

形の科学会誌の論文スタイルファイル

形 科学¹⁾, 形 物理²⁾, 形 数理³⁾

- 1) 形の科学大学物理学研究室 〒 150-8366 東京都渋谷区渋谷 4-4-25 kagaku_katachi@usfj.ac.jp
 2) 形の科学大学物理学研究室 〒 150-8366 東京都渋谷区渋谷 4-4-25 kagaku_katachi@usfj.ac.jp
 3) 形の科学大学物理学研究室 〒 150-8366 東京都渋谷区渋谷 4-4-25 kagaku_katachi@usfj.ac.jp

LATEX STYLE FILE FOR BULLETIN OF SOCIETY FOR SCIENCE ON FORM

Kagaku KATACHI, Butsuri KATACHI, Suuri KATACHI

- 1)The University for Science on Form Japan 4-4-25 shibuya, shibuya-ku, Tokyo 150-8366
 2)The University for Science on Form Japan 4-4-25 shibuya, shibuya-ku, Tokyo 150-8366
 3)The University for Science on Form Japan 4-4-25 shibuya, shibuya-ku, Tokyo 150-8366

(2022 年 10 月 7 日受付、2022 年 11 月**日受理)

It has never been realized to deal with the scattering problem of the TE mode of a vector field by point-like scatterers in , which is essentially a vector field problem, by a simple approximate solution method. In this paper, we extend the formulation of the approximate solution for the scattering problem by point-like scatterers to the case of vector fields.

Key Words: Point-like Scatterers, Scattering Problem, Dyson's Equation, Approximate Solution, Transverse Vector Field

1. はじめに

半導体、絶縁体のヘテロ界面のバリスティックな 2 次元電子系に導入した列状、格子状アンチドット [1], 不純物の存在により普遍的コンダクタンスのゆらぎを示す拡散的伝導をする電子系 [2], 構造色を呈する羽毛、昆虫の表皮などスポンジ状の光学素材 [3, 4, 5], 消音用のポーラスな音響材料 [6, 7] は小さな散乱体が多数存在する散乱問題となる。これらの問題では波のコヒーレンスが現象の重要な因子となっており、多数存在する散乱体について統計平均を取るなどのコヒーレントポテンシャル近似 [8] は用いることができない。

この種の問題の中で散乱体の散乱半径が小さな場合について、散乱体を点状散乱体と近似し、容易に取り扱える近似的計算手法が開発された [1]。また、境界がある場合の開放系では境界要素法との組み合わせへ容易に拡張できる。実際、この手法は散乱ポテンシャルがある場合の境界要素法として開発されている [1, 9]。

この近似的な解法は、垂直に一樣磁場のかかった 2 次元電子系のアンチドットアレーにおける飛び石軌道 (runaway trajectory) の存在の証明 [1], 点状磁性散乱体による電子スピンの反転現象を見出す [9, 10] など成功を収めている。

本論文では点状散乱体による散乱問題の定式化を横波ベクトル場へ拡張する。

2. 支配方程式とベクトル場の積分表現

電磁場を例にとり、横波ベクトル場の積分表現を導出する。透磁率は真空中の値 μ_0 で、比誘電率が $\varepsilon(\mathbf{r})$ のように空間的に変化する 3 次元空間を考える。この空間に電流が存在しない場合、2 つのマクスウェル方程式を統合した電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ についての方程式は

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\varepsilon(\mathbf{r})}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{E} \quad (1)$$

と表される。ここで、 c_0 は真空中での光速である。

電磁場の場合、磁場のみの方程式とすることも可能であり、磁場 $\mathbf{H}(\mathbf{r})$ の満たす方程式は

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\varepsilon(\mathbf{r})} \nabla \times \mathbf{H} \right) = -\frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{H} \quad (2)$$

となる。式 (2) は式 (1) と異なり、比誘電率の空間微分を含む。誘電体の板の場合のように、比誘電率が矩形状に変化するとき、ステップ関数の微分、すなわちデルタ関数が現れ、計算精度を悪くする。したがって、本論文では電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ についての方程式を用いて定式化する。

