多面体です。

Q. 手嶋吉法

正多面体 5 種類を表現したスライドにおいて、1 頂点が 3 稜を持つ多面体では直接表記で、1 頂点が 4 稜や 5 稜をもつ多面体(正 8 面体や正 20 面体)では双対表記が用いられていた。ご提案手法は 3 稜頂点を前提とした表記法という理解でよいか。

A.

3 稜頂点を前提としていませんが、3 稜頂点の理論を基礎としています。3 稜頂点だけからなる多面体を単純多面体とよびます。4つ以上の稜が集まる頂点を持つ多面体を非単純多面体とよびます。

最初に単純多面体を扱う理論を構築しました。非単純多面体を扱うさい、最初に4つ以上の稜が集まる頂点を切り取りとります。その結果、単純多面体が得られます。

切り取った結果得られる断面を他の面と区別すると、非単純 多面体と断面を区別した単純多面体との間に一対一関係を構 築できます。この関係を利用して非単純多面体を扱うことが できます。

例えば、5角錐の頂点は5稜頂点なので5角錐は非単純ですが、5角錐を544444¥ $dot{5}$ と表すことができます。¥ $dot{5}は<math>5$ 角形が断面であることを意味しています。

5 4 4 4 4 4 5 から 5 角柱をつくり、断面の 5 角形を頂点に縮約することによって 5 角錐が得られます。

8 面体や20面体を断面を区別した単純多面体を用いて表す と複雑な表記になりますが、双対性を利用すると簡潔な表記 になります。

一般に、非単純多面体が3角形だけで作られている場合、その双対は単純多面体なので、双対を用いて表します。

構造化光投影による3次元計測の分類とワンショット動体形 状計測法

佐川立昌(産業技術総合研究所)、川崎洋(鹿児島大学)、 古川亮(広島市立大学)

Q. 山下樹里

内視鏡で見た手術中の患部の変形計測に興味がある。出血しても計測できるのか。

Α

腹腔鏡で話があり、市販ブタ肝臓(食肉用)で計測した実績はあるが、生体は試したことはない。血液がパターンを反射すれば、その表面の形状は計測可能と思われる。血液などによって、カメラ、プロジェクタが汚れた場合は計測ができなくなる。

Q. 中島善人

アクティブ3次元計測システムはいろいろ商品化されている ということであるがどんな業界の人が買っているか。

Α

工場内での部品の計測や、人体の計測(医療、アパレル、スポーツ)などが挙げられる。

形の科学一般

対称周期軌道の安定性は何が決めているのか 山口喜博 (元帝京平成大学)

Q. 手嶋吉法

本講演の結論 (「全ての周期軌道で同周期分岐を起こさない」 ことが主軸定理成立の必要十分条件) は観察された事実か、より普遍的な定理と呼べるものか。

Α

二次元面積保存写像系で成り立つ定理である。講演の中では 関係する事例をいくつか具体的に示した。

ニュートン力学誕生そしてヤコブ・ヘルマンの逆問題解析 ウェルフェア ジャスティン飛鳥 (神奈川大学大学院)、 山口幸 (神奈川大学)、杉本剛 (神奈川大学)

Q. 高木隆司

最初のスライドで示したあった微積分学は「ライプニッツの 方がニュートンよりも先に確立した」ということは、以前、 聞いたことがある。それは史実か。

Α

はっきりとは確立していないと思う。

Forum

反応拡散アルゴリズムを用いた肝類洞パターン抽出法とその 応用

昌子浩登 (京都府立医科大学)、山田耕太郎 (阿南工業高

等専門学校)

Q. 中島善人

実データは異なる生検サンプルをコンフォーカルマイクロスコピーで見たものだが、MRIなどで同一サンプルを非侵襲で経時観察できないものか。

Α.

今の MRI の分解能ではコンフォーカルほどのハイレゾ画像は達成できないので難しい。

10月8日(土)

形の科学一般

福島第1原発の放射能汚染パターン

小川進(長崎大学)、斎藤恵介(長崎大学)

Q. 石原正三

福島第一原発事故以降、気象庁などの機関が今も計測を継続 しているのか。

2017 年度の秋に開催予定のシンポジウムを長崎大学で、講演者が世話人として予定されているようなので、本講演内容に関するセッションを聞いてもらいたい。

Α

事故直後からの計測の中には、すでに終了しているものもあり、継続していてもデータを公表していないものもある。

凸五角形 (Rice1995) を用いて形成出来るタイリング 杉本晃久 (科学芸術学際研究所)

Q1. 手嶋吉法

1 つの形で様々な敷き詰めが出来るタイルの形は他にもいろいろありそうに思うが、ないのか。

A1.

