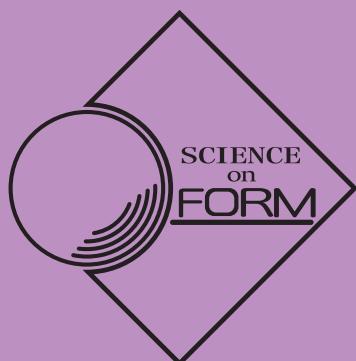


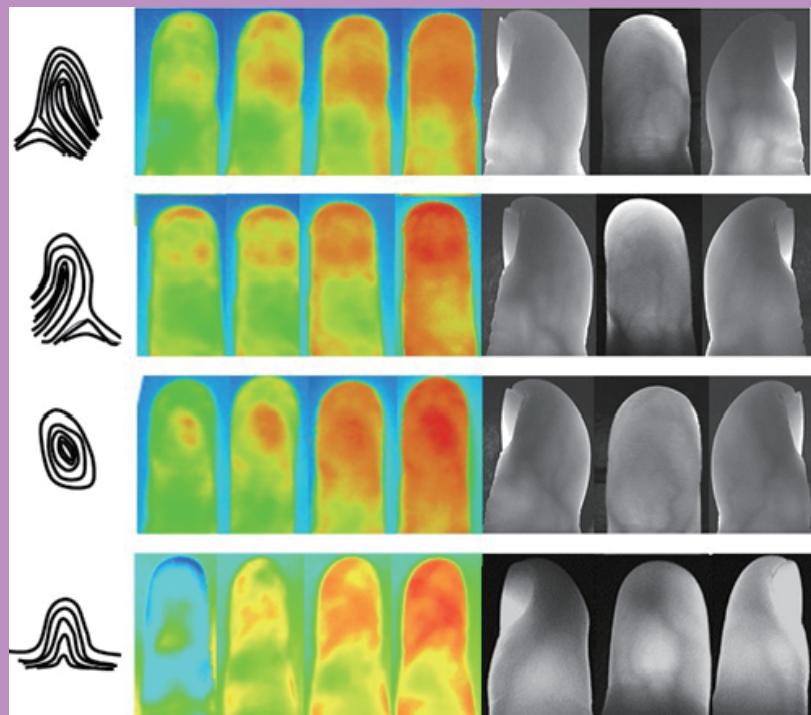
ISSN 0915-6089



形の科学会誌

第36巻 第1号 2021

Bulletin of the Society for Science on Form



形の科学会

<https://katachi-jp.com/>

形の科学会誌 第36巻 第1号 (2021)

目 次

【論文】

指紋の形と動的赤外線サーモグラフィーによって推定された血流との関係 岡崎登志夫	1
--	---

【解説】

周期倍分岐における四つの分岐過程 山口喜博	9
--------------------------------	---

【連載講座】

Colaboratory で形の科学を楽しもう - 第3回 ランダムウォーク：間違った情報は拡散する - 平田 隆幸	45
--	----

【会告など】

会告	57
原稿募集	64

指紋の形と動的赤外線サーモグラフィーによって推定された血流との関係

岡崎登志夫 ヤマザキ動物看護大学大学院

〒192-0364 東京都八王子市南大沢 4-7-2

t_okazaki@yamazaki.ac.jp

Relationship between fingerprint pattern and blood flow
estimated using dynamic infrared thermography

Toshio Okazaki

Graduate School of Yamazaki University of Animal Health Technology
4-7-2 Minami-osawa, Hachiouji, Tokyo 192-0364

(2021年4月4日受付, 201X年5月31日受理)

Abstract: In a previous paper, it has been reported that fingerprint pattern are related to the distribution of veins under the skin. Since the blood transfers heat to living skin, it is possible to infer the direction of blood flow by observing the timing of the rise in temperature of each part of the skin surface of a precooled finger using thermography. Blood flow patterns were compared to the pattern of vein distribution of standard fingerprint shapes, such as the loop, whorl, and arch. A similar study has been conducted for a case of fingerprint mismatch between the left and right hands. This research clarified that the ridges of fingerprints are closely related to the subcutaneous blood flow, and the subcutaneous blood flow is related to the venous running patterns.

Keywords: fingerprint, ridge, vein, blood flow, thermography

1. 緒言

指紋は、胎生期7-12週目ごろまでに完成するといわれているが[1]、各指の指紋の形状がどのような機構に起因して変化するのか、充分な説明はいまだなされていない。先に我々は、赤外線照明装置と赤外線カメラを用いて皮下の静脈分布が指紋の形と密接に関連していることを報告した[2]。心臓や大動脈や大静脈など主要な循環器の配置は、発生の初期段階に位置遺伝子によって決定されるが、末端の毛細血管や細血管新生は、血管内外のさまざまな環境条件等によって変化することが知られている[3, 4]。皮下の静脈分布の違いが、指紋形成期の皮下の血液の流れに影響を与えて、形状に変化が生じているのではないかということは容易に想像することができるが、それを証明するには血流を観察できる特殊な装置が必要であり[5]、非常に困難と思われた。しかし、血液が酸素や栄養成分や老廃物のほかに、熱エネルギーを運ぶことが知られていることから、レイノー現象の診断同様[6]、赤外線サーモグラフィーであらかじめ冷却した指の皮膚表面温度の回復変化を経時的に観

察することによって、皮下の血液や組織液の流れの方向や速さを推定することができるのではないかと考えられた。今回、あらかじめ冷却したさまざまな形の指紋を持つ指の皮膚表面温度の経時的变化を赤外線サーモグラフィーで観察したところ、指紋の形ごとに明らかな違いが認められ、それはまた、皮下の静脈分布とも密接に関連していることが明らかになった。また、一般に、左右の指の指紋の形の一致率が高いことが知られているが、特に左右不一致例についても同様の検討を行った。その結果、皮下静脈分布の違いによっておこる皮下の血液や組織液の流れの方向や速さの違いが、指紋の隆線の形にさまざまなバリエーションを生じさせているものと考えられたので報告する。

2. 対象と方法

2.1. 対象

皮膚紋理（指紋）の中で、最も典型的な蹄状紋、渦状紋、弓状紋例を観察し、比較検討した。また、左右の手の指の指紋不一致例3例について皮膚表面の温度変化と皮下静脈分布を観察した。

2.2. 方法

a) 上肢指表面温度変化の観察

上肢各指をあらかじめ氷水中に数分間浸したのち、水分を拭き取り、サーモグラフィー・サーモギア G120 (NEC Avio 赤外線テクノロジー, 東京) を用いて、上肢各指の掌側末節の表面温度変化（測定温度設定範囲：20-40°C）を経時的に撮影した。

b) 上肢指各末節の皮膚紋理観察と皮下血管分布の観察

上肢各指掌側末節の皮膚紋理を肉眼で観察分類した後、皮下の血管分布を近赤外線出力 LED イルミネーター（波長 850 nm, 日進電子工業, 東京）とマクロレンズ L6000 (エドモンドオプティクス ジャパン, 東京) を装着した赤外線 CCD カメラ (XC-E150, SONY, 日本) を用いて撮影した。上肢の各指末節の背側（爪側）又は腹側にイルミネーターを密着させて照明し、反対側から撮影した (Fig. 1)。

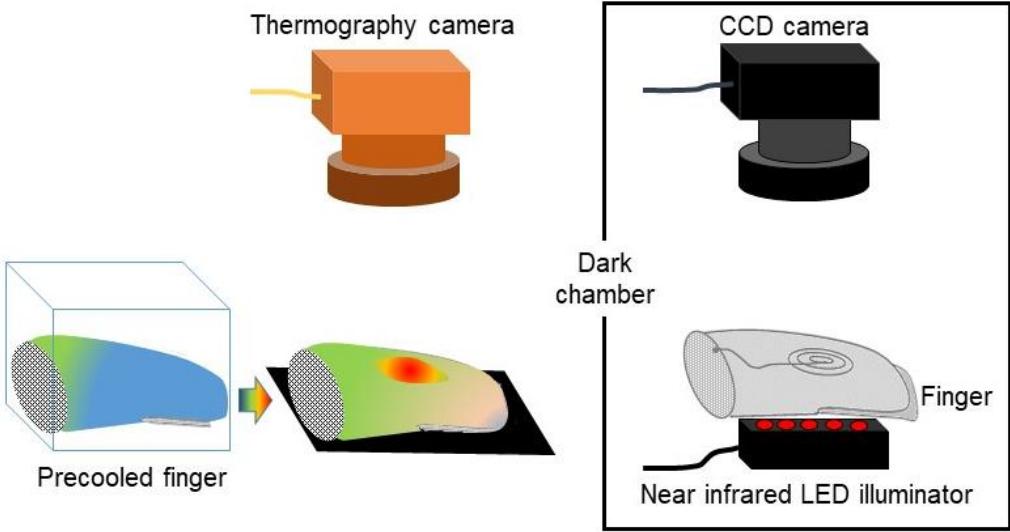


Fig. 1: Analysis of dinamic infrared thermography and blood vessel distribution. The dinamic infrared thermography of pre-cooling finger was performed using the infrared thermographic aparatus, and the obsevation of blood vessel distribution was performed in the dark chamber using the near infrared LED illumination and infrared CCD camera.

3. 結果

上肢指末節の指紋が蹄状紋、渦状紋、及び弓状紋である例 (Fig. 2A) について、あらかじめ各指を氷水中で冷却した後、引き上げて、サーモグラフィーで指掌側表面温度の回復変化を経時的に観察し、撮影した (Fig. 2B)。蹄状紋では、赤外線サーモグラフィーで掌側皮膚表面の温度変化を観察すると、まず初めに指末節の中央付近又は先端付近で皮膚表面温度が上昇し、次いで左蹄状紋では末節左側に、右蹄状紋では末節右側に温度上昇域が出現した。その反対側領域はしばらく遅れて皮膚表面温度が上昇した。近赤外光照射と赤外線 CCD カメラによって皮下の血管分布を観察すると、赤外線サーモグラフィーで先に温度上昇の見られた指末節の左または右端掌側第一関節付近の皮下に太い静脈が確認された。

渦状紋では、赤外線サーモグラフィーで掌側皮膚表面の温度変化を観察すると、まず初めに指掌側末節中央部で温度上昇が始まり、そこから周囲に広がるように温度が上昇し、中節に向かって比較的左右バランスよく温度上昇域が拡大した。近赤外光照射と赤外線 CCD カメラによって皮下の血管分布を観察すると、指末節の掌側中央部に毛細血管密集に起因すると思われる黒い影が認められ、そこに左右から 2 本の太い静脈が近づいていた。

弓状紋では、赤外線サーモグラフィーで掌側皮膚表面の温度変化を観察すると、まず初めに指末節中央部で温度上昇が始まり、そこから末節全体に左右バランスよく広がったが、なかなか中節に広がらず、末節と中節の間の温度上昇が遅れる傾向が認められた。近赤外光照射と赤外線 CCD カメラによって皮下の血管分布を観察すると、渦状紋に比べてやや指先端側中央部に毛細血管密集に起因すると思われる黒い影が認められ、そこから太い血管が両側に伸びていた。ただし、この太い血管を指側面から観察すると、渦状紋に比べてより深い爪側にあることが明らかになった。

次に、左右の指紋不一致例 3 例について、同様に指紋の形、赤外線サーモグラフィー、近赤外線照射による皮下静脈分布について比較し、その代表例を示した (Fig. 2C)。この

例では左右の第Ⅱ指の指紋に違いが見られた。左側が弓状紋の中央部にポケットのあるいわゆる有胎弓状紋で、右側が蹄状紋の中央部にポケットのあるいわゆる有胎蹄状紋であった。赤外線サーモグラフィーであらかじめ冷却した指の皮膚表面温度の変化を観察すると、有胎弓状紋では、初めに指末節中央部で斜めに偏って温度上昇が始まったが、中節側に向かって温度上昇域は左右に広がった。近赤外線照射と赤外線 CCD カメラによって皮下の静脈分布を観察すると、指掌側末節の中央部に毛細血管密集に起因すると思われる黒い影が認められ、左右から中央部に 2~3 本の血管が集まっているのが観察された。側面から観察すると、左右に明瞭な血管は観察されず、全体に不明瞭な血管が散在した。一方、有胎蹄状紋では、あらかじめ冷却した指の皮膚表面温度の変化を赤外線サーモグラフィーで観察すると、初めに指末節中央部で斜めに偏って温度上昇が始まり、広がったが、その後、中央部の温度上昇域を残して、中節に向かって左右に分岐した。近赤外線照射と赤外線 CCD カメラによって皮下の静脈分布を観察すると、末節中央部（有胎紋中央部）に太い血管が縦に走り、温度上昇域の分岐に沿うように屈曲していた。側面から観察すると、右側に比べて左側に太い血管が観察された。他の左右不一致 2 例は、第Ⅱ指が有胎蹄状紋と蹄状紋、第Ⅲ指が渦状紋と有胎蹄状紋の例であったが、赤外線サーモグラフィーの結果、蹄状紋、渦状紋例は Fig. 2B の典型例と、また有胎蹄状紋例は、不一致代表例（Fig. 2C）のものと類似の温度上昇パターンを示した。



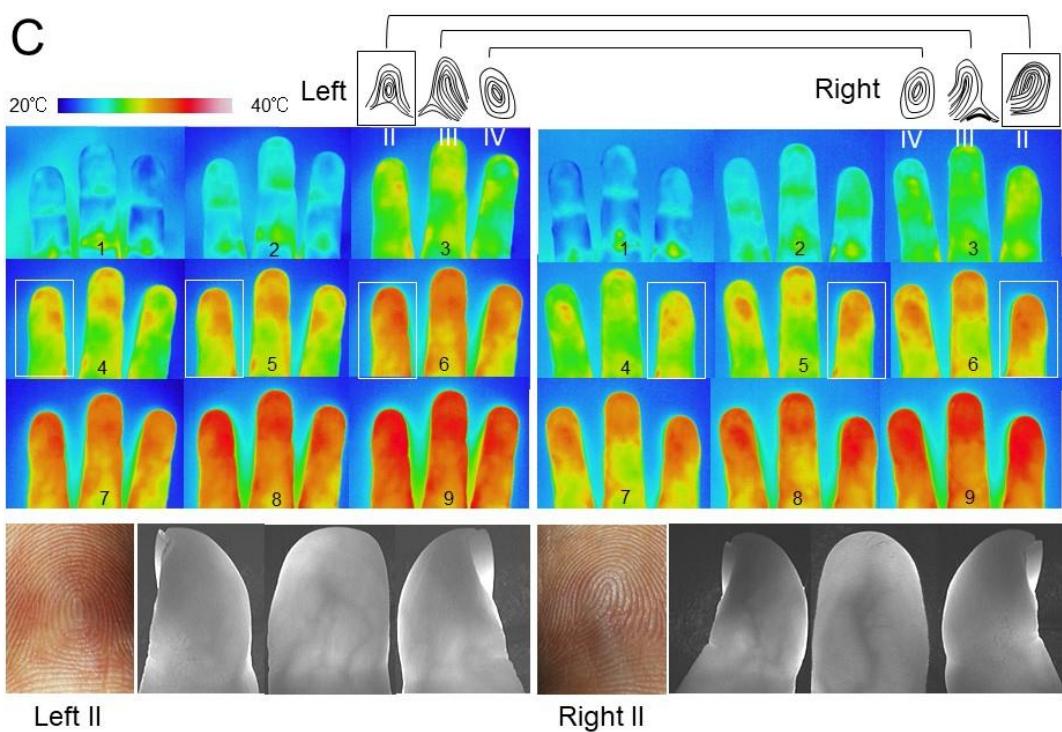
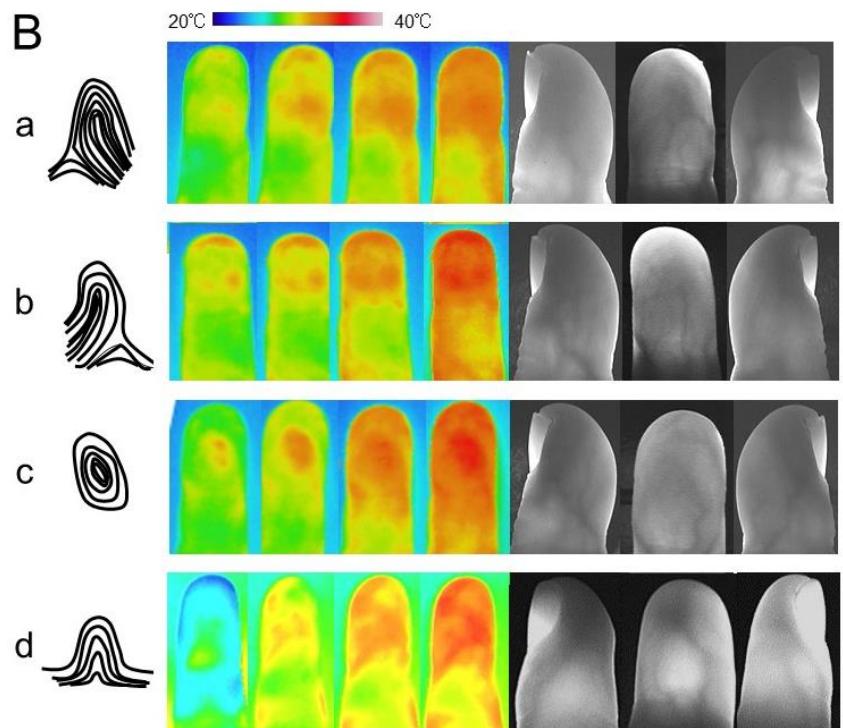


Fig. 2: Fingerprint, dinamic infrared thermography, and blood vessel distribution of the palm side surface of a finger end segment. A, Fingerprint pattern. a: right loop; b: left loop; c: whorl; d: arch. B, Dinamic infrared thermography and blood vessel distribution of fingers with different fingerprint patterns. C, Index fingers, II, surrounded by a white line in this image: fingerprint mismatch between the left and right fingers. Middle fingers, III: loops; ring fingers, IV: whorls.