定常問題の支配方程式は角周波数を ω として、

$$\left(-\nabla \times \nabla \times + \frac{\omega^2}{c_0^2} \varepsilon(\mathbf{r})\right) \mathbf{E} = 0 \quad (3)$$

$$\left(-\nabla \times \nabla \times + \frac{\omega^2}{c_0^2}\right) \mathbf{E} = -\frac{\omega^2}{c_0^2} (\varepsilon(\mathbf{r}) - 1) \mathbf{E} \quad (4)$$

$$\equiv V(\mathbf{r}) \mathbf{E} \quad (5)$$

となる。

方程式 (5) の解は一般に

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) - \int V(\mathbf{r}') \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega) \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (6)$$

と書ける。ここで、 $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ は $V(\mathbf{r}) = 0$ の場合の解である。

また、テンソルグリーン関数 \mathcal{G} は以下のように与えられる [11]。

$$\mathcal{G}_{jl}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega) \equiv \left(\delta_{jl} + \frac{c_0^2}{\omega^2} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_l} \right) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; k) \quad (7)$$

ここで、 $j, l = x, y, z$ であり、また、 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega)$ は

$$\left(\nabla^2 + \frac{\omega^2}{c_0^2} \right) G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; \omega) = -\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \quad (8)$$

を満たすヘルムホルツ方程式のグリーン関数である。

3. 点状散乱体

光速が c_0 の媒体で満たされた空間内の点 \mathbf{R} に内部の光速が $c(\mathbf{R})$ の点状散乱体が存在するとする。考える波の波数を $k = \omega/c_0$ と定義する。点 \mathbf{R} を中心とする点状散乱体を半径 a の円形領域での光速を c として

$$v_{\mathbf{R}}(\mathbf{r}) = \left\{ 1 - \left(\frac{c_0}{c(\mathbf{R})} \right)^2 \right\} \pi (ka)^2 \frac{1}{\pi a^2} \Theta(a - |\mathbf{r} - \mathbf{R}|) \quad (9)$$

と表す。ここで、 $\Theta(x)$ はヘヴィサイドの階段関数である。

$$\mathcal{V}(\mathbf{R}) \equiv \left\{ 1 - \left(\frac{c_0}{c(\mathbf{R})} \right)^2 \right\} \pi (ka)^2 \quad (10)$$

がこの散乱体の散乱能となる。

N 個の散乱体がある場合、 n 番目の散乱体の位置ベクトルを \mathbf{R}_n として、全体の散乱ポテンシャルは

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= \sum_{n=1}^N v_{\mathbf{R}_n}(\mathbf{r}) \\ &= \sum_{n=1}^N \mathcal{V}(\mathbf{R}_n) \frac{1}{\pi a^2} \Theta(a - |\mathbf{r} - \mathbf{R}_n|) \end{aligned} \quad (11)$$

と書ける。Fig. 1 には局所ゲージ有限要素法 [?] (LG-FEM) で求めた Kd の固有値も一緒に示してある。

境界のない開放系で、入射波 $\mathbf{E}_0(\mathbf{r})$ がある場合の電場は式 (6) で与えられる。散乱ポテンシャル $V(\mathbf{r})$ は式 (11) で与えられるから

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) - \int \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; k) \sum_{n=1}^N \mathcal{V}(\mathbf{R}_n) \\ &\quad \times \frac{1}{\pi a^2} \Theta(a - |\mathbf{r}' - \mathbf{R}_n|) \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\ &= \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) - \sum_{n=1}^N \mathcal{V}(\mathbf{R}_n) \int \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; k) \\ &\quad \times \frac{1}{\pi a^2} \Theta(a - |\mathbf{r}' - \mathbf{R}_n|) \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \end{aligned} \quad (12)$$

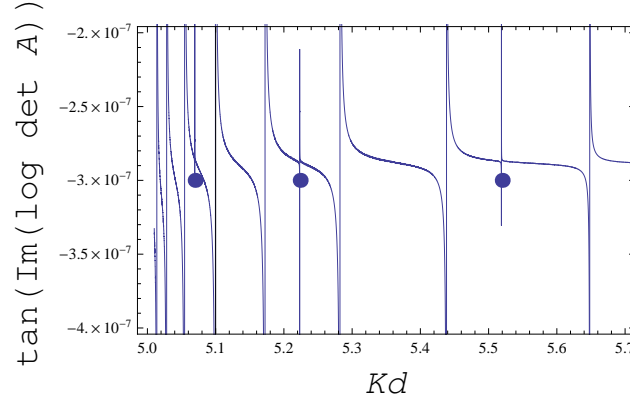


Fig. 1 kd dependence of $\tan(\Im(\log \det A))$ (solid line) and eigenvalues computed by the local-gauge FEM (circlet) for $\tilde{B} = 25$, and $N = 250$.