例えば、辺長が2対1の長方形は畳の部屋でのような敷き詰め方なども可能で、no-edge-to-edge も考慮すれば無限のパターンを作れるタイルと言える。しかし、その敷き詰め方のパターンなどにあまり面白みを感じない(局所的な領域で見ると敷き詰め方の基本的なルールは多くない)。今回紹介した凸五角形のように敷き詰め方のパターンがここまで豊かで、いろいろな模様が出来るような凸五角形タイルを私はしらない(この五角形は局所的な領域でわかる敷き詰め方の基本的なルールも多めで、さらにそれらを組み合わせでどのようなものが出来るかが単純に予測できない)。

Q2. 手嶋吉法

ペンローズタイルが非周期敷き詰めのみ可能という意味は、マッチングルールを課した場合という理解でよいか。

A2.

ペンローズタイルはそもそもマッチングルールを含めてのものである。もし、ペンローズタイルの2つのひし形(もしくはカイトとダーツ)に与えられているマッチングルールを取り除いて考えてしまうと、単体では周期的敷き詰めが出来てしまう。「マッチングルールを課した場合」というのではなく、マッチングルールがあるからこそ非周期的敷き詰めのみしか出来なく、それがペンローズタイルということだと思う。

なお、「非周期」には、英語だと nonperiodic と aperiodic と 2 つの異なった意味の敷き詰め方がある。講演でも述べたが、紹介したタイルが生成可能な非周期タイリングとは nonperiodic の意味である。一方で、ペンローズタイルは aperiodic な敷き詰めが可能である(aperiodic な敷き詰めが可能とは nonperiodic な敷き詰め可能ということ、しかしのその逆は必ずしも成り立たない)。

Q. 松本崧生

対称性は如何にお考えでしょうか。

Δ

17 種類の壁紙群のことだと思うが、そのことに関してはほとんど注目をしていないので、特別考察をしていない。これは、これまでの経験から、17 種類の壁紙群が凸五角形タイリングに関する考察で重要な役割を果たすことがなかったため。

C. 松本粽生

17 plane group には、1group 毎に多数のものができます。 Heterogeneous orbits ですね。

第15回国際放散虫研究集会 (新潟,2017年)と形の科学 松岡篤 (新潟大学)

Q1. 鈴木英雄

放散虫の数(種類)、カラー、放散虫個別の性質や特色がある のかどうか。

A1.

放散虫はカンブリア紀に出現し、現在でも海洋に生息しているが、化石および現生の放散虫を合わせて、約1万種が認識されている。それらは形の違いにより区別される。種の多様性の高い生物であるといえる。

Q2. 鈴木英雄

個別の性質や特色の文章とその写真はあるか。

オセロ風ボードゲーム(当社開発)、カードゲーム(認知度、学習効果 up) を試作したい。(販売は当方ではしない) そのための写真と文章が欲しい(50~90 枚)。 個別の性質や特色の文章とその写真については後日連絡がほしい。

A2.

これまでに記載された種については、学術論文の中に種を定義する文書や写真・図がある。日本語での新種の記載は認められていないため、日本語による種を説明する文章はほとんどない。放散虫の社会認知度をあげるためには、日本語の解説が必要である。

Q3. 鈴木英雄

放散虫写真を使った駐車、駐輪(禁止)ポール(立体認識)を試作したい。無料で提供します。認知度 up。写真がほしい。

第 15 回国際放散虫研究集会へはどなたでも参加できるので、 参加登録してほしい。

展示物がある場合は、個別に相談いただきたい。

Q. 松本崧生

放散虫、チャート、ともに石英質(amorphous or crystal)なのに溶解するとき差異がでるのですか。

A.

チャートから放散虫の殻を取り出す際には、フッ酸(HF)を使用します。フッ酸により、放散虫の殻およびその周りの石英質の基質もともに溶けます。溶ける速度の微妙な差を使って、殻を取り出していることになります。殻の方が先に溶けるような岩石試料の場合には、化石が取り出せません。

長方形の可撓体の一部を重ね合わせて作る立体の研究 阿竹克人 (阿竹研究所)