4. 考察

ひとりひとり指紋の形は異なっており、世界にひとりとして同じ者はいないとされる。しかし、その指紋の形がどのようにして決められるのかを説明した論文はほとんどない。指紋を成す等間隔の隆線形成については、Kücke と Newell が、隆線形成時の基底細胞層の差次的成長と掌側パッドの退行に対する抵抗によって誘導されるとする説を提唱しているが[7]、複雑な隆線形成の説明として充分とは言えない。先に我々は、指紋の形と皮下の静脈分布の間に一定の関連性があることを報告した[6]。皮下の静脈分布の違いが、皮下の血液や組織液の流れの方向や速さに違いを生じさせ、指紋の隆線の走る方向に影響を与えていた可能性を検討するため、赤外線サーモグラフィーを用いて、あらかじめ冷却しておいた各指掌側の皮膚表面の温度変化を観察した。その結果、蹄状紋では、皮膚表面温度が早く上昇する側に隆線が流れるように走行していた。皮膚表面温度が早く上昇するということは、そちら側に血液や組織液が流れているものと考えられるが、そこには比較的太い静脈が分布していることが明らかになった。毛細血管や細静脈に、近傍の動脈に由来する組織液が取り込まれており[8]、キャピラリーベッドから細静脈に向かう組織液の流れが生じているものと考えられた。渦状紋では、末節中央部から温度が上昇し始め、その上昇域が末節から中節へと比較的バランスよく広がった。末節中央部には毛細血管が密に分布しており、末節周辺部からその中央部に血液や組織液が流れ込み、そこに渦の中心ができるるものと考えられた。弓状紋では、末節先端側の皮膚表面温度は速やかに上昇するが末節下側と中節の間の温度上昇は遅れる傾向を示した。弓状紋の末節中央部には渦状紋同様、毛細血管が密に分布しており、その中央部に血液や組織液が流れ込むが、そこから周辺に均等に拡散せずに、左右への流れが強くなっているものと考えられた。左右の指紋不一致例についても、隆線の走行に沿うように温度上昇が起こり、この温度上昇域を裏付けるように皮下静脈が分布しており、この静脈分布が血液や組織液の流れを作り、隆線の走行に影響しているものと考えられた。

以上の結果から、先に報告したように指紋の形と皮下の静脈分布の間には密接な関係があり、その原因としては、毛細血管から細静脈へと取り込まれる組織液（血漿）の流れが隆線の走行に影響を及ぼしているものと考えられた。さまざまな遺伝病と指紋分布の偏りの関連性が報告されているが[9]、循環器系の先天的遺伝的疾患に伴う血流速度の変化や血管新生異常などが、皮下の血液や組織液の流を変化させ、隆線走行に影響を及ぼしているのではないかと考えられた。遺伝病では、指紋分布の偏りのみならず、顔相の変化も報告されており[10, 11]、これらの顔相の変化も指紋と同様、皮下静脈分布や血液粘度の変化に伴う血液や組織液の流れの変化に起因しているかもしれない。今後、AI の発達等によって、指紋や顔相などの形態的特徴から、さまざまな遺伝的リスクファクターや症状改善のための新しい治療法が発見されることが期待される。

参考文献

- [1] Seidenberg-Kajabova, H., Pospisilova, V., Vranakova, V and Varga, I., An original histological method for studying the volar skin of the fetal hands and feet, Biomed. Pap. Med. Fac. Univ. Palacky. Olomouc. Czech. Repub. 154, 211-218, 2010.
- [2] 岡崎登志夫, 指紋の形と静脈分布の関係について, 形の科学会誌, 第 30 卷, 第 2 号, 104-

114, 2015.

- [3] Yashiro, K., Shiratori, H. and Hamada, H., Haemodynamics determined by a genetic programme govern asymmetric development of the aortic arch, *Nature* 450, 285-288, 2007.
- [4] 濱田博司, 体の左右非対称, 生産と技術, 第 60 卷, 第 3 号, 77-80, 2008.
- [5] Webb, R.C., Ma, Y., Krishnan, S., Li, Y., Yoon, S., Guo, X., Feng, X., Shi, Y., Seidel M., Cho, N. H., Kurniawan, J., Ahad, J., Sheth, N., Kim, J., Taylor VI, J.G., Darlington, T., Chang, K., Huang, W., Ayers, J., Gruebele, A., Pielak, R. M., Slepian, M.J., Huang, Y., Gorbach, A. M. and Rogers, J. A., Epidermal devices for noninvasive, precise, and continuous mapping of macrovascular and microvascular blood flow, *Science Advances* 1, e1500701, 2015.
- [6] 渡部一郎, レイノー現象を有する膠原病患者の冷水負荷試験によるサーモグラフィーの検討, *リウマチ* 31 卷, 2 号, 167-173, 1991.
- [7] Kücken, M. and Newell, A. C., Fingerprint formation, *J. Theo. Biol.* 235, 71-83, 2005.
- [8] Kobayashi, H. and Takizawa, N., Imaging of oxygen transfer among microvessels of rat cremaster muscle, *Circulation* 105, 1713-1719, 2002.
- [9] Okazaki, T., Relationship between deviated fingerprint distribution and vascular factor abnormality, *J. Vasc.* 3, 1000125, 2018.
- [10] Dimitriou, D., Leonard, H. C., Karmiloff-Smith, A., Johnson, M. H. and Thomas, M. S., Atypical development of configural face recognition in children with autism, Down syndrome and Williams syndrome, *J. Intellect. Disabil. Res.* 59, 422-438, 2015.
- [11] Kosilek, R. P., Frohner, R., Würtz, R. P., Beer, C. M., Schopohl, J., Reincke, M. and Schneider, H. J., Diagnostic use of facial image analysis software in endocrine and genetic disorders: review, current results and future perspectives, *Eur. J. Endocrinol.* 173, M39-M44, 2015.

周期倍分岐における四つの分岐過程

山口喜博

〒290-0073 千葉県市原市国分寺台中央 2-4-14

chaosfractal@iCloud.com

Four bifurcation processes of the period-doubling bifurcation

Yoshihiro Yamaguchi

2-4-14 Kokubunjidai-Chuo, Ichihara, Chiba 290-0073, Japan

(2021年5月17日受付, 2021年6月5日受理)

Abstract: The two-dimensional area-preserving map T including one parameter a (≥ 0) is considered. It is assumed that T is integrable at $a = 0$ and the Smale horseshoe H exists at $a \geq a_c^H$. The bifurcation processes of the period-doubling bifurcation studied in this paper are classified into the following four types (Types I-IV). Type I: The elliptic periodic orbit undergoes only the ordinary period-doubling bifurcation and becomes a saddle orbit with reflection in H . Type II: The elliptic periodic orbit undergoes the ordinary period-doubling bifurcation, the reverse period-doubling bifurcation and the equi-period bifurcation in this order and becomes a saddle orbit in H . Type III: The saddle periodic orbit undergoes the reverse equi-period bifurcation and the ordinary period-doubling bifurcation in this order and becomes a saddle orbit with reflection in H . Type IV: The saddle periodic orbit undergoes the reverse equi-period bifurcation, the ordinary period-doubling bifurcation, the reverse period-doubling bifurcation and the equi-period bifurcation in this order and becomes a saddle orbit in H . Using the typical periodic orbits, we discuss the properties of four types. The code of the daughter periodic orbit appearing through the (reverse) period-doubling bifurcation is determined. The codes of two daughter periodic orbits appearing through the (reverse) equi-period bifurcation are also determined. The cause of the occurrence of four types is elucidated.

Keywords: Area-preserving map, Period-doubling bifurcation, Equi-period bifurcation, Smale horseshoe, Code

1. 本論文の目的

本論文では、平面上で定義された面積保存写像 T における周期倍分岐過程 [1] を調べる。

$$T : y_{n+1} = y_n + f(x_n), \quad x_{n+1} = x_n + y_{n+1}. \quad (1)$$

ここで $f(x) = a(x - x^2)$ ($a \geq 0$). 写像 T はエノン写像族 [2] に含まれる。 $a = 0$ では、写像 T は可積分系である。 $a \geq a_c^H = 5.17660536904\cdots$ において、写像 T にはスメールの馬蹄 H が存在する [3]. このことより記号力学の成果を利用することが可能である [4]. 本論文では要請 1.1 の

もとで議論を行う.

要請 1.1. パラメータ a を増加すると, 楕円点の周りの回転の仕方は増加する.

楕円点の周りを回転する周期軌道の回転の仕方を表現する回転数 p/q を導入する. 回転数 p/q は, 写像 T を q 回作用すると周期軌道が楕円点の周りを p 回だけ回転することを意味している. パラメータ a を増加すると要請 1.1 より楕円点の周りの回転の仕方は増加する. 回転数が $1/2$ に到達すると周期倍分岐が生じる. つまり, 要請 1.1 が周期倍分岐が生じる主原因であることは間違いない

次に周期軌道の線型安定性を簡単にまとめておく. 周期 q の軌道点を $z_k = (x_k, y_k)$ ($0 \leq k < q$)とする. 軌道点 $z_k (= T^k z_0)$ における線形化行列 $M(z_k)$ は

$$M(z_k) = \begin{pmatrix} 1 & f'(x_k) \\ 0 & 1 + f'(x_k) \end{pmatrix} \quad (2)$$

と得られる. ここで, $f'(x_k) = a(1 - 2x_k)$. また, $M(z_k)$ の行列式は 1 である. これは写像 T が面積保存であることを意味している.

写像 T^q の線形化行列は $M_q = M(z_{q-1}) \cdots M(z_1)M(z_0)$ である. $r(a) = \text{Trace } M_q$ として, 固有値 λ を決定する固有方程式は次のように書ける.

$$\lambda^2 - r(a)\lambda + 1 = 0. \quad (3)$$

係数 $r(a)$ を安定性係数と名づける. 安定性係数をもとに周期軌道の安定性を分類する. $r(a) > 2$ ならば周期軌道はサドル型であり, $|r(a)| < 2$ ならば周期軌道は楕円型であり, $r(a) < -2$ ならば周期軌道は反転サドル型である. $r(a) = -2$ を満たす a の値で(反)周期倍分岐が生じる. $r(a) = 2$ を満たす a の値で(反)同周期分岐が生じる.

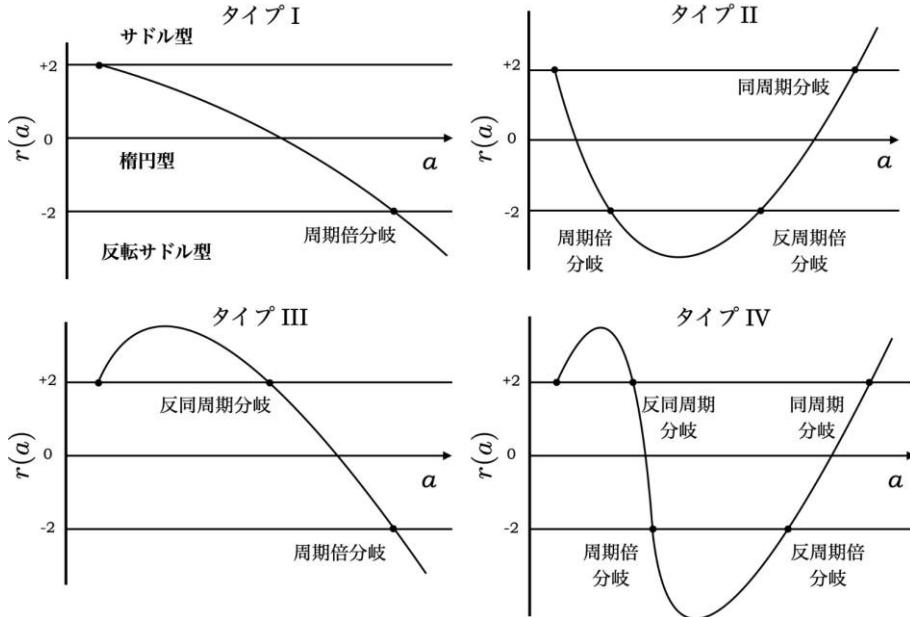


図 1：四つのタイプの周期倍分岐過程における安定性係数 $r(a)$ のパラメータ a 依存性.

周期倍分岐過程として四つのタイプを紹介する. 周期倍分岐というと通常はタイプ I を意味する. タイプ II については参考文献[4, 5]を, タイプ IIIについて参考文献[6]は見られたい. タイプ IV については本論文が最初の報告である. ここで注意をしておきたい. 例としてタイプ II では定性係数 $r(a)$ の減少と増加が見られる. 定性係数 $r(a)$ が減少しているパラメータ領域では楕円点の周りの回転の仕方は増加している. また定性係数 $r(a)$ が増加して

いるパラメータ領域でも楕円点の周りの回転の仕方は増加している（第3.2節を参照）。要請1.1のもとで楕円点の周りの回転の仕方が速くなったり遅くなったりすることはない。そのため周期倍分岐過程は四つのタイプに分類される。次に四つのタイプの特徴をまとめておく。

タイプI（図1(a)）。母楕円型周期軌道が生じた後、その軌道点 z_k の周りの回転は速くなる。結果として安定性係数 $r(a)$ は a の増加とともに減少し、 $r(a) = -2$ を満たす a の値で周期倍分岐が生じる。母軌道は最終的に反転を伴うサドル型となる。

タイプII（図1(b)）。安定性係数のふるまいの最初の部分はタイプIと同じである。母周期軌道は反転を伴うサドル型となった後、安定性係数 $r(a)$ は a の増加とともに増加し、 $r(a) = -2$ を満たす a の値で反周期倍分岐を起こして楕円型に戻る。次に $r(a) = 2$ を満たす a の値で同周期分岐を起こし、最終的に母軌道はサドル型となる。

タイプIII（図1(c)）。母周期軌道が生じた直後、この周期軌道はサドル型である。安定性係数 $r(a)$ は a の増加とともに増加するが途中で減少し始める。 $r(a) = 2$ を満たす a の値で母軌道は反同周期分岐を起こし楕円型になる。最後に、母軌道は周期倍分岐を起こして反転を伴うサドル型となる。

タイプIV（図1(d)）。安定性係数の変化の前半はタイプIIIで、後半はタイプIIの後半と考えられる。

ここで本論文の目的を述べる。

目的1.2. 四つの周期倍分岐過程を理解し、四つの分岐過程が生じる原因を明らかにする事。

第2節では、本論文で使用する数学的概念と道具を導入する。

第3節では、例とともに四つの分岐過程を検討し、分岐過程が生じる原因を明らかにする。

第4節では、まとめを行う。

2. 数学的道具

2.1. 対合と対称線

写像 T は対合表現で記述される[4]。対合による分解を $T = h \circ g$ と書く。ここで \circ は写像の合成記号である。記号 \circ の右側の g を作用し、次に左側の h を作用する。

$$g\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y - f(x) \\ x \end{pmatrix}, \quad h\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x - y \end{pmatrix}. \quad (4)$$

対合の不動点の集合を対称線といいう。対合 g から得られる対称線を S_g と書き、対合 h から得られる対称線を S_h と書く。本論文では S_g ($y = -f(x)/2$) と S_h ($y = 0$) の部分を以下のように定義する。

$$S_g^+ : y = -f(x)/2 \ (x > 1), \quad (5)$$

$$S_g^- : y = -f(x)/2 \ (0 < x < 1), \quad (6)$$

$$S_h^+ : y = 0 \ (x > 1), \quad (7)$$

$$S_h^- : y = 0 \ (0 < x < 1). \quad (8)$$

ここで対称周期軌道と非対称周期軌道の定義を与える。

定義 2.1 (対称周期軌道と非対称周期軌道). 対称線上に軌道点を二点もつ周期軌道を対称周期軌道と定義する. 本論文では不動点は対称周期軌道に含めず不動点として扱う. 対称線上に軌道点を持たない周期軌道を非対称周期軌道と定義する.

対称線 S_g 上の点 $z = (x, y)$ を曲線 $y = G(x)$ が通過しているとする. この曲線の点 z における傾きを ξ とする. この曲線に対合 g を作用した曲線 $y = G_g(x)$ も 点 $z = (x, y)$ を通過している. この点における傾きを ξ_g とする. 対合 g を x について微分すると ξ と ξ_g の関係が得られる.

$$\xi + \xi_g = -f'(x). \quad (9)$$

ξ と ξ_g が等しくなるのは, 両者が発散する場合と, $\xi = \xi_g = -f'(x)/2$ を満たす場合である. 前者については周期倍分岐の臨界値で生じる. この状況の例は第 3 節を見られたい. 対称線と対称線の像が接触し交差することでサドルノード分岐が生じる. よって, サドルノード分岐の臨界値で後者の状況が生じることは明らかである.

対称線 S_h 上の点 $w = (x, 0)$ を曲線 $y = H(x)$ が通過しているとする. この曲線の点 w における傾きを ζ とする. この曲線に対合 h を作用した曲線 $y = H_h(x)$ も点 $w = (x, 0)$ を通過している. この点における傾きを ζ_h とする. 対合 h を x について微分すると ζ と ζ_h の関係が得られる.

$$\zeta_h = \frac{\zeta}{(\zeta - 1)}. \quad (10)$$

ζ と ζ_h が等しくなるのは, $\zeta = \zeta_h = 2$ を満たす場合と $\zeta = \zeta_h = 0$ を満たす場合である. 前者は周期倍分岐の臨界値で生じる. 周期倍分岐の例は第 3 節で示す. 後者は周期軌道点がサドルノード分岐の臨界値で生じる.