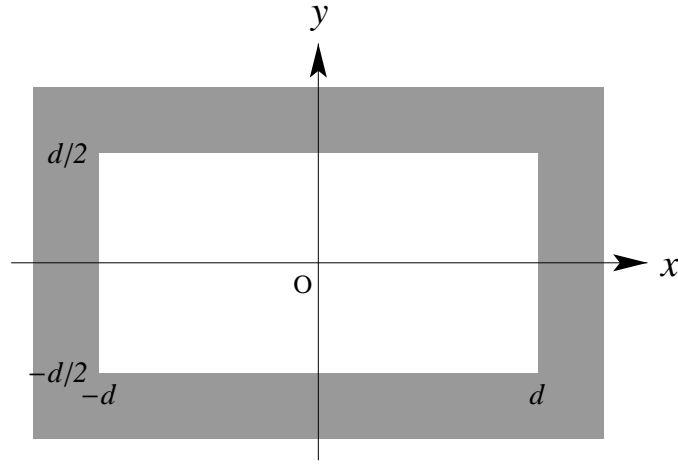


Fig. 2 A $2d \times d$ rectangular cavity.

となる [1, 9]。

散乱体の有効散乱半径 a が十分小さいとして、 $\mathcal{V}(\mathbf{R}_n)$ を一定に保ったまま、 $a \rightarrow 0$ とすると、 $\frac{1}{\pi a^2} \Theta(a - |\mathbf{r} - \mathbf{R}_n|) \rightarrow \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}_n)$ となるから

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) - \sum_{n=1}^N \mathcal{G}(\mathbf{r}, \mathbf{R}_n; k) \mathcal{V}(\mathbf{R}_n) \mathbf{E}(\mathbf{R}_n) \quad (13)$$

を得る。

Fig. 2 において、点状散乱体の位置 \mathbf{R}_m の電場 $\mathbf{E}(\mathbf{R}_m)$ に対する自己無撞着な方程式を得るために $\mathbf{r} = \mathbf{R}_m$ とすると、式 (13) の右辺の和の中に $\mathcal{G}(\mathbf{R}_m, \mathbf{R}_n; k)$ が現れるが、 $\mathcal{G}(\mathbf{R}_m, \mathbf{R}_m; k)$ は発散する。しかし、実際には、式 (12) の右辺は発散しないため、 $a \rightarrow 0$ の極限を取る前の積分

$$\int \mathcal{G}(\mathbf{R}_m, \mathbf{r}'; k) \frac{1}{\pi a^2} \Theta(a - |\mathbf{r}' - \mathbf{R}_m|) \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \quad (14)$$

をより正確に評価する必要がある (Table 1)。

定式化をこれより先に進めるためには、具体的な系を想定する必要がある。平行に並んだ円柱状誘電体散乱体と球状誘電体散乱体について具体的な定式化を行う。

Table 1 Values of the exponent β for given values of the exponent α

α	1	2	2.5	3	4	5	6
β	0.56974	0.31699	0.22032	0.15056	0.07901	0.05763	0.05346

4. 平行に並んだ円柱状誘電体散乱体

散乱体として、軸が z 軸方向に向いた無限に長い半径 a の誘電体円柱が複数並んだ系を考える。この系では、電磁波が z 成分のみの TM モードの場合、本質的にスカラー場の問題に帰着するため、電磁波が x, y 成分のみを持つ ($E_z = 0$ の) TE モードを考える。入射波が x 軸方向の波数 $k_x > 0$ で入射するものとする。電場の成分は、入射波の波数ベクトル \mathbf{k} に対して、横波の条件 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ を満たすように決定される。入射波が z 軸に対して斜めに入射する場合、すなわち z 軸方向の波数 k_z が有限の場合、 x - y 平面内の波数 $k_\perp \equiv \sqrt{k_x^2 + k_y^2} = \sqrt{k^2 - k_z^2}$ を定義する。この場合、 z 軸方向の電場は変数分離し、波数 k_\perp の波が入射する問題として扱え、2次元問題となり、グリーン関数 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; k)$ は