C. 森田克己

教材としては有効活用できそうだ。パーツを色面分割等すると、多面体の塗り分けなど、新しい形が発見できる可能性がある。

Q1. 松浦執

アナとハートのスリットのプロポーションなどは、ご発表のものが最適化されているのですか

A1

最終的なプロポーションは作りながら最近到達したものである。大きいほうが、四回対称型と六回対称型の誤差が小さくなるが、今回のものが理論的に最大限。

Q2. 松浦執

ユーザーの立場としてみると、設計図が難しそうに感じるが

何かうまい表現技法はあるか。

確かにわかりにくいかもしれない。現在の説明書は形の科学 会向けのレベルで書いている。

Q. 手嶋吉法

名刺やトランプなど、長方形を組み合わせて多面体的な立体 を形成した例は過去にもあったと思うが今回のお話は、切込 みの入れ方を工夫して特許出願をされたのか。

切込みだけでは実施例に過ぎないので、切込みと穴の両方で 接合可能な長方形として特許出願した。

ポリゴンメッシュで再現された歴史的木彫に対する形態分析 王健 (千葉大学)、久保光徳 (千葉大学)

Q. 髙木隆司

興味ある研究だと思う。これは発表者の研究室で開発したも のか。

Α

ポリゴンメッシュの向きの異方性と等方性を検証する方法は、 当研究室で開発したものである

Q. 佐々木康成

全体的な理解としては、「波」のような空間を表現するような のは異方性に関する特微量が強くでてきて、「龍」のようなオ ブジェクト(対象物)を表現するときには等方性のある特微量 が強くでてくるということでいいですか。

Α

束縛的で、西洋的であるかとか、近代的であるか、現代的で あるかというような違いも見られることがあり、今回の分析 結果(手法も含めて)も今後の形態分析に生かしていくための きっかけとしたいと考えている。

平面画像の立体認識による分離方法と製品

鈴木英雄 (株式会社一心助け)、鈴木博英 (株式会社一心 助け)

C. 森田克己

デザイン教育の観点から作品制作において活用できれば面白 ٧١₀

Q1. 松浦執

そこにない立体物をあると感じてしまうので、急に立体物が あると認識されるとあわてて回避操作してしまわないか。

実際にはない物をあると感じるだけなので、その立体物との 衝突は起きないから危険はむしろ少ない。

Q2. 松浦執

遠方から接近するとき、実際の物体が目に入るのとは異なる 違和感や、接近してから急に立体認識するなどのことはない か。

A.

画像と環境の比率の工夫が可能であろう。

Q. 手嶋吉法

車止めのブロックの場合は、それに当ててから止める人もい るので、平面画像だと当たらないので、壁などに衝突する恐 れがあるが、どうするか。

問題ないと考えている。

形と知

可視化された相互コメントの時間的変化の分析 河野広和 (東京学芸大学附属世田谷小学校)、松浦執 (東 京学芸大学)

Q. 松岡篤

黒板を用いたデータのまとめがなされているが、黒板を使用 するタイミングとその意味は何か?

IC 機器の使用時に児童たちは下を向いて操作するため、教室

は異様な雰囲気となる。その違和感を緩和する意味が黒板使 用にはある。ネガティブなコメントに対するケアには、対面 の授業形態が必要である。

3次元技術の活用によるカンボジア文化遺産の模型作製 内田龍之介 (千葉工業大学)、宮本圭佑 (千葉工業大学)、 手嶋吉法 (千葉工業大学)

Q. 住田雅樹

概要の図1と図4を比べると屋根が滑らかで十分再現できて いない点があると思う。改善策は?

図4の模型の形状データ生成用の写真撮影は、人が地面に立 っておこなった。そのため、建物を上方から撮影した情報が 欠落しており、ご指摘の問題が残った。この点を改善する為、 ドローンによる撮影を現地でおこなったが、そちらの形状デ ータや模型は今回の発表には間に合わなかった。

Q. 松岡篤

生成された3次元像がうまくいっているかどうかの判断は人 間の眼によるものか。

今回は、3 次元形状データと現物(あるいは現物を映した写 真)を見比べての判断である。これは今回の目的(土産用の 模型作製) には十分と考えているが、高精度な 3D スキャナな どを用いて生成される3次元形状データと今回の3次元形状 データを比較しておくことは重要である。

形の科学一般

空間曲線による幾何学模様の生成 森田克己 (札幌大谷大学)

10月9日(日)

形の科学一般

筋電及び動作解析からみた剣道

西畑大輔(福井大学大学院)、髙田宗樹(福井大学大学院)、 平田隆幸(福井大学大学院)

Q. 中島善人

剣道経験者は下肢の筋肉の使い方がうまいとのことだが、 やはり下肢を鍛えるアスリートと剣道経験者との間に差はあ りうるか?

A.