写像 T を x_n で微分すると傾きに関する写像が得られる.

$$\xi_{n+1} = \frac{(\xi_n + f'(x_n))}{(\xi_n + f'(x_n) + 1)}. \quad (11)$$

ここで $\xi_{n+1} = dy_{n+1}/dx_{n+1}$, $\xi_n = dy_n/dx_n$. 下記の関係を利用した.

$$\frac{dy_{n+1}}{dx_n} = \frac{dy_{n+1}}{dx_{n+1}} \frac{dx_{n+1}}{dx_n} = \xi_{n+1}(\xi_n + f'(x_n) + 1). \quad (12)$$

2.2. スメールの馬蹄と記号化

写像 T におけるサドル型不動点 $P = (0, 0)$ の不安定多様体 W_u を不動点 P より追跡する. 不安定多様体 W_u は不動点 P を出発して最初に対称線 S_g^+ と交差し, 次に対称線 S_h^+ と交差する(図 2). 交点を順に u , v とする. 安定多様体 W_s も同じ交点で対称線と交差する. 交点 u と v は, 主ホモクリニック点と呼ばれる[4]. また, 関係 $W_s = gW_u$ と $W_s = hW_u$ が成り立つ. 四つの弧 $[P, u]_{W_u}$, 弧 $\Gamma_s = [u, v]_{W_s}$, 弧 $\Gamma_u = [v, Tu]_{W_u}$ と弧 $[Tu, P]_{W_s}$ で囲まれた閉領域を基本領域 Z と呼ぶ(図 2 における灰色領域). 関係式 $hu = hgu = Tu$ と $v = hv$ より, $[Tu, P]_{W_s} = h[P, u]_{W_u}$ と $\Gamma_s = h\Gamma_u$ が成り立つ. これらより $Z = hZ$ が成り立つことが導ける. 基本領域 Z を使ってスメールの馬蹄 \mathcal{H} を構成する. パラメータ a を増加すると $a = a_c^{\mathcal{H}}$ で, 弧 $T^{-1}\Gamma_s$ と弧 Γ_u が接触する. この状況がスメールの馬蹄が完成である. $a = 5.5 > a_c^{\text{hs}}$ とした図 3 では, 弧 $T^{-1}\Gamma_s$ と弧 Γ_u は二点 α と β で交差している. これはスメールの馬蹄が完成した後の配置である.

図 3 で共通領域 $Z \cap T^{-1}Z$ は, 二つの閉領域 V_0 と V_1 に分離している. 基本領域に含まれる弧 $T^{-1}\Gamma_s$ が閉領域 V_0 と V_1 の境界となっている. 軌道点が閉領域 V_0 に入れば記号 0 を与え, 閉領域 V_1 に入れば記号 1 を与える. これより一つの軌道に対して無限に長い記号列 s が得られる. 周期 q の周期軌道は q 個の記号の並びで特徴付けられる. q 個の記号の並びをコードと言う. コ

ードについては必要に応じて巡回することを認める。サドル型不動点 P のコードは0であり、橢円型不動点 Q のコードは1である。

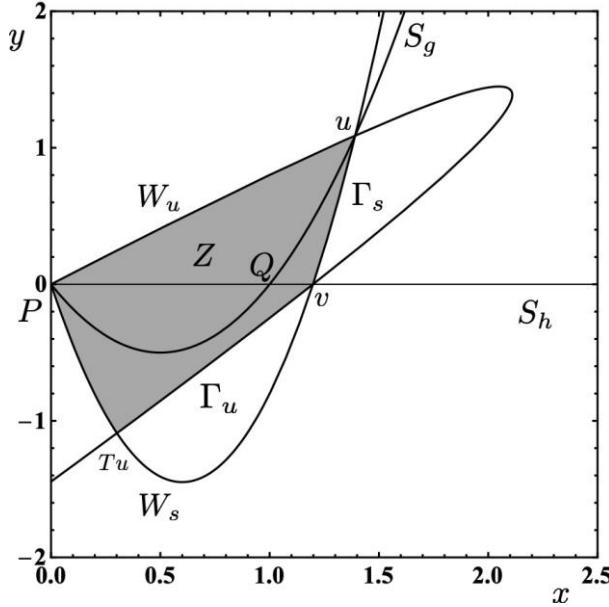


図 2: サドル型不動点 P の安定多様体 W_s と不安定多様体 W_u の弧を利用して定義された基本領域 Z (灰色領域). 交点 u と v は主ホモクリニック点. 弧 $\Gamma_s = [u, v]_{W_s}$ と 弧 $\Gamma_u = [v, Tu]_{W_u}$ の定義. $a = 4$.

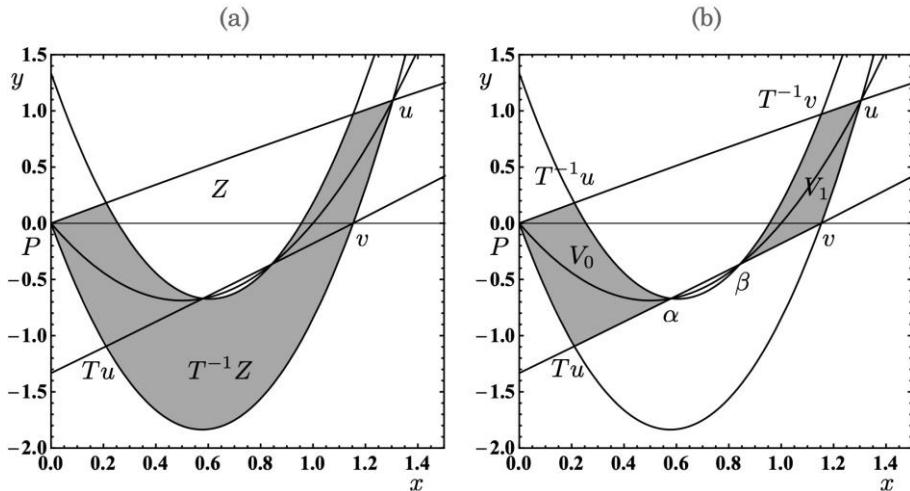


図 3: スメールの馬蹄 \mathcal{H} の完成後. $a = 5.5$. (a) 基本領域 Z と逆像 $T^{-1}Z$ の関係. (b) 閉領域 V_0 と V_1 の定義.

次に本論文で使用する定理、定義ならびに性質をまとめて紹介する[4].

定理 2.2. スメールの馬蹄 \mathcal{H} に存在する周期軌道とコードは一対一対応をなす.

定義 2.3(時間反転コードと時間反転対). 周期 q の周期軌道のコードを $s = s_0s_1 \cdots s_{q-1}$ とする. 記号の並びを逆にしたコード $s^{-1} = s_{q-1} \cdots s_1s_0$ をコード s の時間反転コードと定義する. 巡回しても $s \neq s^{-1}$ ならば、コード s とコード s^{-1} を時間反転対と名付ける.

性質 2.4.

- (1) コード s と時間反転コード s^{-1} について $s = s^{-1}$ が成り立つれば、コード s の周期軌道は対称周期軌道である。
- (2) コード s と時間反転コード s^{-1} において、記号を巡回しても $s \neq s^{-1}$ ならばコード s の周期軌道は非対称周期軌道である。コード s と s' の非対称周期軌道はともに存在する。

定義 2.5 (g -対). 点 z と点 w について $w = gz$ が成り立つとする。点 z が領域 $V_0(V_1)$ に存在するならば、点 w も 領域 $V_0(V_1)$ に存在する。これらを g -対と名付ける。

定義 2.6 (コードの最小値表現). コード 001 を例として説明し、最小値表現を導入する。ここで $x = .(001)^\infty$, $y = .(010)^\infty$, $z = .(100)^\infty$ とする。これらを二進法に変換した値は $X = .(001110)^\infty = 2/9$, $Y = .(011100)^\infty = 4/9$, $Z = .(111000)^\infty = 8/9$ である [4] (付録 A をみよ)。これらのなかで X が最小値である。よって、コード 001 をコードの最小値表現と定義する。

定義 2.7 (最近接軌道点対). コードを最小値表現で $s_0s_1 \cdots s_k \cdots s_{q-2}s_{q-1}$ と書く。記号 s_j ($0 \leq j \leq q-1$) に対応する軌道点を z_j とする。 $z_k = gz_{q-2}$ ($0 \leq k \leq q-2$) が成り立つとする。

- (1) $k < q-2$ の場合、軌道点の対 z_k と z_{q-2} を境界 ($T^{-1}\Gamma_s$) に最近接した軌道点対 (最近接軌道点対) と名付ける。
- (2) $k = q-2$ が成り立つ場合、軌道点 z_k を最近接軌道点と名付ける。

定義 2.8 (正規表現). コードの表現として定義 2.7 における軌道点 z_k の記号を先頭に配置した表現

$$s_k s_{k+1} \cdots s_{q-2} s_{q-1} s_0 \cdots s_{k-1} \quad (13)$$

を正規表現と名付ける。

定義 2.9 (コードの偶奇性). コードに含まれる 1 の個数が偶数 (奇数) ならばコードは偶 (奇) とする。

性質 2.10. 偶 (奇) コードの周期軌道は、馬蹄 \mathcal{H} の中でサドル型周期軌道 (反転サドル型周期軌道) である

2.3. ブロック表示とその性質

参考文献 [4] で導入されたブロックを導入する。

ブロック構成規則 2.11.

- (1) 回転数が $1/q$ の場合のブロックの定義。

$$S(1/q) = 10^{q-2}1 \quad (q \geq 2), \quad (14)$$

$$E(1/q) = 0^{q-1}1 \quad (q \geq 2), \quad (15)$$

$$F(1/q) = 0^{q-2}11 \quad (q \geq 2), \quad (16)$$

$$D(1/q) = 10^{q-3}11 \quad (q \geq 3). \quad (17)$$

(2) 既約分数 p/q ($p \geq 2, q \geq 5$) のファレイ分割を $\text{FP}[p/q] = \{p_l/q_l, p_r/q_r\}$ と書く. ここで, $p = p_l + p_r$, $q = q_l + q_r$, $p_r q_l - p_l q_r = 1$, $0 < p_l/q_l < p_r/q_r \leq 1/2$. 次にブロックの構成規則を示す.

$$S(p/q) = S(p_r/q_r)S(p_l/q_l), \quad (18)$$

$$E(p/q) = E(p_r/q_r)S(p_l/q_l) = F(p_l/q_l)E(p_r/q_r), \quad (19)$$

$$F(p/q) = F(p_l/q_l)F(p_r/q_r), \quad (20)$$

$$D(p/q) = S(p_r/q_r)D(p_l/q_l) = D(p_l/q_l)F(p_r/q_r). \quad (21)$$

表 1 に, よく使用するブロックをまとめた. ブロック $S(1/2)$ とブロック $F(1/2) = 11$ について注意をしておく. 以下ではブロック $F(1/2)$ を用いる. ブロックの構成規則のために $S(1/2) = 11$ も表 1 に含めてある.

表 1: 4 つのブロックの 0 と 1 による表現

p/q	$S(p/q)$	$E(p/q)$	$F(p/q)$	$D(p/q)$
1/6	100001	000001	000011	100011
1/5	10001	00001	00011	10011
2/9	100110001	000110001	000110011	100110011
1/4	1001	0001	0011	1011
3/11	10110011001	00110011001	00110011011	10110011011
2/7	1011001	0011001	0011011	1011011
3/10	1011011001	0011011001	0011011011	1011011011
1/3	101	001	011	111
4/11	11101101101	01101101101	01101101111	11101101111
3/8	11101101	01101101	01101111	11101111
5/13	111011101101	011011101101	011011101111	111011101111
2/5	11101	01101	01111	11111
5/12	111110111101	011110111101	011110111111	111110111111
3/7	1111101	0111101	0111111	1111111
4/9	111111101	011111101	011111111	111111111
1/2	11	01	11	-

2.4. 区間の間の遷移

第 2.3 節で導入したブロックは領域の名称でもある [2]. 二つの領域間の遷移を遷移行列として表現できる. 遷移行列の要素が 1 の場合, 遷移可能であり, 0 の場合は遷移できない.

i) $0 < p/q < r/s < 1/2$:

$$M(p/q, r/s) = \left(\begin{array}{c|cccc} & E(r/s) & S(r/s) & F(r/s) & D(r/s) \\ \hline E(p/q) & 1 & 1 & 1 & 1 \\ S(p/q) & 1 & 1 & 1 & 1 \\ F(p/q) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ D(p/q) & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (22)$$

ii) $0 < p/q < 1/2$:

$$M(p/q, 1/2) = \left(\begin{array}{c|cc} & E(1/2) & F(1/2) \\ \hline E(p/q) & 1 & 1 \\ S(p/q) & 1 & 1 \\ F(p/q) & 0 & 0 \\ D(p/q) & 0 & 0 \end{array} \right). \quad (23)$$

iii) $0 < p/q < r/s < 1/2$:

$$N(r/s, p/q) = \left(\begin{array}{c|cccc} & E(p/q) & S(p/q) & F(p/q) & D(p/q) \\ \hline E(r/s) & 1 & 0 & 1 & 0 \\ S(r/s) & 1 & 0 & 1 & 0 \\ F(r/s) & 1 & 0 & 1 & 0 \\ D(r/s) & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right). \quad (24)$$

iv) $0 < p/q < 1/2$:

$$N(1/2, p/q) = \left(\begin{array}{c|cccc} & E(p/q) & S(p/q) & F(p/q) & D(p/q) \\ \hline E(1/2) & 1 & 0 & 1 & 0 \\ F(1/2) & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right). \quad (25)$$

v) $0 < p/q < 1/2$:

$$J(p/q, p/q) = \left(\begin{array}{c|cccc} & E(p/q) & S(p/q) & F(p/q) & D(p/q) \\ \hline E(p/q) & 1 & 1 & 1 & 1 \\ S(p/q) & 1 & 1 & 1 & 1 \\ F(p/q) & 1 & 0 & 1 & 0 \\ D(p/q) & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right), \quad (26)$$

vi)

$$J(1/2, 1/2) = \left(\begin{array}{c|cc} & E(1/2) & F(1/2) \\ \hline E(1/2) & 1 & 1 \\ F(1/2) & 1 & 1 \end{array} \right). \quad (27)$$

ここで、領域とブロックについて補足しておきたい。 $0 < p/q < 1/2$ の場合、四つの領域 $E(p/q), S(p/q), F(p/q), D(p/q)$ が存在する。これらをもとにブロック $E(p/q), S(p/q), F(p/q), D(p/q)$ を定義した。ブロック $S(p/q)$ は巡回するとブロック $F(p/q)$ になる。ブロック $E(p/q)$ とブロック $F(p/q)(S(p/q))$ で記述される周期軌道は存在するが、ブロック $D(p/q)$ で記述される周期軌道は存在しない。

$p/q = 1/2$ の場合、二つの領域 $E(1/2)$ と $S(1/2) = F(1/2) = 11$ が存在する。ブロック $E(1/2)$ で記述される周期軌道は存在するが、ブロック $S(1/2) = F(1/2)$ で記述される周期軌道は存在しない。

コードをブロックで表した表現をブロックコード呼ぶ。遷移行列の性質から性質 2.12 が得られる[4]。

性質 2.12. ブロックコードに含まれるブロックの回転数において p/q が最小値であるとする。ブロックコードの最小値表示は $E(p/q)$ で始まる。ただし、最小値表示の先頭部に $E(p/q)$ が連続することはない。

例. $E(1/3)E(1/3)D(1/3)$ は最小値表現でなく、 $E(1/3)D(1/3)E(1/3)$ が最小値表現である。

定義 2.13 (許容語と禁止語). 領域 A から領域 B への遷移が可能な場合、語 AB を許容語といい、そうでない場合は禁止語という。

例. 語 $F(1/3)S(1/3)$ は禁止語であるが, 語 $S(1/3)F(1/3)$ は許容語である.

2.5. 分岐現象

図 4 を利用して (反) 周期倍分岐と (反) 同周期分岐について説明する. 本論文ではパラメータ a を常に増加することで分岐が生じるとする. 楕円型周期軌道の周期を q (≥ 1) とする. 楕円型周期軌道が反転型サドル周期軌道に分岐する過程が周期倍分岐である. この分岐で周期が $2q$ の娘軌道が一つ生じるが娘軌道は椭円型である. そのため娘軌道は周期倍分岐を引き続いて起こす. 反転型サドル周期軌道が椭円型周期軌道に分岐する過程が反周期倍分岐である. この分岐で周期が $2q$ の娘軌道が一つ生じるが娘軌道はサドル型である.

椭円型周期軌道がサドル周期軌道に分岐する過程が同周期倍分岐である. この分岐で周期が q の娘軌道が二つ生じるがこれらの娘軌道は椭円型である. そのため娘軌道は周期倍分岐を引き続いて起こす. サドル周期軌道が椭円型周期軌道に分岐する過程が反同周期分岐である. この分岐で周期が q の娘軌道が二つ生じるがこれらはサドル型である.

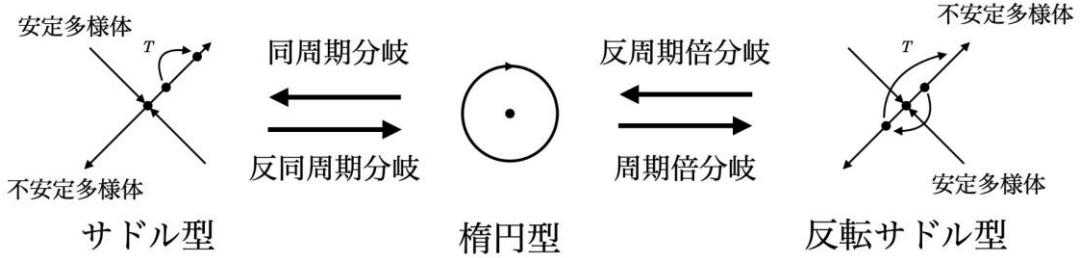


図 4: (反)周期倍分岐と(反)同周期分岐.