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; k) = \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad (15)$$

を用いる。ここで、 $H_0^{(1)}$ は0次第1種ハンケル関数である。

4.1. テンソルグリーン関数

テンソルグリーン関数 \mathcal{G} は式 (7) で与えられるからここで、 $H_1^{(1)}, H_2^{(1)}$ はそれぞれ1次, 2次の第1種ハンケル関数である。

4.2. $\mathcal{G}(\mathbf{R}_n, \mathbf{R}_n; \omega)$ の計算

式 (14) を $\mathcal{G}_{xx}, \mathcal{G}_{yy}, \mathcal{G}_{xy}$ に対して、散乱体の半径 a が小さいとして近似的に評価する。

\mathcal{G}_{xx} を評価する。点状散乱体内でベクトル場 $\mathbf{E}(\mathbf{r}')$ は変化しないとして、積分の外に出し、また、

$$\mathbf{r}' - \mathbf{R}_m = r(\cos \theta, \sin \theta)$$

で定義した極座標を用いて表すと

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{G}_{xx}(\mathbf{R}_m, \mathbf{r}'; \omega) \frac{1}{\pi a^2} \Theta(a - |\mathbf{r}' - \mathbf{R}_m|) \mathbf{E}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' \\ & \sim \frac{1}{\pi a^2} \mathbf{E}(\mathbf{R}_m) \int \mathcal{G}_{xx}(k|\mathbf{r}' - \mathbf{R}_m|) \Theta(a - |\mathbf{r}' - \mathbf{R}_m|) d\mathbf{r}' \\ & = \frac{1}{\pi a^2} \mathbf{E}(\mathbf{R}_m) \int_0^a \int_0^{2\pi} \mathcal{G}_{xx}(r, \theta; k) r dr d\theta \\ & = \frac{1}{\pi a^2} \mathbf{E}(\mathbf{R}_m) \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{i}{8} \left[(1 + \sin^2 \theta) H_0^{(1)}(kr) \right. \\ & \quad \left. - 2 \frac{1}{kr} \sin^2 \theta H_1^{(1)}(kr) + \cos^2 \theta H_2^{(1)}(kr) \right] r dr d\theta \\ & = \frac{1}{\pi a^2} \mathbf{E}(\mathbf{R}_m) \int_0^a \frac{i}{4} \pi H_0^{(1)}(kr) r dr \\ & \sim \frac{i}{4a^2} \mathbf{E}(\mathbf{R}_m) \int_0^a \left\{ 1 + i \frac{2}{\pi} (\ln r + \ln k + \gamma - \ln 2) \right\} r dr \\ & = -\frac{1}{4} \left(2 \ln \frac{ka}{2} + 2\gamma - 1 - i\pi \right) \mathbf{E}(\mathbf{R}_m) \end{aligned} \quad (16)$$

のように評価できる。ここで、 γ は Euler 定数である。また、最後から3行目から2行目への変形において

$$H_0^{(1)}(z) \approx 1 + i \frac{2}{\pi} (\ln z + \gamma - \ln 2) \quad (17)$$

なる展開を用いた [12]。

この結果は方向に依存しておらず、 \mathcal{G}_{yy} に対する結果も同じになる。したがって、

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{xx}(\mathbf{R}_n, \mathbf{R}_n; k) &= \mathcal{G}_{yy}(\mathbf{R}_n, \mathbf{R}_n; k) \\ &\simeq -\frac{1}{4} \left(2 \ln \frac{ka}{2} + 2\gamma - 1 - i\pi \right) \end{aligned} \quad (18)$$

とすればよいことが分かる。

同様に、 \mathcal{G}_{xy} の場合は

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{G}_{xy}(\mathbf{R}_m, \mathbf{r}'; k) \frac{1}{\pi a^2} \Theta(a - |\mathbf{r}' - \mathbf{R}_m|) d\mathbf{r}' \\ & \sim \frac{1}{\pi a^2} \mathbf{E}(\mathbf{R}_m) \int_0^a \int_0^{2\pi} -\frac{i \cos \theta \sin \theta}{8} \\ & \quad \times \left\{ H_0^{(1)}(kr) - \frac{2}{kr} H_1^{(1)}(kr) - H_2^{(1)}(kr) \right\} r dr d\theta \\ & = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

Table 2 $\frac{\Delta\mu V}{\Gamma V^{\frac{2}{3}}}$ -dependence of the number of the daughter vesicles for $\alpha = 2$.