ある。

Q. 三浦岳

上腕の屈筋2つを計測していないのはなぜか。

今回は振り上げ運動に焦点をあてて解析を行った。

Q. 手嶋吉法

身体運動は形の科学の重要な研究対象であるという考えに賛 同する。まとめのスライドに、「理想的な体の動かし方を明ら かに出来る可能性がある」というような記述があったと思う。 それ自体は熟練者の動きを計測することにより、ある程度明 らかに出来ると思う。しかし、それを明らかに出来たとして、 このような科学的な解析は非熟練者を上達させる為にどのよ うに役立つのか。

A.

熟練者の筋肉のどの部分が使われているのかが明らかになれ ば、非熟練者の指導にも役立てることが可能と思う。 実際の指導に役立てる為の基礎研究としてやっている。

シミュレーションから連なり線を決定する新手法 根岸利一郎(埼玉工業大学)、関口久美子(埼玉工業大学)、 内田正哉 (埼玉工業大学)

Q. 髙木隆司

点配列のスペクトルはどのような方法で求めたか。

Δ

いろいろな方向での点間隔から求めた。

Q. 中島善人

進化の戦略として何故ひまわりはフィボナッチ的な配置作戦 を選んだか?

Α

諸説あるが、まだよくわかっていない。

Q1. 手嶋吉法

ヒマワリの場合は平面上の円内の点配置、パイナップルの場合は円柱面(母線で開くと長方形)上の点配置を考えているという理解で良いか。

A1.

それで良い。

Q2. 手嶋吉法

点の大きさに依らないという意味は、2点間距離を考える時、 大きさを持たない点同士の距離を見ているという理解で良い か

A2.

それで良い。

Q3. 手嶋吉法

実際のヒマワリは、球面の一部の様な曲面上に種が配置されているように見える。パイナップルの場合、円柱の太さが多少変化しているように見える。2点間の距離を測る際、空間内で測るか、曲面上で測るかで距離が変わるように思う。

A3.

ヒマワリの種を球面上の点配置として考えたり、パイナップルで円柱の太さの変化を考慮すれば、やや結果が変わるかもしれない。距離は、今回は空間内での直線距離を用いた。

画像セグメンテーション用アルゴリズム GrowCut の紹介 中島善人(産業技術総合研究所)

Q1. 住田雅樹

砂脈が何個もあるときは固定できるか。

A1.

複数の砂脈を異なる初期値で定義すれば可。

Q2.

連続的なものを固定するのが目的という理解でいいか。

A2. 住田雅樹

不連続用ということではなく連続用。

Q. 髙木隆司

Grow-Cut ではセグメンテーションは、各ピクセルの明るさによって判断しているように思える。一方、人間は各領域の質感も判断材料にしている。それは可能だろうか。

A.

各点について近辺との相関を調べ、砂状が縞模様か等の判断 をすれば可能になる。

触覚学習用地球儀の開発と評価

手嶋吉法(千葉工業大学)、細谷洋介(千葉工業大学)、 酒井一磨(千葉工業大学)、中野司(産業技術総合研究所)、 田中明子(産業技術総合研究所)、青松利明(筑波大学附 属視覚特別支援学校)、山澤建二(理化学研究所)

Q. 鈴木英雄

視覚障害者は触覚による図形は描けるか

A.

視覚障害者は図形をフリーハンドで紙に描くことは苦手である。見える人(晴眼者)の場合、例えば円を描くとき、自分が描いた線を見ながらこれから描く線の軌道を修正できるが、見えない人はそれが出来ないので、格段に難しくなる。

Q. 住田雅樹

石膏の 3DP について、造形速度と表面のロウ付け、アロンアルファ含浸について石膏の割れ防止のためでしょうか。

A.

造形時間は 2105 層で約 15 時間である。ロウ付けやアロンアルファは、石膏模型の強度を高める為の処理。業務用アロンアルファを購入し、球面全体に浸み込ませた。

Q. 石原正三

触覚の体験からある知識を教える場合どのように説明するのか。また、理解をどのように確認するのか。

Δ

ご質問の趣旨は、今回の我々の発表内容を超えたところにあると思う。今回我々の触覚用地球儀を全盲の高校生に触ってもらい、最初に基準となる地球上の3地点を伝え、両手を使って3地点を同時に押さえ、それらの情報を拠りどころにして、小中学校で既に学習済みの六大陸を探してもらうなどした。被験者の世界地理の理解度を調査しようとしたのではなく、「模型が触覚で理解し易いものになっているか」の調査である。

Q. 中島善人

なぜ立体模型で突起のB3は溝のC3より好評だったのか。

Δ

手でなぞった時に、溝は検出しづらく、突起の方がわかりや すいので、後者が好まれたと考えている。