3. 四つの分岐過程

3.1. タイプ I: 周期倍分岐

タイプ I の例としてブロックコード $E(1/5) = 00001$ で記述される椭円型周期軌道を用いる. この周期軌道は椭円型不動点 Q が回転分岐を起こして生じた周期軌道である. 対をなすサドル型周期軌道のブロックコードは $S(1/5) = 10001$ である. これらが回転分岐で生じる臨界値は $a_c(1/5) = 4\sin^2(\pi/5) = 1.74187$ である[4]. 楕円型周期軌道が周期倍分岐を起こす臨界値 $a = a_c^{pd}(1/5) = 1.74302878$ での椭円型周期軌道とサドル型周期軌道の軌道点を図 5 に示した.

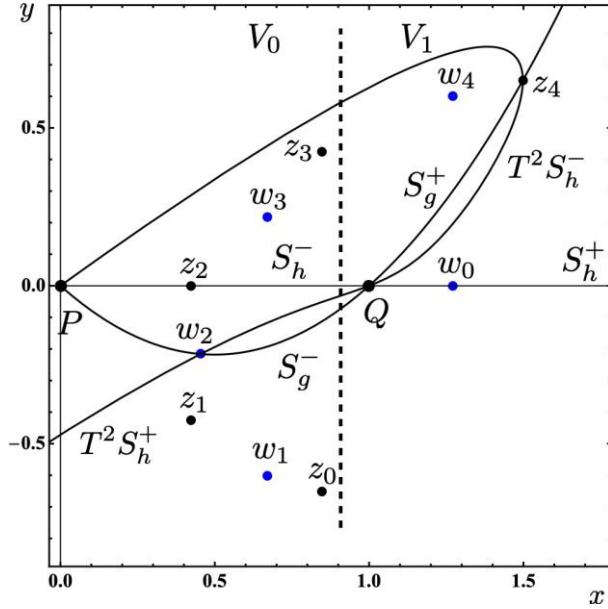


図 5: ブロックコード $E(1/5)$ (00001) の周期軌道点 $\{z_0, z_1, z_2, z_3, z_4\}$ とブロックコード $S(1/5)$ (10001) の周期軌道点 $\{w_0, w_1, w_2, w_3, w_4\}$. $a = a_c^{pd}(1/5) = 1.74302878$.

楕円型周期軌道は対称線上に二つ軌道点 ($z_2 \in S_h^-$ と $z_4 \in S_g^+$) をもつ. 同様にサドル型周期軌道も対称線上に二つ軌道点 ($w_0 \in S_h^+$ と $w_2 \in S_g^-$) をもつ. 図 5 の点線のあたりに安定多様体の弧 $T^{-1}\Gamma_s$ が入り込み左側が領域 V_0 に, 右側が領域 V_1 となる. 軌道点を初期点 z_0 から追うことでコード $00001 = E(1/5)$ を確認できる. 同様に初期点 w_0 から追うことでコード $10001 = S(1/5)$ が得られる. 軌道点 z_4 において対称線 S_g^+ と対称線の像 $T^2S_h^-$ が交差していることに注意しよう. 本論文では, 対称線 S_g^+ を g -主軸と呼び, 軌道点 z_4 で g -主軸と交差している 像 $T^2S_h^-$ を g -副軸と呼ぶ.

図 5 の軌道点 z_4 における g -副軸の傾きについて調べる. 傾きに関する写像(式(11))を利用して傾きを計算する方法を紹介する. パラメータ a を決めて, 周期軌道点の位置を決定する. 最初に $z_2 = (x_2, 0)$ と対称線 S_h^- の 傾き $\xi_2 = 0$ より, 傾き ξ_3 が決まる. 次に z_3 の x -座標 x_3 と傾き ξ_3 より 傾き ξ_4 が決まる. 得られた結果を図 6 に示した. ブロックコード $E(1/5)$ の周期軌道が生じた臨界値では傾き $\xi(z_4)$ は, 対称線 S_g の $x = 1$ における傾き $a_c(1/5)/2 = 2\sin^2(\pi/5) = 0.690983$ に等しい. パラメータ a が増加すると傾きも増加する. 周期倍分岐が生じる臨界値 $a = a_c^{pd} = 1.7430287$ で, 傾きは発散する. その後, 傾きは負になり増加し, 再び正になる. そして, 傾きは侵入してきた不安定多様体の弧 $T\Gamma_u$ の傾きに漸近する. 要請 1.1 は議論を複雑化させないために通常利用するが, 要請 1.1 を成り立たせている原因が不安定多様体の弧 $T\Gamma_u$ の侵入であることが明らかになった.

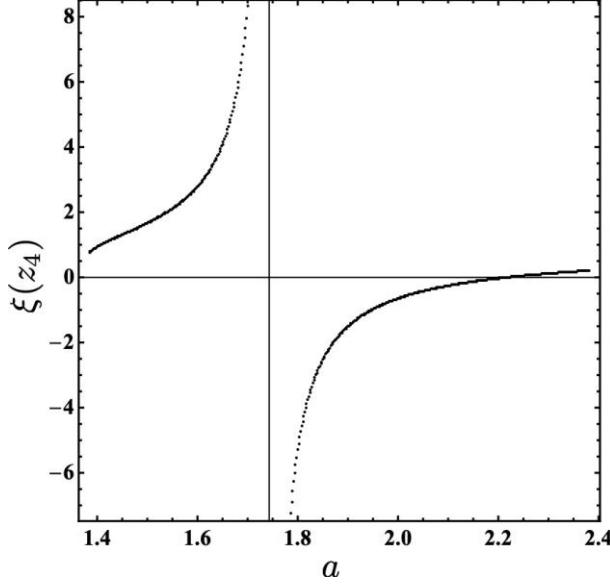


図 6: 対称線の像 $T^2 S_h^-$ の $z_4 \in S_g^+$ における傾き $\xi(z_4)$. 傾きが発散する a の値が周期倍分岐が生じる臨界値 ($a = 1.7430287$) である.

次に安定性係数のパラメータ依存性について調べる. 臨界値 $a_c(1/5) = 4\sin^2(\pi/5)$ より a を増加させ, 安定性係数を調べた結果を図 7 に示した. 図(a)は楕円型周期軌道の安定性係数である. これより周期倍分岐過程はタイプ I であることがわかる. 図(b)はサドル型周期軌道の安定性係数である. 楕円型周期軌道のブロックコード $E(1/5)$ が奇コードであることより, この周期軌道は馬蹄 \mathcal{H} の中では反転サドル型周期軌道であることが導かれる. 一方のブロックコード $S(1/5)$ が偶であることより, この軌道は馬蹄の中ではサドル型周期軌道であることがわかる.

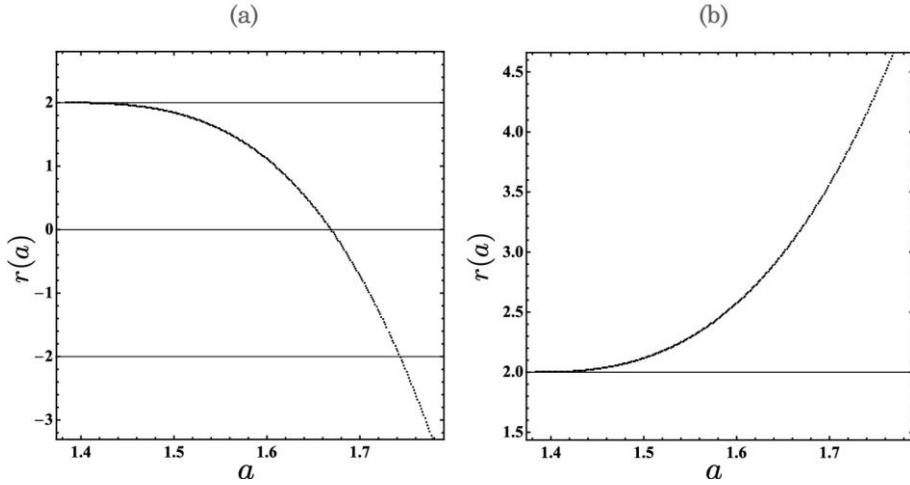


図 7: 安定性係数. (a) ブロックコード $E(1/5)$ の周期軌道. 周期倍分岐が生じる臨界値は $a = a_c^{pd} = 1.7430287$. (b) ブロックコード $S(1/5)$ の周期軌道.

周期倍分岐が生じる臨界値で g -副軸の傾きが発散することを示しておく. g -副軸に対合 g を作用する.

$$g(T^2 S_h^-) = T^{-2} g S_h^- = T^{-2} g h S_h^- = T^{-3} S_h^- = T^{-5}(T^2 S_h^-). \quad (28)$$

この関係より, g -副軸に対合 g を作用することは g -副軸に T^{-5} を作用することと同値である.

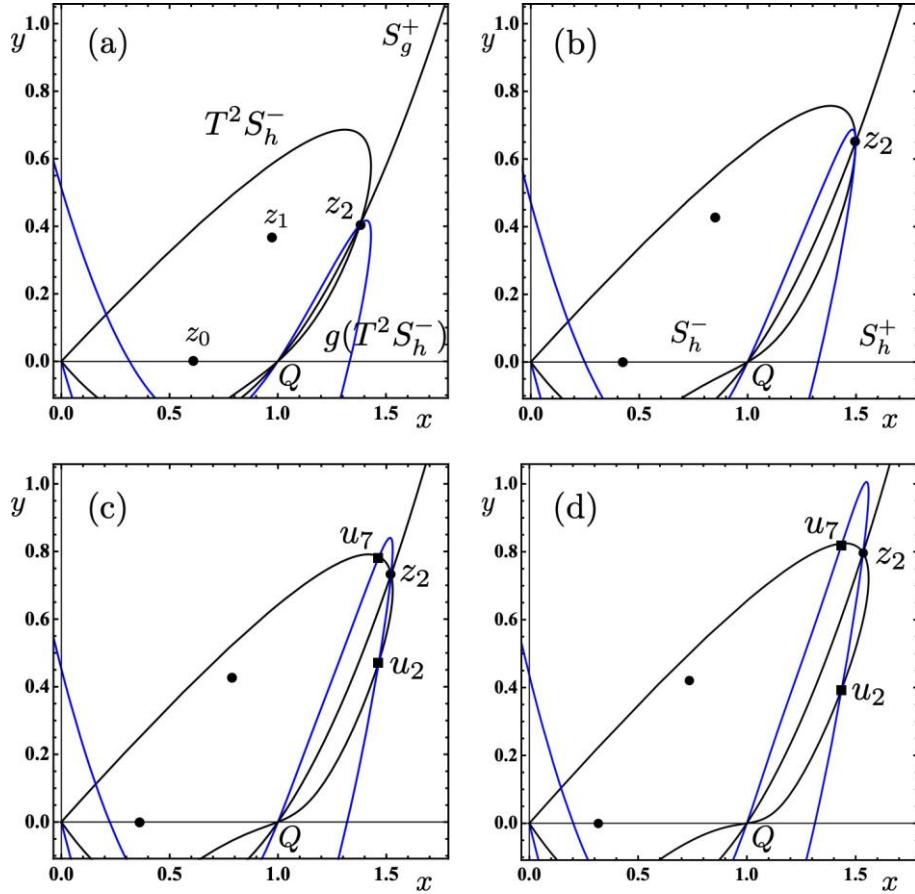


図 8: g -主軸, g -副軸と像 $g(T^2S_h^-)$ の配置. (a) $a = a_c^{pd} - 0.2$. (b) $a = a_c$. (c) $a = a_c + 0.1$. (d) $a = a_c^{pd} + 0.2$. $a_c = 1.7430287$.

図 8 では, g -副軸は黒で描き, g -副軸の像 $g(T^2S_h^-)$ は青で描いた. 図(a)は周期倍分岐の前の状況を表している. 軌道点 z_2 の近傍に g -副軸と g -副軸の像との交点はない. 臨界値の状況である図(b)においても同様である. この場合は, g -副軸と g -副軸の像が軌道点 z_2 で接している. つまり, g -副軸と g -副軸の像の傾きはともに発散している. 周期倍分岐の後の状況である図(c)と(d)において, g -副軸と g -副軸の像の交点が生じる. 軌道点 z_2 の左下方の軌道点を u_2 とすると, z_2 の左上方の軌道点は u_7 ($= gu_2$) である. これらは軌道点 z_2 より生じた娘軌道点で周期は 10 である. 得られた結果を性質 3.1 とする.

性質 3.1. g -主軸上の軌道点 z が周期倍分岐を起こして生じた娘軌道点が g -副軸上にある場合, 周期倍分岐の臨界値で軌道点 z における g -副軸の傾きは発散する.

最近接軌道点対 z_0 と z_3 ($= gz_0$) から娘軌道点が生じる様子を図 9 に示した. これらはともに領域 V_0 に存在する. 軌道点 z_0 から生じた軌道点 0 は右方向に移動し領域 V_1 に入る. 一方の軌道点 5 は左方向に移動し領域 V_0 に留まる. 軌道点 z_3 から生じた軌道点 3 は右方向に移動し領域 V_1 に入る. 一方の軌道点 8 は左方向に移動し領域 V_0 に留まる. ここで軌道点 0 (5) に g を作用すると, 軌道点は軌道点 3 (8) に移る. 軌道点 z_0 に T^3 を作用した像が軌道点 z_3 である. 軌道点 z_0 の右にある軌道点 0 に T^3 を作用した像是軌道点 3 となるが, この点は 軌道点 z_3 の右にある. また, 軌道点 z_0 の左にある軌道点 5 に T^3 を作用した像是軌道点 8 となるが, この点は 軌道点 z_3

の左にある。写像 T^3 の作用で左右の関係は保存される。このような軌道点の移動をともなう周期倍分岐を方向保存型であると表現する。

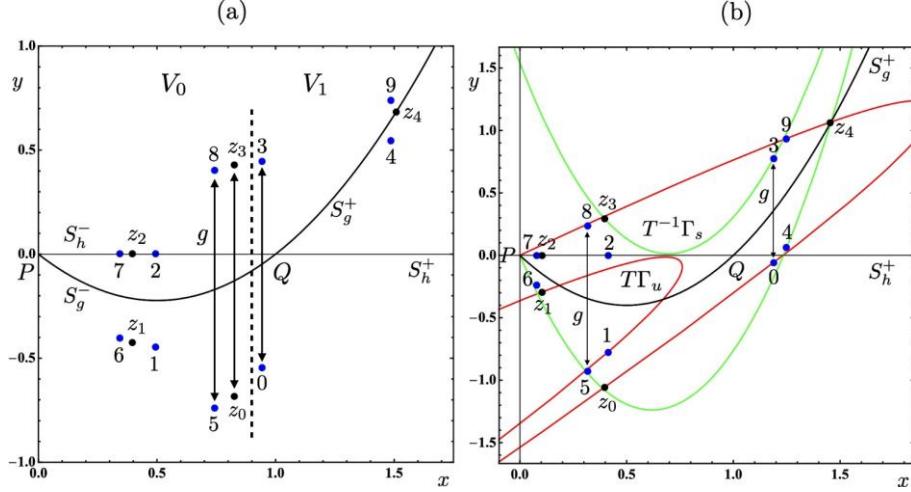


図 9: 母軌道点 $\{z_0, z_1, \dots, z_4\}$ と娘軌道点 $\{0, 1, \dots, 9\}$. (a) $a = a_c(1/5) + 0.4 = 1.78197$. (b) $a = 3.2$.