$\frac{\Delta\mu V}{\Gamma V^{\frac{2}{3}}}$	l
< 0.0503	never divides
$0.0503 \sim 0.0631$	2
$0.0631 \sim 0.0743$	3
$0.0743 \sim 0.0846$	4
$0.0846 \sim 0.0941$	5

と評価される。したがって、

$$\mathcal{G}_{xy}(\mathbf{R}_n, \mathbf{R}_n; k) = \mathcal{G}_{yx}(\mathbf{R}_n, \mathbf{R}_n; k) = 0 \quad (20)$$

とすればよい。

以上により、円柱状誘電体散乱体が平行に並んだ場合の定式化が完了した。

4.3. 自己無撞着方程式

まとめると、点状散乱体の位置 $\{\mathbf{R}_n\}$ のベクトル場 $\{\mathbf{E}(\mathbf{R}_n)\}$ を求めるための自己無撞着方程式は以下のように与えられる。

$$E_j(\mathbf{R}_m) = E_{0j}(\mathbf{R}_m) - \sum_{n=1}^N \sum_{l=x,y} \mathcal{G}_{jl}(\mathbf{R}_m, \mathbf{R}_n; k) \mathcal{V}(\mathbf{R}_n) E_l(\mathbf{R}_n) \quad (21)$$

$$\mathcal{G}_{jl}(\mathbf{R}_m, \mathbf{R}_n; k) \equiv \begin{cases} \left(\delta_{jl} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}_{mj} \partial \mathbf{R}_{nl}} \right) G(\mathbf{R}_m, \mathbf{R}_n; k) & \mathbf{R}_m \neq \mathbf{R}_n \\ -\frac{1}{4} \left(2 \ln \frac{ka}{2} + 2\gamma - 1 - i\pi \right) \delta_{jl} & \mathbf{R}_m = \mathbf{R}_n \end{cases} \quad (22)$$

$$G(\mathbf{R}_m, \mathbf{R}_n; k) \equiv \frac{i}{4} H_0^{(1)}(k|\mathbf{R}_m - \mathbf{R}_n|) \quad (23)$$

$$j, l = x, y, \quad m, n = 1 \sim N$$

5. 球状誘電体状散乱体

散乱体として、半径 a の誘電体球が複数並んだ系を考える。入射波が x 軸方向の波数 $k_x > 0$ で入射するものとする。電場の成分は、入射波の波数ベクトル \mathbf{k} に対して、横波の条件 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$ を満たすように決定される。この問題のグリーン関数 $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; k)$ は

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}'; k) = \frac{1}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \quad (24)$$

である。Table 2 に示す。

5.1. テンソルグリーン関数

テンソルグリーン関数 \mathcal{G} は式 (7) で与えられるからのように評価できる。この結果は方向に依存しておらず、 \mathcal{G}_{yy} , \mathcal{G}_{zz} に対する結果も同じになる。

この結果は方向に寄らないため、

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{ij}(\mathbf{R}_n, \mathbf{R}_n; k) &= 0 \\ i \neq j &= x, y, z \end{aligned} \quad (25)$$

を得る。

以上により、球状誘電体状散乱体の場合の定式化が完了した。

5.2. 自己無撞着方程式

まとめると、点状散乱体の位置 $\{\mathbf{R}_n\}$ のベクトル場 $\{\mathbf{E}(\mathbf{R}_n)\}$ を求めるための自己無撞着方程式は以下のように与えられる。

$$E_j(\mathbf{R}_m) = E_{0j}(\mathbf{R}_m) - \sum_{n=1}^N \sum_{l=x,y,z} \mathcal{G}_{jl}(\mathbf{R}_m, \mathbf{R}_n; k) \psi(\mathbf{R}_n) E_l(\mathbf{R}_n) \quad (26)$$

$$\mathcal{G}_{jl}(\mathbf{R}_m, \mathbf{R}_n; k) \equiv \begin{cases} \left(\delta_{jl} + \frac{1}{k^2} \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{R}_{mj} \partial \mathbf{R}_{nl}} \right) G(\mathbf{R}_m, \mathbf{R}_n; k) & \mathbf{R}_m \neq \mathbf{R}_n \\ \frac{-1+e^{ika}(1-ika)}{2\pi a(k a)^2} \delta_{jl} & \mathbf{R}_m = \mathbf{R}_n \end{cases} \quad (27)$$

$$G(\mathbf{R}_m, \mathbf{R}_n; k) \equiv \frac{1}{4\pi |\mathbf{R}_m - \mathbf{R}_n|} \exp(ik |\mathbf{R}_m - \mathbf{R}_n|) \quad (28)$$