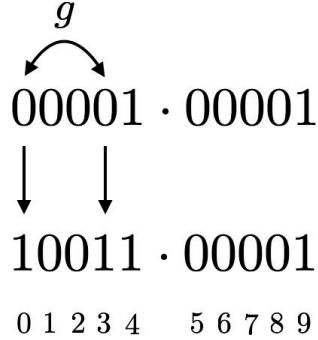


図 10: 周期倍分岐が保存型である場合における、娘軌道のコードの決定方法。最後の行の $0, 1, \dots, 9$ は図 9 における娘軌道点 $0, 1, \dots, 9$ を表している。

周期倍分岐が方向保存型であることを念頭において生じた娘軌道のコードを決定しよう。そのために母軌道のコードの最小値表現（正規表現でもある）を二つ連続して書く（図 10）。先に述べたように軌道点 0 と 3 が領域 V_1 に移動する。これより軌道点 0 と 3 のコードを 1 と書き直す。得られたコード $10011 \cdot 00001$ をブロックで表示すると $D(1/5)E(1/5)$ が得られる（最小値表現では $E(1/5)D(1/5)$ ）。最近接軌道点から生じた娘軌道の移動の仕方をもとに娘軌道のコードを決定方法を、簡潔に最近接軌道点記号置き換え法と名付ける。

母軌道がタイプ I の分岐過程を起こす条件を次に示す。

条件 3.2. 母周期軌道が生じた直後において橢円型かつ奇コードであること。

最後に補足を述べておく。一次元写像で研究された周期倍分岐はタイプ I である。一次元写像における周期倍分岐の論文は非常に多くあるが、ファイゲンバウム (M. J. Feigenbaum) によって書かれた二つの論文が周期倍分岐のもつ相似性に関する研究の出発となった画期的な論文である [7, 8]。一次元写像における周期倍分岐に関する入門書として参考文献 [9, 10] を読むことを勧める。また、二次元写像における周期倍分岐については参考文献 [11] が役に立つ。

3.2. タイプ II: 周期倍分から反周期倍分岐, 同周期分岐へ

タイプ II の例としてサドルノード分岐で生じた周期軌道を用いる。ブロックコード $E(1/4)E(1/3) = 0001 \cdot 001$ と $E(1/4)D(1/3) = 0001 \cdot 111$ の周期軌道が対で生じる。ブロックコード $E(1/4)E(1/3)$ は偶である。この周期軌道は、サドルノード分岐の直後ではサドル型であり馬蹄 \mathcal{H} の中でもサドル型である。もう一つのブロックコード $E(1/4)D(1/3)$ の周期軌道が生じた直後は楕円型である。ブロックコード $E(1/4)E(1/3)$ は偶であるために、パラメータの増加にともないこの周期軌道は周期倍分岐を最初に起こし、次に反周期倍分岐を起こし、最後に同周期分岐を起こしてサドル型となる。つまりブロックコード $E(1/4)E(1/3)$ の周期軌道はタイプ II の分岐過程を起こすことがわかる。

写像 T^7 の対合表現を導入する。

$$T^7 = h \circ g T^6. \quad (29)$$

対合 $g T^6$ に関して不变な集合は $T^{-3} S_g$ である。つまり、

$$g T^6 (T^{-3} S_g) = g T^3 S_g = T^{-3} g S_g = T^{-3} S_g.$$

対称線 S_h^- を h -主軸と名付け、像 $T^{-3} S_g^-$ を h -副軸と名付ける。像 $T^{-3} S_g$ に対合 h を作用すると、

$$h T^{-3} S_g = T^3 h S_g = T^3 h g S_g = T^4 S_g = T^7 (T^{-3} S_g)$$

が得られる。つまり、 h -副軸に h を作用することは h -副軸に写像 T^7 を作用することと同値である。

次に写像 T^7 の別の対合表現を考えよう。

$$T^7 = T^6 h \circ g. \quad (30)$$

対合 $T^6 h$ に関して不变な集合は $T^3 S_h$ である。対称線 S_g^- を g -主軸と名付け、像 $T^3 S_h^-$ を g -副軸と名付ける。像 $T^3 S_h$ に対合 g を作用すると

$$g T^3 S_h = T^{-3} g S_h = T^{-3} (gh) S_h = T^{-4} S_h = T^{-7} (T^3 S_h)$$

が得られる。 g -副軸に g を作用することは g -副軸に写像 T^{-7} を作用することと同値である。

ブロックコード $E(1/4)D(1/3)$ の周期軌道と $E(1/4)E(1/3)$ の周期軌道がサドルノード分岐で生じる様子を図 11 に示した。図(a)では、像 $T^4 S_g^-$ が対称線 S_h^- と接している。この状況がサドルノード分岐の臨界値で生じる。パラメータの増加にともない軌道点 z_1 と w_1 は 対称線 S_h^- 上を左右に離れていく。軌道点 z_1 と w_1 の間に不安定多様体の弧 $T\Gamma_u$ が侵入していることに注意してほしい。対称性より安定多様体の弧 $T^{-1}\Gamma_s$ ($= h(T\Gamma_u)$) も侵入している。軌道 z_1 はブロックコード $E(1/4)D(1/3)$ の周期軌道点であり、生じた直後は楕円型である。一方の軌道 w_1 はブロックコード $E(1/4)E(1/3)$ の周期軌道点であり、生じた直後はサドル型である。

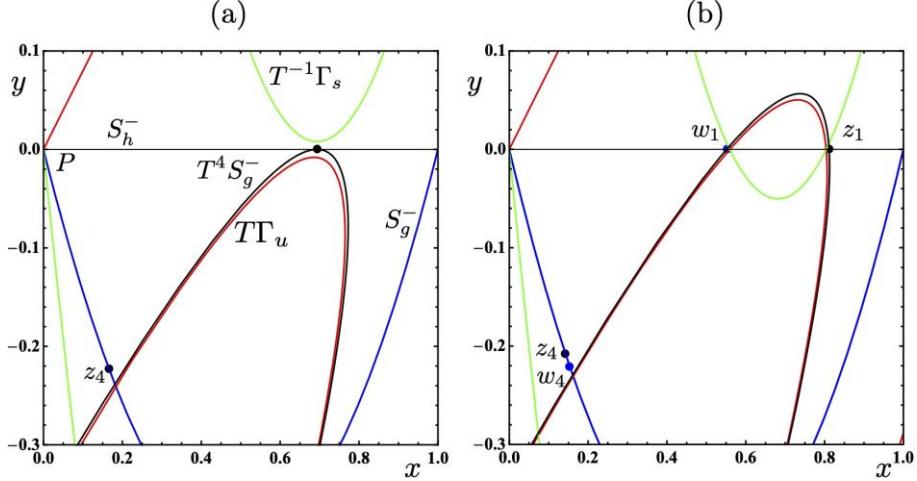


図 11: (a) サドルノード分岐の臨界値 $a = 3.217000312$. 像 $T^4S_g^-$ が対称線 S_h^- と接している. (b) サドルノード分岐が生じた直後. 軌道点 z_1 が楕円型周期軌道で, 軌道点 w_1 がサドル型周期軌道. $a = 3.4$.

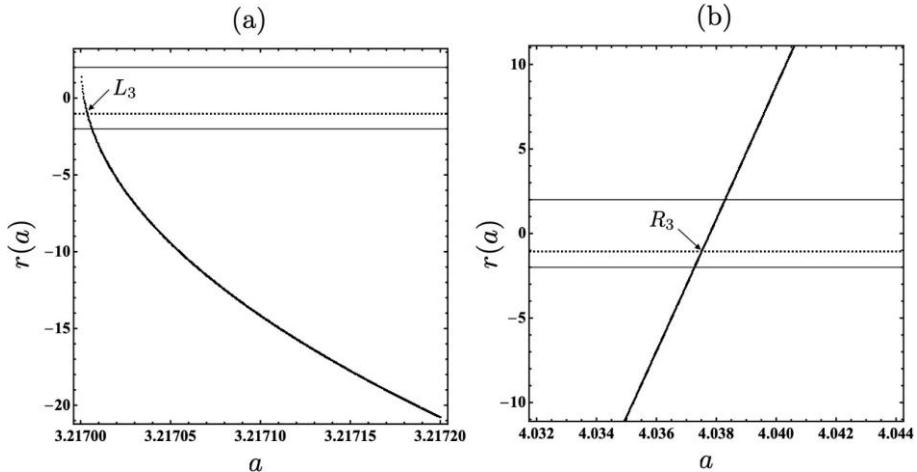


図 12: 楕円型軌道の安定性係数のパラメータ依存性. サドルノード分岐の臨界値 $a = 3.217000312$. (a) 周期倍分岐の臨界値 $a = 3.21700632$. (b) 反周期倍分岐の臨界値 $a = 4.03727292$, 同周期分岐の臨界値 $a = 4.03829282$. 記号 L_3 と R_3 については, 第 3.2 節の最後で説明する.

ブロックコード $E(1/4)D(1/3)$ の楕円型周期軌道の安定性係数を調べる. 安定性係数はパラメータ a の増加とともに $r(a) = 2$ より減少して $r(a) = -2$ に達し更に減少する(図 12(a)). $r(a) = -2$ で周期倍分岐が生じる. $r(a) < -2$ が成り立つパラメータ領域では, 周期軌道は反転を伴うサドル型である. 安定性係数は途中で増加に転じ, 再び $r(a) = -2$ になる. つまり, 反周期倍分岐が生じて楕円型に戻る. 最終的に, この周期軌道は $r(a) = 2$ を満たす a の値で同周期分岐を起こしてサドル型となる(図 12(b)). 以上よりブロックコード $E(1/4)D(1/3)$ の周期軌道はタイプ II の分岐過程を起こすことが確認できた.

図 13(a)にはブロックコード $D(1/3)E(1/4)$ の母軌道を描き, 図 13(b)にはブロックコード $E(1/3)E(1/4)D(1/3)E(1/4)$ の娘軌道を描いた. 図(a)で, 二つの軌道点 z_0 と z_1 ($= gz_0$) は共に領域 V_1 にあり, かつ境界に最近接した軌道点である. 周期倍分岐後, これらの点より生じた娘軌道点の移動の仕方を調べる. 軌道点 z_1 から対称線 S_h^- 上に娘軌道点 u_1 と u_8 が生じる. これら

は、図(b)では1と8と記載されている。軌道点 u_1 は左に移動し、領域 V_0 に入る。軌道点 u_8 は右に移動するが領域 V_1 に留まる(図(b))。図13で、縦に入っている点線のあたりに安定多様体の弧 $T^{-1}\Gamma_s$ が侵入する。軌道点 u_1 と g -対をなす軌道点 u_0 も領域 V_0 に移動する。しかし、軌道点 u_8 と g -対をなす軌道点 u_7 は領域 V_1 に留まる。母軌道点 z_0 の左に娘軌道点 u_0 があり、右に u_7 がある。また、母軌道点 z_1 の左に娘軌道点 u_1 があり、右に u_8 がある。左右の関係が写像 T で保存されている。つまり、方向保存型の周期倍分岐が生じている。

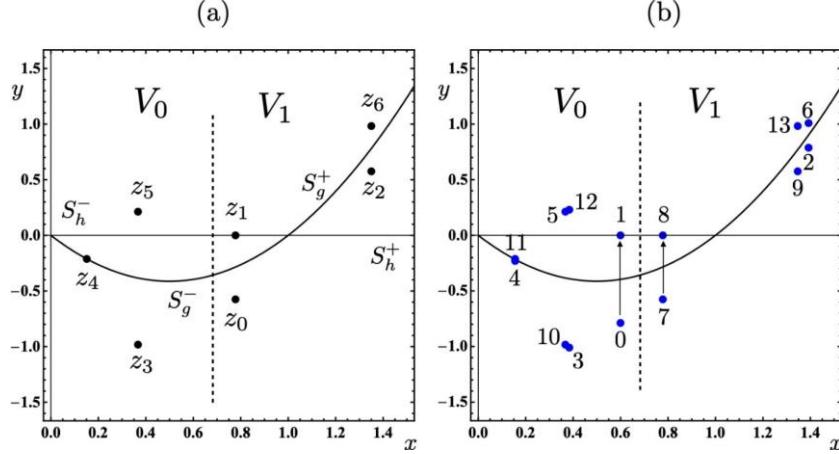


図13: (a) 母軌道。ブロックコード $D(1/3)E(1/4)$ (111 · 0001)。(b) 周期倍分岐で生じた娘軌道。整数 k は点 u_k を表す。ブロックコード $E(1/3)E(1/4)D(1/3)E(1/4)$ (001 · 0001 · 111 · 0001)。
 $\alpha = 3.3$.

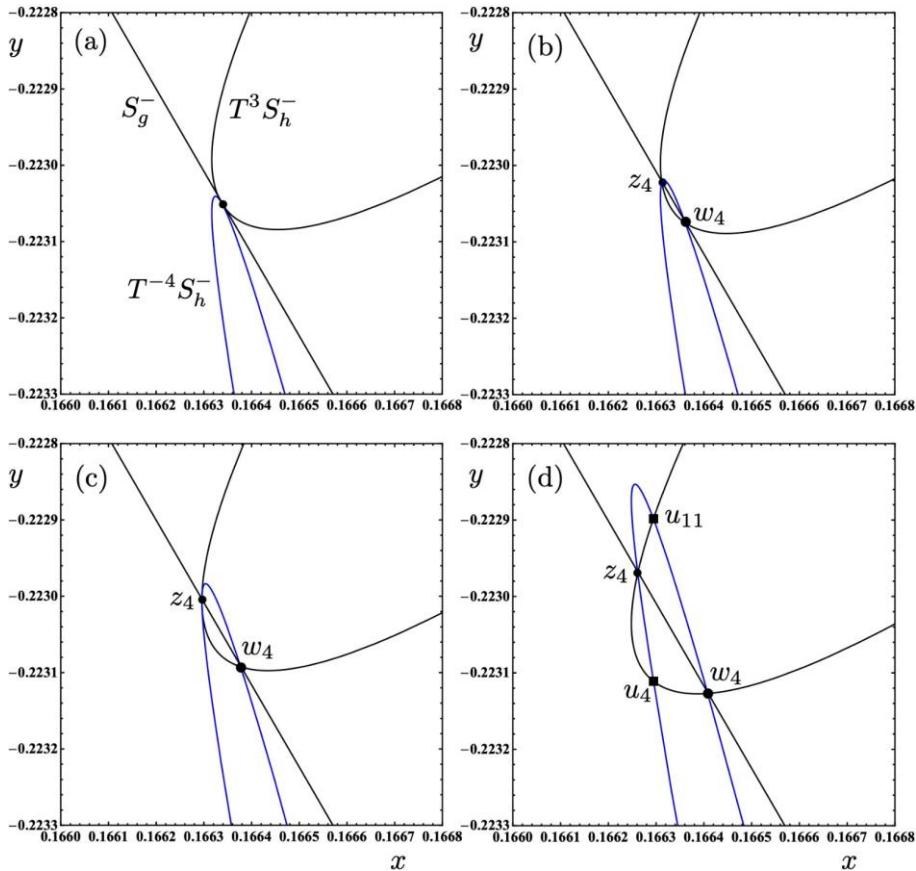


図14: 母軌道点 z_4 より娘軌道点 u_4 と u_{11} が生じる様子。(a) $\alpha = 3.21700033$ 。(b) $\alpha = 3.2170025$ 。(c) $\alpha = 3.21700632$ 。(d) $\alpha = 3.21702$ 。

この周期倍分岐を幾何学的に理解するために、点 $z_4 \in S_g^-$ における像 $T^3 S_h^-$ と像 $T^{-4} S_h^- (= g T^3 S_h^-)$ の関係を調べる。図 14 を見て欲しい。図(a)では、像 $T^3 S_h^-$ と像 $T^{-4} S_h^- (= g T^3 S_h^-)$ が対称線 S_g^- と接している。これはサドルノード分岐の臨界値での状況である。サドルノード分岐で生じた二点 z_4 と w_4 は対称線 S_g^- 上にあり 互いに離れていく (図(b))。図(c)では、像 $T^3 S_h^-$ と像 $T^{-4} S_h^-$ が再び接している。点 z_4 で、両者の傾きは発散していることに注意しよう。その後、図(d)では点 z_4 より周期倍分岐で生じた娘軌道点 u_4 と u_{11} ($= h u_4$) が描かれている。パラメータの増加にともない二点 u_4 と u_{11} は対称線 S_g^- 上を点 z_4 より離れていく。

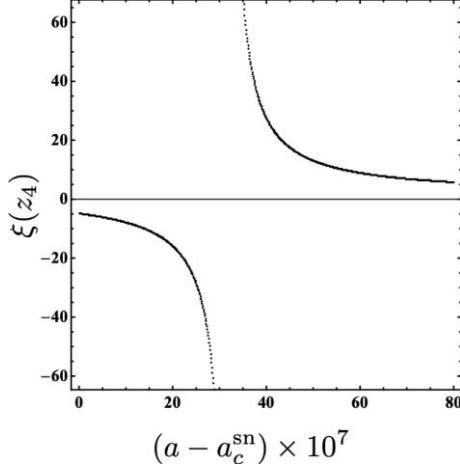


図 15: 周期倍分岐前後における像 $T^3 S_h^-$ の軌道点 z_4 における傾き $\xi(z_4)$ の変化。

像 $T^3 S_h^-$ の点 z_4 における傾き $\xi(z_4)$ を図 15 に示した。サドルノード分岐点では傾きは対称線 S_g^- の傾きに等しく負である。周期倍分岐の臨界値で発散し、臨界値を過ぎると傾きは正となる。

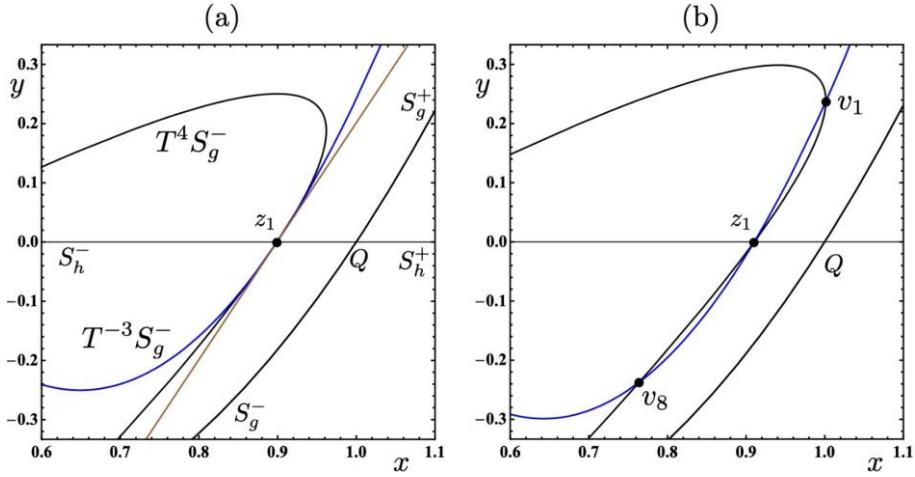


図 16: 反周期倍分岐。(a) $a = 4.03727292$. 点 z_1 を通過している直線は傾き 2 の直線。(b) $a = 4.2$.

次にブロックコード $E(1/4)D(1/3)$ の周期軌道が反周期倍分岐を起こす過程を検討する。反周期倍分岐では軌道点 z_4 から二つの娘軌道点が対称線 S_g^- 上に生じる。そのため 反周期倍分岐が生じることを確認するためには対称線 S_h^- 上の点 z_1 で $T^4 S_g^-$ と $T^{-3} S_g^-$ の関係を観察する必要がある。図 16(a)では、 $T^4 S_g^-$ と $T^{-3} S_g^-$ が点 z_1 において非横断的交差をしている。両者の傾きはともに 2 である。点 z_1 を通過する傾き 2 の直線を図(a)に追加してある。この状況が反周期倍

分岐の臨界値で生じる。図 16(b)では、点 z_1 から生じた娘軌道点 v_1 と v_8 ($= hv_1$)が観察できる。

(a)

(b)

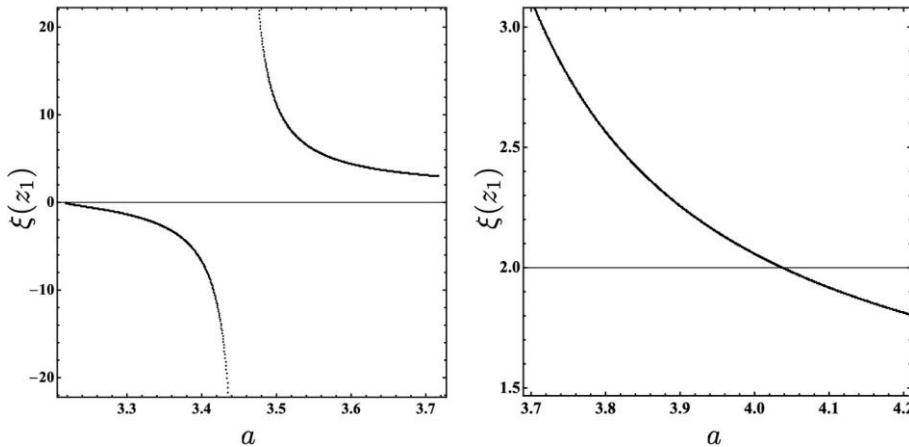


図 17: (a) 像 $T^4S_g^-$ の軌道点 z_1 における傾き $\xi(z_1)$ は、負から正へと変化する。(b) 傾きが 2 になったパラメータ値で反周期倍分岐が生じる。

像 $T^4S_g^-$ の点 z_1 における傾きのパラメータ依存性を図 17 に示した。点 z_1 がサドルノード分岐で生じた直後の傾きは負である。傾きが発散した後、傾きは正になる。その後、傾きは減少し、傾きが 2 になったパラメータ値で反周期倍分岐が生じる。以上の結果をまとめて性質 3.3 とする。

性質 3.3. h -主軸上の軌道点 z が周期倍分岐を起こして生じた娘軌道点が h -副軸上にある場合、(反)周期倍分岐の臨界値で軌道点 z における h -副軸の傾きは 2 である。

(a)

(b)

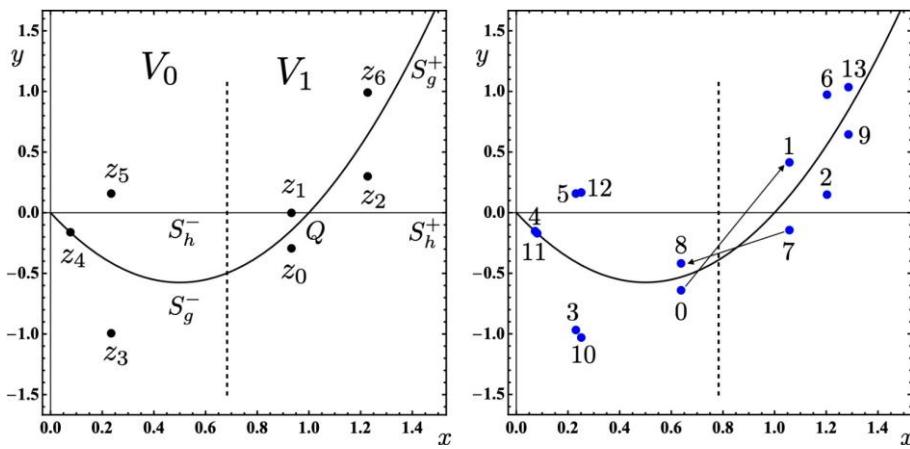


図 18: (a) 母軌道点。ブロックコード $D(1/3)E(1/4) (111 \cdot 0001)$ 。(b) 反周期倍分岐で生じた娘軌道点。整数 k は v_k を意味する。ブロックコード $S(1/3)E(1/4)F(1/3)E(1/4) (011 \cdot 0001 \cdot 101 \cdot 0001)$ 。 $a = 4.6$ 。

反周期倍分岐を起こす母軌道を図 18(a)に描き、反周期倍分岐で生じた娘軌道を図 18(b)に描いた。縦に入っている点線のあたりに安定多様体の弧 $T^{-1}\Gamma_s$ が侵入し、点線の左側が領域 V_0 となり右側が領域 V_1 となる。反周期倍分岐においては、 $v_8 = gv_0$ と $v_7 = gv_1$ が成り立つ。 z_0 の左に v_0 があり、右に v_7 がある。しかし、 z_1 の左に v_8 があり、右に v_1 がある。左右の関係が写

像 T で反転している。つまり、反周期倍分岐では方向反転型が生じる。以上より性質 3.4 が得られる。

性質 3.4. 周期倍分岐が先に生じ、次に反周期倍分岐が生じる場合、周期倍分岐のタイプは方向保存型で、反周期倍分岐のタイプは方向反転型である。

母軌道は最後に同周期分岐を起こしてサドル型周期軌道となる。周期が 7 の二つの娘軌道が生じるがこれらは非対称周期軌道である。

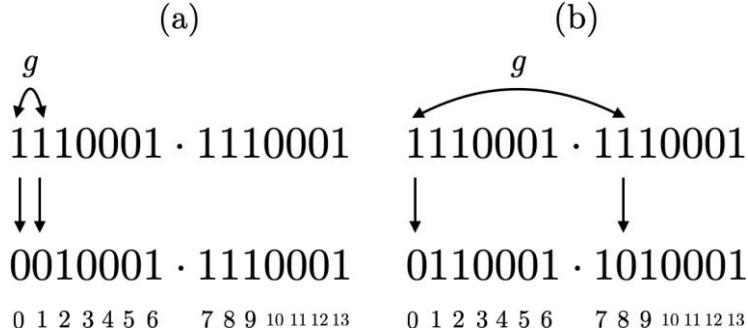


図 19: 娘軌道の記号化規則。(a) 周期倍分岐。(b) 反周期倍分岐。

三つの分岐で生じた娘軌道のブロックコードを決めよう。周期倍分岐で生じた娘軌道の軌道を描いた図 13(b)を見よう。出発点 u_0 より軌道点を追うことで軌道点の記号を順次決めることができる。ここで $u_1 = gu_0$ である。点 u_0 が生じた直後は点 z_1 の近くにあるが、パラメータの増加にともない左に移動し最終的に領域 V_0 に入る。一方の点 u_1 も同様に移動をして領域 V_0 に入る。正規表現 $D(1/3)E(1/4)$ を二つ連続した表現を用意する(図 19(a))。二点 u_0 と u_1 の記号 1 を 0 に書き換えることで娘軌道のコードが得られる。得られたコードをブロックコード表示で書く。

$$0010001 \cdot 1110001 = E(1/3)E(1/4) \cdot D(1/3)E(1/4). \quad (31)$$

次に反周期倍分岐で生じた娘軌道の軌道を描いた図 18(b)を見よう。ここで $v_8 = gv_0$ である。点 v_0 が生じた直後は点 z_1 の近くにあるが、パラメータの増加にともない左に移動し最終的に領域 V_0 に入る。一方の点 v_8 も同様に移動をして領域 V_0 に入る。正規表現 $D(1/3)E(1/4)$ を二つ連続した表現を用意する(図 19(b))。二点 v_0 と v_8 の記号 1 を 0 に書き換えることで娘軌道のコードが得られる。得られたコードをブロックコードで書く。

$$1010001 \cdot 1010001 = S(1/3)E(1/4) \cdot F(1/3)E(1/4). \quad (32)$$

この表現の前半のコード $S(1/3)E(1/4) = 101 \cdot 0001$ と、後半のコード $F(1/3)E(1/4) = 011 \cdot 0001$ は時間反転対である。記号を巡回しても二つのコードは一致しないことより、これらのコードで記述される周期軌道が非対称周期軌道であることがわかる。これらは同周期分岐で生じた二つの娘軌道のブロックコードである。以上で得られた結果をまとめて性質 3.5 とする。

性質 3.5. 反周期倍分岐で生じた娘軌道のブロックコードを P_lP_r とする。 P_l と P_r は同周期分岐で生じた二つの娘非対称周期軌道のブロックコードである。

非対称周期軌道を相平面で描くことができないので、コードを利用して記号平面で同周期分岐で生じた二つの娘軌道を描く(図 20)。母軌道の軌道点 \hat{z}_1 より \hat{u}_1 と \hat{v}_1 が生じる。これらは

対称線 \hat{S}_h に関して対称な位置にある。記号平面で定義された写像、対合ならびに周期軌道の描き方については付録 A で説明した。

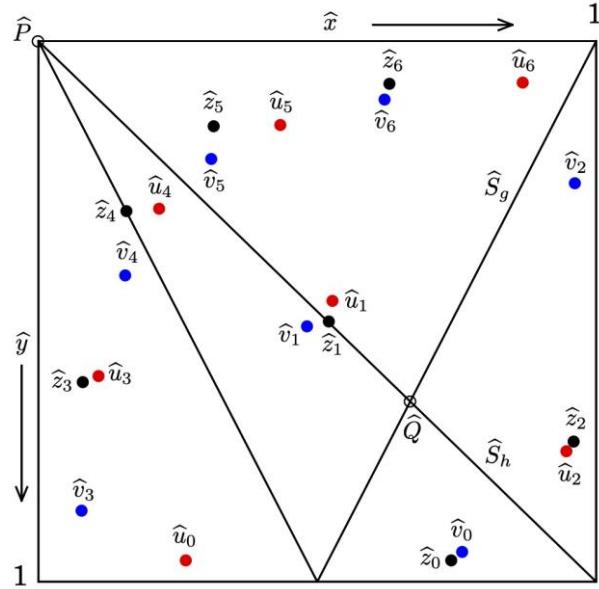


図 20: 記号平面上における二つの非対称娘軌道の軌道点 (0110001: 赤丸, 1010001: 青丸) と, 対称周期軌道点 (1110001: 黒丸)。

再度, 安定性係数の図 12 を見て欲しい。安定性係数が減少して $r(a) = -1$ と交差する点を L_3 と名付ける (図(a))。安定性係数が増加して, 再度 $r(a) = -1$ と交差する点を R_3 とする (図(b))。 $r(a) = -1 = 2\cos(2\pi/3)$ より, L_3 は写像 T^7 を単位として回転数 $1/3$ の周期軌道が回転分岐で生じる臨界点であることは簡単に理解できる。問題は R_3 である。解釈の仕方は 2 通りある。 $r(a) = -1 = 2\cos(2 \times (-1)\pi/3)$ と考えれば, L_3 では回転数 $(-1/3)$ の周期軌道が回転分岐で生じたと解釈できる。しかし, この解釈では回転数が減少しているから, この解釈は要請 1.1 に反する。要請 1.1 のもとでは $r(a) = -1 = 2\cos(2 \times 2\pi/3)$ として, R_3 では回転数 $(2/3)$ の周期軌道が回転分岐で生じたと解釈する必要がある。つまり, 安定性係数が増加しているパラメータ領域では, 回転数 $1/2 < p/q < 1/1$ の周期軌道が回転分岐で生じている。以上より回転分岐の回転数区間が $(0, 1/2) \cup (1/2, 1)$ に拡張された。

母軌道がタイプ II の分岐過程を起こす条件を示す。

条件 3.6. 母周期軌道が生じた直後において橙円型かつ偶コードであること。

3.3. タイプ III: 反同周期分岐から周期倍分岐

3.3.1. 例 1. サドルノード分岐で生じた周期軌道

タイプ III の最初の例としてサドルノード分岐で生じた周期軌道を利用する。ブロックコード $E(1/3)E(1/2)E(1/2)$ と $E(1/3)F(1/2)F(1/2)$ の周期軌道の分岐過程を調べる [6]。コードはともに奇であるから, これらは馬蹄 \mathcal{H} の中では反転サドル型周期軌道である。サドルノード分岐で生じた直後の安定性係数を数値計算で調べた結果, ブロックコード $E(1/3)E(1/2)E(1/2)$ の周期軌道がサドル型で, $E(1/3)F(1/2)F(1/2)$ の周期軌道が橙円型であ

ることが得られた. よって, ブロックコード $E(1/3)E(1/2)E(1/2)$ の周期軌道がタイプ III の分岐過程を示し, $E(1/3)F(1/2)F(1/2)$ の周期軌道はタイプ I の分岐過程を示すことがわかる. ここで周期 7 の写像 T^7 の対合表現で式(30)を利用する. g -主軸 (S_g^+) と接触し交差する g -副軸は像 $T^3S_h^-$ である. サドルノード分岐で二つの周期軌道点が生じる様子を図 21 に示した. 図の点 A がブロックコード $E(1/3)E(1/2)E(1/2)$ の周期軌道の軌道点で, 点 B が $E(1/3)F(1/2)F(1/2)$ の周期軌道の軌道点である. ちなみに点 C はブロックコード $E(1/7)$ の周期軌道の軌道点である.

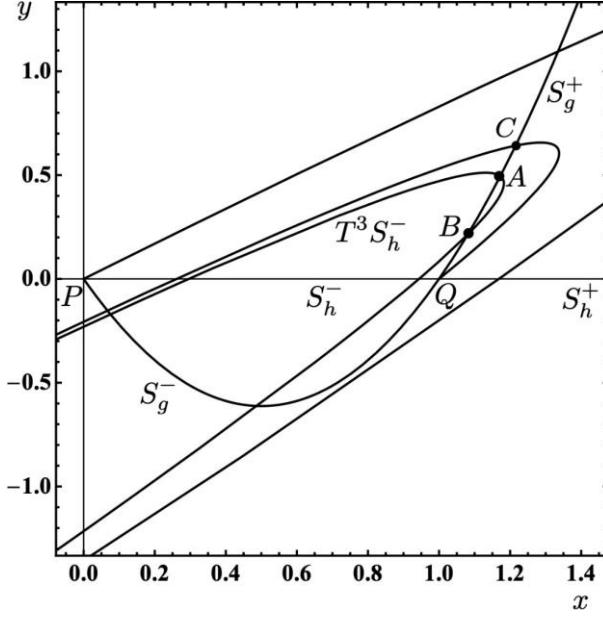
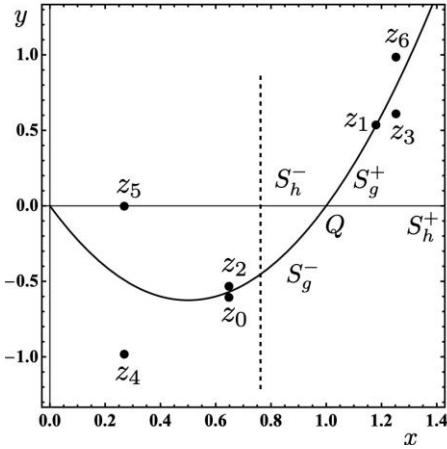


図 21: 点 A はブロックコード $E(1/3)E(1/2)E(1/2)$ の周期軌道点で, 点 B はブロックコード $E(1/3)F(1/2)F(1/2)$ の周期軌道点. 点 C はブロックコード $E(1/7)$ の周期軌道の軌道点. $a = 4.9$.

(a)



(b)

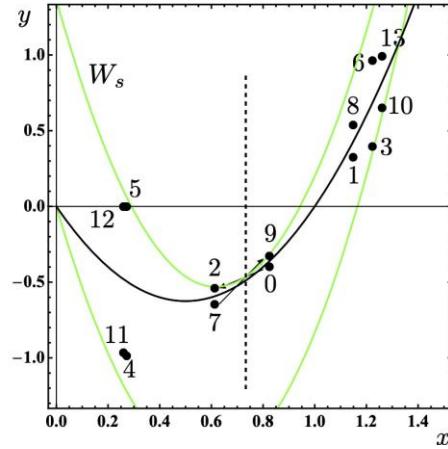


図 22: (a) ブロックコード $E(1/2)E(1/2)E(1/3)$ の周期軌道点. $a = 5$. (b) ブロックコード $E(1/2)E(1/2)E(1/3)$ の周期軌道が周期倍分岐 (方向反転型) を起こして生じた娘軌道点 α_k ($0 \leq k \leq 13$). 娘軌道 $F(1/2)E(1/2)E(1/3)E(1/2)F(1/2)E(1/3)$ ($11 \cdot 01 \cdot 001 \cdot 01 \cdot 11 \cdot 001$) の軌道点は, 図では 0 から 13 と記述されている. 周期倍分岐の臨界値は $a = 4.78482126$. 点線の左側が領域 V_0 となり右側が領域 V_1 となる.

ブロックコード $E(1/3)E(1/2)E(1/2)$ の周期軌道点の全体を図 22(a)に示した. この周期軌道は, 最初に反同周期分岐を起こしてサドル型から楕円型に変わる. 次に周期倍分岐を起こし反転サドル型になる. 周期倍分岐で生じた娘軌道を 図 22(b)に描いた. 図(a)で, 領域 V_0 と V_1 の境界に最近接している二点 z_0 と z_2 ($= g z_0$) は領域 V_0 にある. 軌道点 z_0 より娘軌道点 α_0 (図では 0 と書かれている) と α_7 が生じる. 点 α_0 は右方向に移動し領域 V_1 に入る. 点 α_7 は左方向に移動し領域 V_0 に留まる. 軌道点 z_2 より娘軌道点 α_2 と α_9 が生じる. 点 α_9 は右方向に移動し領域 V_1 に入り, 点 α_2 は左方向に移動し領域 V_0 に留まる. $\alpha_2 = g\alpha_7$ と $\alpha_9 = g\alpha_0$ が成り立つ. 写像 T^2 による軌道点の動きから, この移動が方向反転型であることがわかる. これを性質 3.7 とする.

性質 3.7. 反同周期分岐が生じた後の周期倍分岐は方向反転型である.