$j, l = x, y, z, \quad m, n = 1 \sim N$

6. 結論

一般に、電磁場解析において、本論文同様に電場のみでの定式化においても、TM モードに比べ、TE モードの方が計算精度が悪い [13]。したがって、同様の近似を用いたスカラー場の計算手法の計算精度と本論文における定式化を用いた場合の計算精度を比較し精査する必要がある。

また、電磁場を例に定式化を行ったが、散乱ポテンシャルを自由空間中および散乱体内の位相速度の比で表してあるため、従う方程式が同形であればそのまま適用できる。

本論文では境界のない自由空間に複数の点状散乱体がある場合を取り扱ったが、境界のある開放系の中に点状散乱体が複数存在している場合にも、境界でディリクレ、ノイマン境界条件が課されるときには、通常のヘルムホルツ方程式に対する境界要素法と組み合わせることで容易に拡張することができる [1, 9]。

謝辞: 本研究は JSPS 科研費 課題番号 28K5678, 29H05540, 27K03456 の助成を受けて行われました。

参考文献

- [1] L. Ramdas Ram-Mohan : *Finite Element and Boundary Element Applications in Quantum Mechanics*, Oxford University Press, 2002.
- [2] Craig S. Lent, and David J. Kirkner: The quantum transmitting boundary method, *J. Appl. Phys.*, Vol.67, pp.6353-6359, 1990.
- [3] P. A. Knipp and T. L. Reinecke: Boundary-element method for the calculation of electronic states in semiconductor nanostructures, *Phys. Rev. B*, Vol.54, pp.1880-1891, 1996.
- [4] H. R. Frohne, M. J. Mc Lennan, and S. Datta: An Efficient Method for the Analysis of Electron Waveguides, *J. Appl. Phys.*, Vol.66, pp.2699-2705, 1989.
- [5] Yongjiang Wang, Jian Wang, and Hong Guo: Magnetoconductance of a stadium-shaped quantum dot: A finite-element-method approach, *Phys. Rev. B*, Vol.49, pp.1928-1934, 1994.
- [6] Manhua Leng and Craig S. Lent: Quantum transmitting boundary method in a magnetic field, *J. Appl. Phys.*, Vol.76, pp.2240-2248, 1994.
- [7] Koichi Hirayama, Yasuhiro Honma, Yoshio Hayashi, and Masanori Koshiba: A Novel Finite-Element Formulation for the Analysis of the Energy Levels of a Quantum Cavity in a Magnetic Field, *IEEE Photonics Technology Letters*, Vol.10, pp.1359-1361, 1998).
- [8] Tsuyoshi Ueta: Boundary Element Method for Electron Waves in Uniform Magnetic Fields, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, Vol.17, pp.69-74, 1996.
- [9] Katsuki Amemiya and Kiyoshi Kawamura: Analysis of the Hall Effect in Terms of Magneto-Focusing in Quantum Dots, *J. Phys. Soc. Japan*, Vol.64, pp.1245-1250, 1995,
- [10] Tsuyoshi Ueta : Boundary Element Method for Electron Transport in the presence of pointlike scatterers in magnetic fields, *Phys. Rev. B*, Vol.60, pp.8213-8217, 1999.
- [11] Tsuyoshi Ueta: Two-dimensional Electron Systems in Magnetic Fields: The current equipartition law, *Advances in Condensed Matter Physics*, Vol.2011, 104843, 2011,
- [12] Katsuhiro Nakamura, Ken Ito and Yositate Takane: Magnetoconductance in Open Stadium Billiard: Quantum Analogue of Transition from Chaos to Tori, *J. Phys. Soc. Japan*, Vol.63, pp.3210-3213, 1994.
- [13] Katsuhiro Nakamura: Introduction to chaos and quantum transport *Chaos Solitons & Fractals*, Vol.8, pp.971-993, 1997,