ブロックコード $E(1/3)F(1/2)F(1/2)$ の周期軌道点を図 23(a)に示した. 境界に最近接している軌道点は w_0 と w_2 ($= gw_0$) である. これらは領域 V_1 にある. この場合, 軌道点 w_0 より娘軌道点 β_0 と β_7 が生じる (図 23(b)における 0 と 7). 軌道点 w_2 より娘軌道点 β_2 と β_9 が生じる (図 23(b)における 2 と 9). 二点 β_7 と β_9 は右方向に移動し領域 V_1 に留まり, 二点 β_0 と β_2 は左方向に移動し領域 V_0 に入る. $\alpha_2 = g\alpha_7$ と $\alpha_9 = g\alpha_0$ が成り立つ. 写像 T^2 による軌道点の動きは方向保存型である.

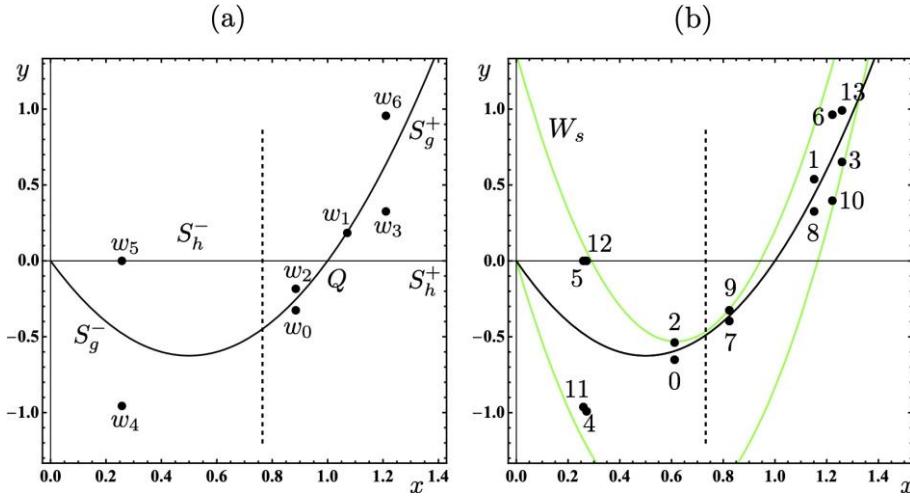


図 23: (a) ブロックコード $F(1/2)F(1/2)E(1/3)$ の周期軌道点. $a = 5$. (b) ブロックコード $F(1/2)F(1/2)E(1/3)$ の周期軌道が周期倍分岐 (方向保存型) を起こして生じた娘軌道点 β_k ($0 \leq k \leq 13$). 図では 0 から 13 と記述されている. ブロックコード $E(1/2)E(1/2)E(1/3)F(1/2)F(1/2)E(1/3)$ ($01 \cdot 01 \cdot 001 \cdot 11 \cdot 11 \cdot 001$) の周期倍分岐の臨界値は $a = 4.735844435$. 点線の左側が領域 V_0 となり右側が領域 V_1 となる.

ブロックコード $E(1/3)E(1/2)E(1/2)$ の周期軌道と, $E(1/3)F(1/2)F(1/2)$ の周期軌道の安定性係数を図 24 に示した. これらよりブロックコード $E(1/3)E(1/2)E(1/2)$ の周期軌道がタイプ III の分岐を示すことと, ブロックコード $E(1/3)F(1/2)F(1/2)$ の周期軌道がタイプ I の分岐を示すことが確認できる.

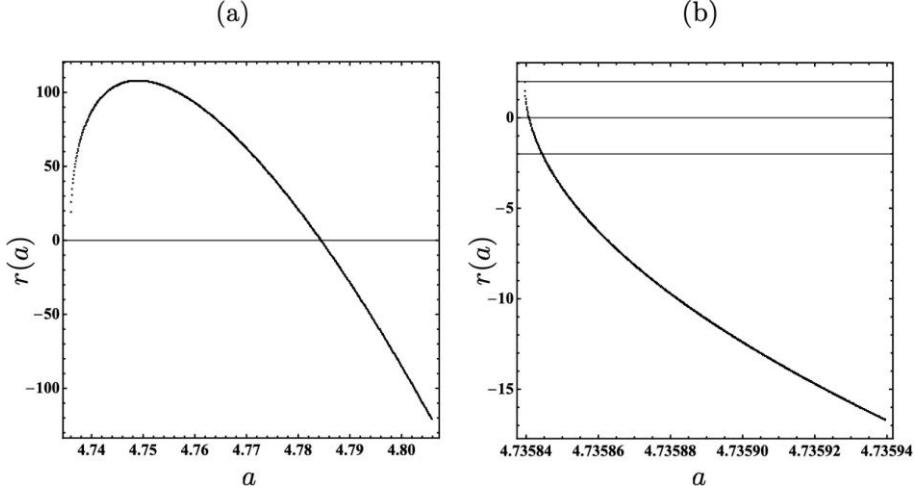


図 24: (a) ブロックコード $E(1/3)E(1/2)E(1/2)$ の周期軌道の安定性係数. (b) ブロックコード $E(1/3)F(1/2)F(1/2)$ の周期軌道の安定性係数.

ブロックコード $E(1/3)E(1/2)E(1/2)$ の周期軌道の軌道点 z_1 における g -副軸 ($T^3S_h^-$) の傾き $\xi(z_1)$ を調べる. 結果は図 25 に示した. 図(a)において傾きは正である. パラメータの増加につれて傾きは増加し, 図(b)において傾き $\xi(z_1)$ が発散する. この状況が周期倍分岐の臨界値で生じる. 図(c)のように傾き $\xi(z_1)$ が負になった後, 図(d)で示したように傾き $\xi(z_1)$ は正となる. g -副軸の傾きは侵入してきた不安定多様体の $T\Gamma_u$ の傾きに漸近する. タイプ III の分岐過程の原因是 $T\Gamma_u$ の侵入である.

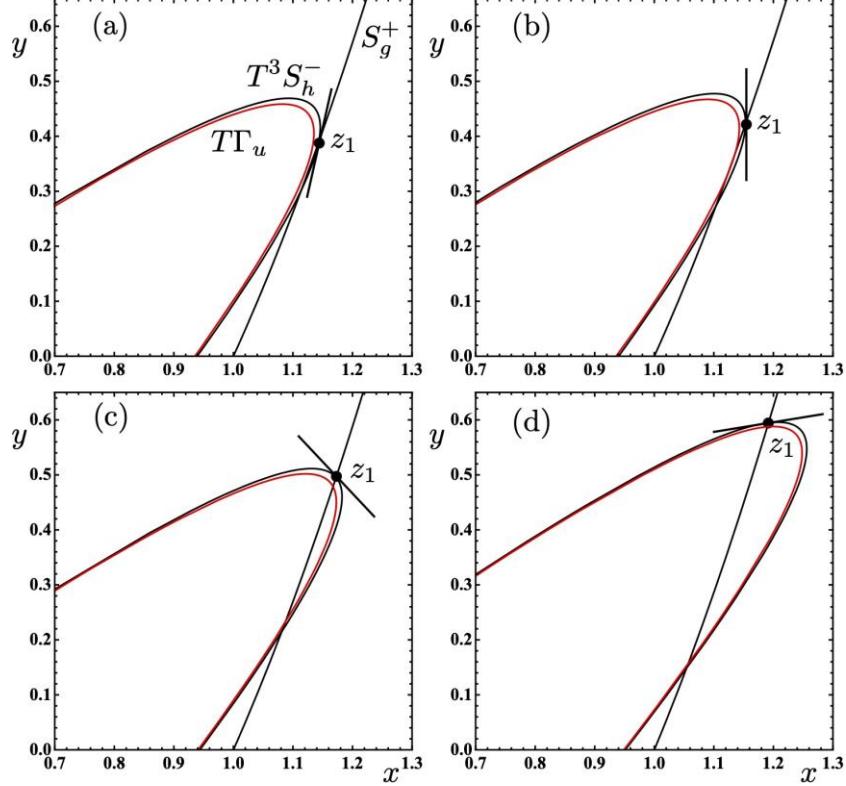


図 25: 点 z_1 における g -副軸の傾き. (a) $a = 4.75$. サドルノード分岐 ($a_c^{sn} = 4.73583954$) の直後. (b) $a = 4.78482126$. 周期倍分岐の臨界値. (c) $a = 4.9$. (d) $a = 5.2$.

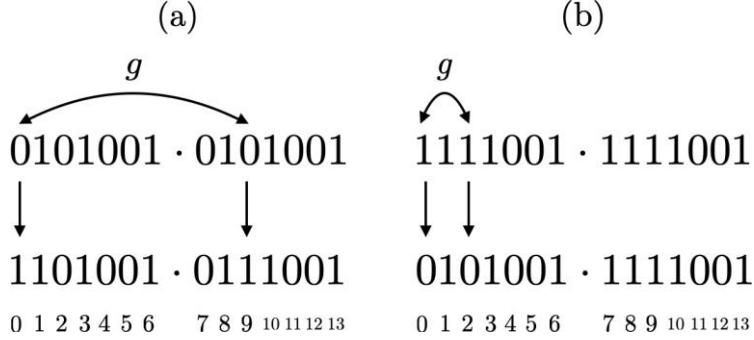


図 26: 記号化規則. 図の最下部に描いた番号は軌道点 α_k ($0 \leq k \leq 13$)の添え字である

ブロックコード $E(1/3)E(1/2)E(1/2)$ の周期軌道が周期倍分岐を起こして生じた娘軌道のコードを決定しよう. 図 26(a)のように, 正規表現 0101001 を連続して書く. 軌道点 α_0 は領域 V_0 に移動する. 軌道点 α_9 も同様の移動をする. 図の最下部に描いた番号は軌道点 α_k ($0 \leq k \leq 13$)の添え字である. 第 0 番と第 9 番の記号を 1 に変更すると, 娘軌道のコードが得られる. これをブロックコードで記述すると, $F(1/2)E(1/2)E(1/3) \cdot E(1/2)F(1/2)E(1/3)$ が得られる. 反同周期分岐で生じた二つの娘軌道のブロックコードは, $F(1/2)E(1/2)E(1/3)$ と $E(1/2)F(1/2)E(1/3)$ であることが自然に導かれる.

次に, ブロックコード $E(1/3)F(1/2)F(1/2)$ の周期軌道が周期倍分岐を起こして生じた娘軌道のコードの決定の仕方を, 図 26(b)に示した. この場合にも正規表現 1111001 を二つ連結した. 次に, 二点 β_0 と β_2 が領域 V_0 に移動することから, これらの記号を 0 に変更する. 娘軌道のコードは $0101001 \cdot 1111001$ と得られ, これのブロックコード $E(1/2)E(1/2)E(1/3) \cdot F(1/2)F(1/2)E(1/3)$ が得られる. 前半と後半はサドルノード分岐で生じた二つの母親のブロックコードである.

最後に, 反同周期分岐で生じた二つの娘軌道のブロックコードをもとに, これらの軌道を記号平面で描いた (図 27). 軌道点 \hat{u}_k ($0 \leq k \leq 6$) がブロックコード $F(1/2)E(1/2)E(1/3)$ の軌道点で, 軌道点 \hat{v}_k ($0 \leq k \leq 6$) がブロックコード $E(1/2)F(1/2)E(1/3)$ の軌道点である.

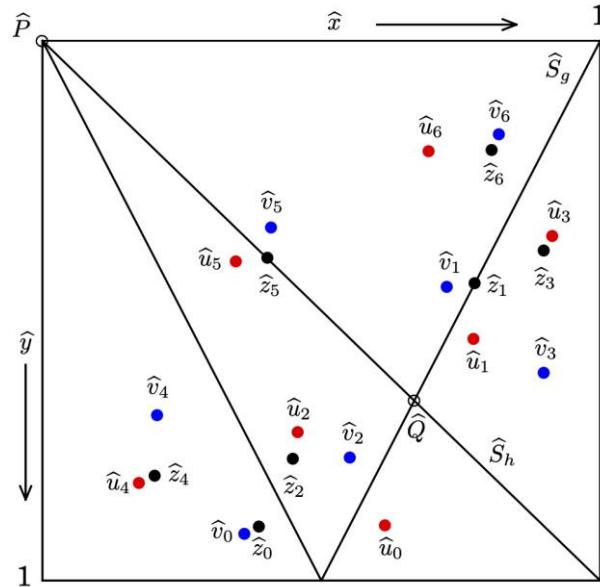


図 27: 記号平面での軌道. 軌道点 \hat{z}_k ($0 \leq k \leq 6$) が反同周期分岐を起こして生じた二つの娘軌道点 \hat{u}_k と \hat{v}_k .

3.3.2. 例 2. 回転分岐で生じた周期軌道

二つ目の例として、ブロックコード $E(1/3)$ で記述される周期軌道が回転分岐を起こして生じた周期軌道の周期倍分岐を調べる。この小節ではブロックの回転数 $1/3$ を省く。写像 T^3 を単位とした周期 3 の周期軌道のブロックコードは ESF と EDE である。数値計算より、回転分岐が生じた直後においてブロックコード ESF の周期軌道は楕円型であり、ブロックコード EDE の周期軌道はサドル型であることが得られた。これらのコードの偶奇性は奇である。その結果、ブロックコード ESF の周期軌道はタイプ I の周期倍分岐を起こし、ブロックコード EDE の周期軌道はタイプ III の周期倍分岐を起こすことがわかる。以下ではブロックコード EDE の周期軌道の分岐過程を調べる。

母軌道 EDE が周期倍分岐を起こして生じた娘軌道を図 28 に描いた。図 28 では、特に対称線 S_h^- の周辺にある軌道点のみを描いた。軌道点 z_1 と z_7 は、領域 E に含まれるのでブロックは E である。ブロックの回転数 $1/3$ は省いた。軌道点 z_4 は領域 D にあるので、ブロックコードが D である。軌道点 z_4 の軌道点より二つの娘軌道点 u_4 と u_{13} が生じる。軌道点 u_4 は対称線 S_h^- の下方に移動し領域 S に入る。軌道点 u_{13} は対称線 S_h^- の上方に移動し領域 F に入る。もしこれらが領域 D に留まると娘軌道のブロックコードは $EDE \cdot EDE$ となる。これは母ブロックコードの繰り返しであるから矛盾である。以上より娘軌道のブロックコードが決まる。

$$ESE \cdot EFE. \quad (33)$$

図 19(b) と図 26(a) と同じように用意した前半の記号と対応する後半の記号の両者で 0 と 1 の入れ替えを行なうことによって娘軌道のコードが決まる。図 28(b) を見てほしい。関係式 $u_4 = gu_{12}$, $u_{13} = gu_3$ と $z_4 = gz_3$ が成り立つ。軌道点 u_3 から u_4 へ引いた矢印が、軌道点 u_{12} から u_{13} へ引いた矢印と交差する。よって、この場合の周期倍分岐も方向反転型である。

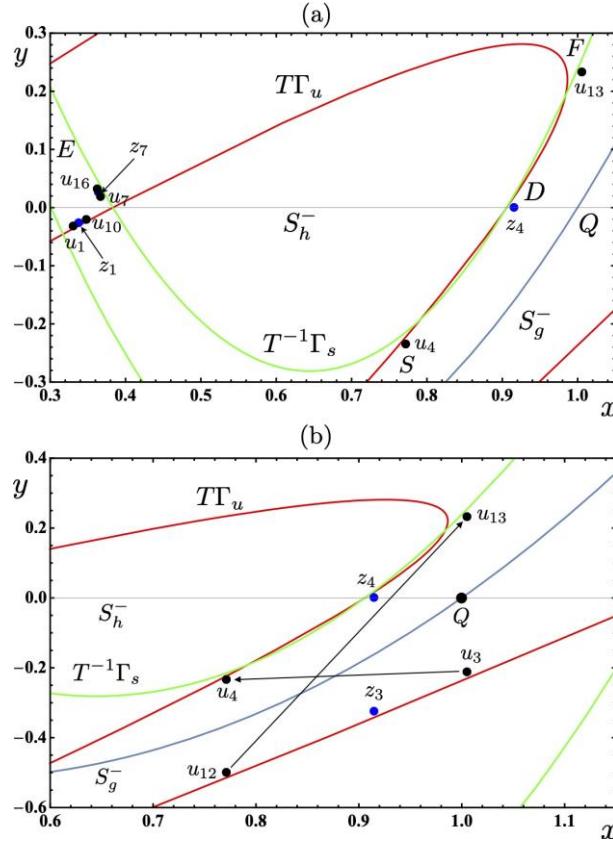


図 28: (a) ブロックコード EDE の軌道点: $z_1 \rightarrow z_4 \rightarrow z_7 \rightarrow z_1$. ブロックコード $ESE \cdot EFE$ の軌道点: $u_1 \rightarrow u_4 \rightarrow u_7 \rightarrow u_{10} \rightarrow u_{13} \rightarrow u_{16} \rightarrow u_1$. (b) 周期倍分岐は方向反転型である. $a = 4.15$.

例 1 と例 2 において娘軌道の記号化が異なっている. 例 1 の場合, 最近接軌道点記号置き換え法を利用して記号を入れ替えた. 例 2 についても同様の手順を利用してみよう. 例 2 では, 最近接軌道点は z_0 と z_7 である. 周期倍分岐が方向反転型として娘軌道のコードを決める. 先ず母軌道を二つ連結し, 第 0 番目と第 16 (= 7 + 9) 番目の 0 を 1 に変更する.

$$\underline{001111001} \cdot 0011110\underline{01} \rightarrow \underline{101111001} \cdot 0011110\underline{11}. \quad (34)$$

これをブロックコードで記述すると $SDE \cdot EDF$ が得られる. しかし, このコードは禁止語 FS (末尾の F と先頭の S) を含む. 例 2 の場合, 娘軌道のコードを決めるために最近接軌道点記号置き換え法を使えない.

母ブロックコードを $E\dot{D}E$ と書く. ただし, \dot{D} は 111 を表している. 記号 1 で記述される軌道点 z_4 が対称線 S_h^- 上にあることを意味している. 軌道点 z_4 から分岐した娘軌道点は対称線 S_h^- より離れ領域 S と F へ移動する. これより下記のように置き換えを行うことで娘軌道のブロックコードが決まる.

$$E\dot{D}E \cdot E\dot{D}E \rightarrow ESE \cdot EFE. \quad (35)$$

この置き換えを $D \cdot SF$ -置き換え法と名付ける.

3.3.3. まとめ

母軌道がタイプ III の分岐過程を起こす条件を条件 3.8 とする. 最後にタイプ III の分岐過程で生じた娘軌道の記号化規則を規則 3.9 としてまとめておく.

条件 3.8. 母周期軌道が生じた直後においてサドル型でかつ奇コードであること.

規則 3.9. 母軌道のブロックコードが, ブロック $\dot{D}(p/q)$ を含まない場合は [I] を利用し, ブロック $\dot{D}(p/q)$ を含む場合は [II] を利用する.

[I] 最近接軌道点記号置き換え法を利用して記号の入れ替えを行う.

[II] $D \cdot SF$ -置き換え法を利用してブロックコードの入れ替えを行う.

3.4. タイプ IV: 反同周期分岐から周期倍分岐、反周期倍分岐、同周期分岐へ

タイプ IV の例としてサドルノード分岐で生じた周期 14 の周期軌道を扱う. そのため写像 T^{14} の対合表現を導入する.

$$T^{14} = T^{13}g \circ h \equiv \hat{g} \circ h. \quad (36)$$

対合 \hat{g} に関して不变な集合は T^7S_h である.

$$T^{13}g(T^7S_h) = T^6gS_h = T^6ghS_h = T^7S_h. \quad (37)$$

対称線 S_h^- , 像 $T^7S_h^-$ と弧 $T\Gamma_u$ の位置関係を図 29 に示した. 図(a)はサドルノード分岐前の配置である. サドルノード分岐の臨界値で, 像 $T^7S_h^-$ が対称線 S_h^- と接する(図(b)). サドルノード分岐の後, 軌道点 z_4 と w_4 が生じる(図(c)). 像 $T^7S_h^-$ の先頭部分は左に曲がり, 不安定多様体の弧 $T\Gamma_u$ に沿ってのびていく. 像 $T^7S_h^-$ の先頭部分は再び対称線 S_h^- に接し交点 α_4 と β_4 が生じる(図(d)).

ブロックコード $E(1/5)E(1/3)D(1/3)E(1/3)$ の軌道点を図 30(a)に示した. 領域 V_0 と V_1 の境界に近い軌道点 z_3 と z_4 の記号は 1 である. また, 軌道点 z_0 と z_7 の記号は 0 であることがわかる. これらよりコード $001 \cdot 111 \cdot 001 \cdot 00001 = E(1/3)D(1/3)E(1/3)E(1/5)$ が確認できる. ブロックコード $E(1/5)S(1/3)D(1/3)F(1/3)$ の軌道点を図 30(b)に描いた. 軌道点 w_3 と w_4 の記号は 1 で, 軌道点 w_6 と w_1 の記号は 0 である. よってコード $101 \cdot 111 \cdot 011 \cdot 00001 = S(1/3)D(1/3)F(1/3)E(1/5)$ が確認できる.

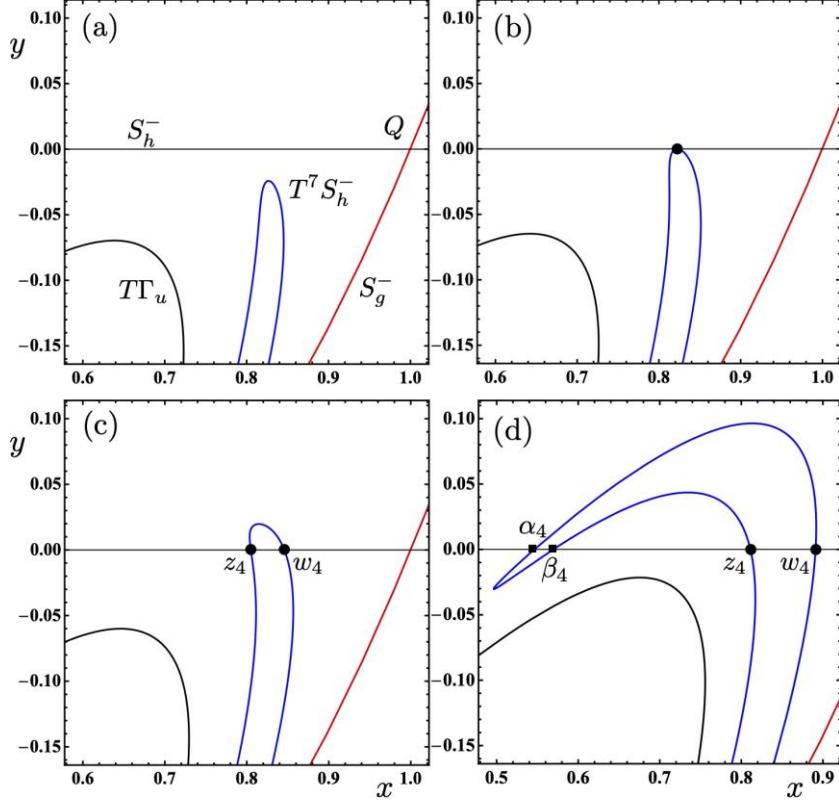


図 29: 対称線 S_h^- , 像 $T^7 S_h^-$ と不安定多様体 TT_u の配置. (a) サドルノード分岐の前. $a = 3.02$. (b) サドルノード分岐の臨界値. $a = 3.0351963090$. (c) サドルノード分岐の後. $a = 3.05$. (d) $a = 3.17$.

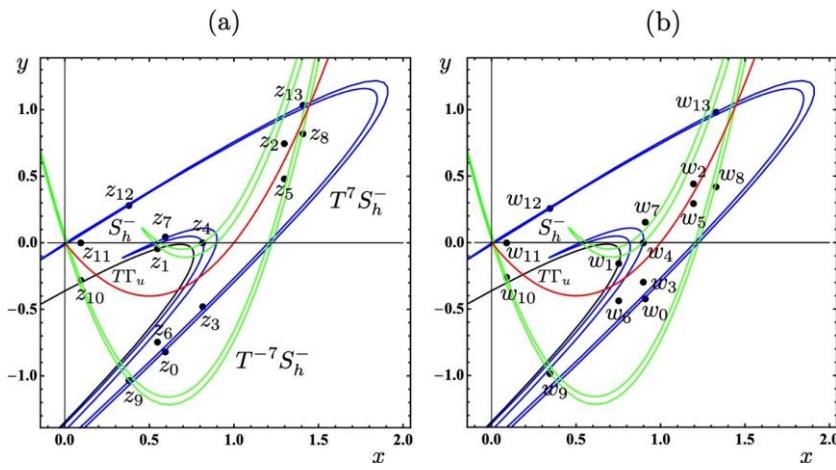


図 30: 像 $T^7 S_h^-$, 像 $T^{-7} S_h^-$ と不安定多様体 TT_u の配置. $a = 3.2$. (a) 軌道点 $z_k (0 \leq k \leq 13)$ はブロックコード $E(1/3)D(1/3)E(1/3)E(1/5) (001 \cdot 111 \cdot 001 \cdot 00001)$ の軌道点. (b) 軌道点 $w_k (0 \leq k \leq 13)$ はブロックコード $S(1/3)D(1/3)F(1/3)E(1/5) (101 \cdot 111 \cdot 011 \cdot 00001)$ の軌道点.

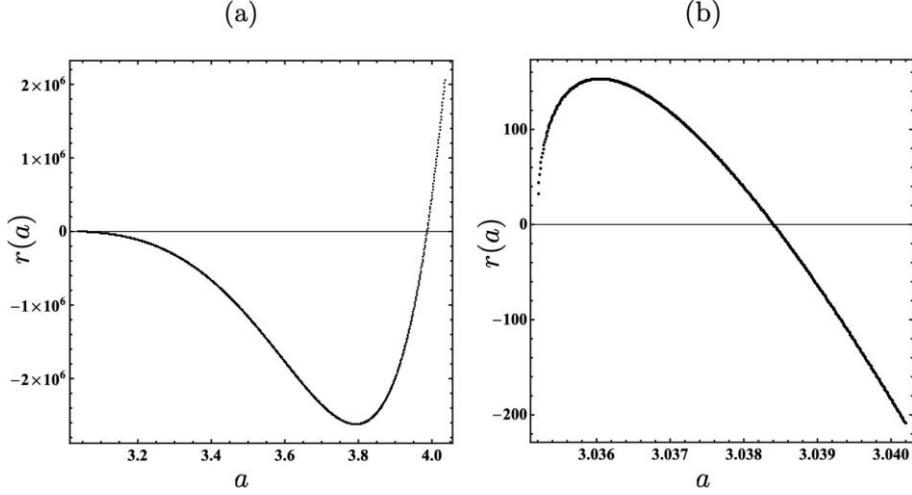


図 31: ブロックコード $E(1/5)E(1/3)D(1/3)E(1/3)$ の周期軌道の安定性係数. (a) 全体図. (b) 拡大図.

ブロックコード $E(1/5)E(1/3)D(1/3)E(1/3)$ の周期軌道の安定性係数を図 31(a)に示した. 図 31(b)には, サドルノード分岐が生じた直後の安定性係数のパラメータ依存性を示した. これらの図より, ブロックコード $E(1/5)E(1/3)D(1/3)E(1/3)$ の周期軌道がタイプ IV の分岐過程を起こすことが確認できる.

ブロックコード $E(1/5)S(1/3)D(1/3)F(1/3)$ の周期軌道の安定性係数を図 32(a)に示した. 図 32(b)には, サドルノード分岐が生じた直後の安定性係数の振る舞いを示した. 差 $a - a_c^{sn}$ が非常に小さいので, 図(b)の横軸は $\log_{10}(a - a_c^{sn})$ とした. 図(a)と図(b)を見ると, ブロックコード $E(1/5)S(1/3)D(1/3)F(1/3)$ の周期軌道はタイプ II の分岐過程を起こすことがわかる.

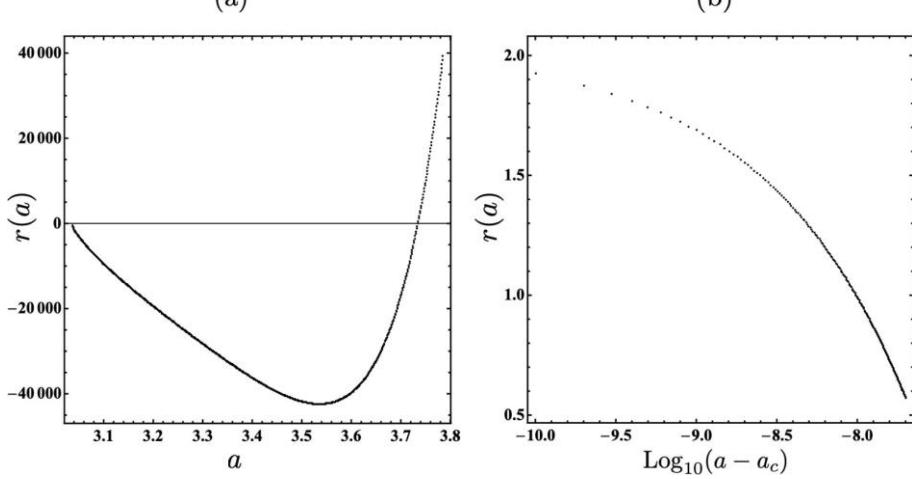


図 32: ブロックコード $E(1/5)S(1/3)D(1/3)F(1/3)$ の周期軌道の安定性係数. (a) 全体図. (b) 拡大図.

ブロックコード $E(1/5)E(1/3)D(1/3)E(1/3)$ の周期軌道の軌道点 z_4 における像 $T^7 S_h^-$ の傾き $\xi(z_4)$ を調べた結果を図 33 に示した. サドルノード分岐直後の傾きは正である. その後, 傾きは発散し負に変わる (図(a)). 再び発散し正になる (図(b)). 傾きは減少し (+2) になると反周期倍分岐が生じる. 最終的に傾きは不安定多様体の弧 $T\Gamma_u$ の傾きに漸近する. 傾き $\xi(z_4)$ の変化より, タイプ IV の分岐過程の原因は不安定多様体の弧 $T\Gamma_u$ の侵入であることが理解で

きるであろう。

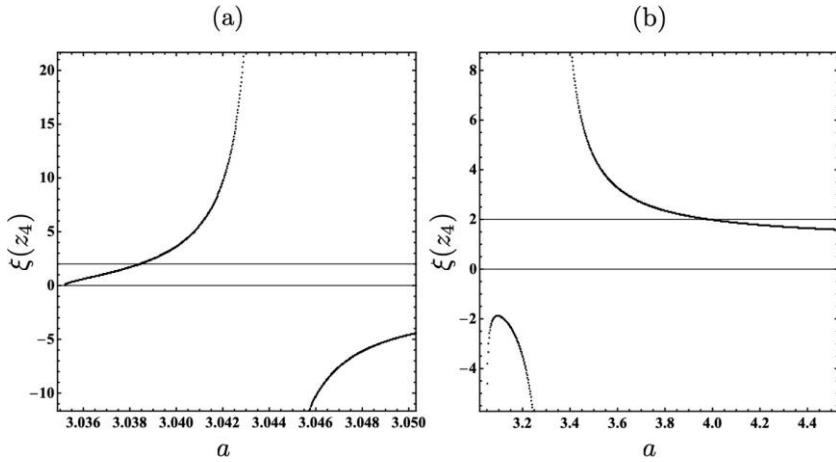


図 33: 像 $T^7 S_h^-$ の軌道点 z_4 における傾き $\xi(z_4)$ のパラメータ依存性。

母軌道 $E(1/5)E(1/3)D(1/3)E(1/3)$ から生じた娘軌道のコードを決定しよう。最初の周期倍分岐は反同周期分岐の後に生じるので、周期倍分岐は方向反転型である。また反周期倍分岐の後に同周期分岐が生じるから、反周期倍分岐も方向反転型である。

母軌道のブロックコードは $\dot{E}(1/5)E(1/3)\dot{D}(1/3)E(1/3) = 0\dot{0}001 \cdot 001 \cdot \dot{1}11 \cdot 001$ と書ける。ブロック $\dot{D}(1/3)$ を含むため、タイプ III で導入した規則 3.9[II]に従いブロックを入れ替える。図 34(a)において第 4 番目と第 17 番目が g -対をなす。これらの記号を 1 から 0 へ変更する。変更した結果をブロックで表現し、次に最小値表現にすると式(38)が得られる。この表現で入れ替えたブロックには下線を引いた。

$$E(1/5)E(1/3)\underline{S}(1/3)E(1/3) \cdot E(1/5)E(1/3)\underline{F}(1/3)E(1/3) \quad (38)$$

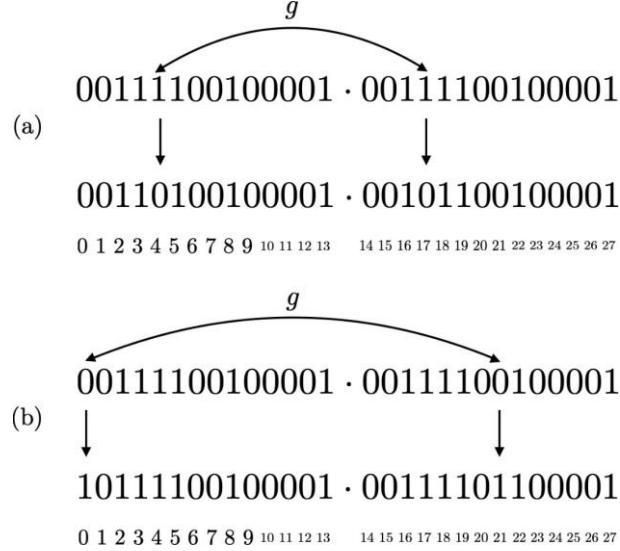


図 34: (a) 母軌道 $E(1/5)E(1/3)D(1/3)E(1/3)$ が周期倍分岐を起こして生じた娘軌道の記号化。
(b) 母軌道 $E(1/5)E(1/3)D(1/3)E(1/3)$ が反周期倍分岐を起こして生じた娘軌道の記号化。

次に反周期倍分岐で生じた娘軌道のコードは、タイプ II における反周期倍分岐で生じた娘軌道のコードの決定で使用した方法（図 19(b)）を利用する。記号の入れ替え手順は、図 34(b)に示した。正規表現 001111001 を二つ連結して、最初から軌道の番号をつけた。第 0 番目と第 21 番目が g -対をなす。これらの記号を 0 から 1 へ変更した表現をブロックで記述し最

小値表現にすると、反周期倍分岐で生じた娘軌道のブロックコードが得られる。式(39)において入れ替えたブロックには下線を引いた。

$$E(1/5)\underline{S}(1/3)D(1/3)E(1/3) \cdot E(1/5)E(1/3)D(1/3)\underline{F}(1/3). \quad (39)$$

上記で示した式(38)と式(39)以外のコードで記述される娘軌道が存在しないことを示す。ここで、 $E(1/5)EDE \cdot E(1/5)EDE$ を用意する ($E = E(1/3)$, $D = D(1/3)$)。前半部の EDE を SDE と書き換えると、前半部の EDE は $(SDE)^{-1} = EDF$ となる。得られたブロックコードは $E(1/5)SDE \cdot E(1/5)EDF$ で、これは式(39)である。前半部の EDE を EDF とすると、後半は SDE である。これも式(39)と同じである。前半部の EDE を ESE と書き換えると、前半部の EDE は $(ESE)^{-1} = EFE$ となる。これより得られるブロックコードは式(38)である。前半部の EDE を EFE とすると、後半は ESE である。これも式(38)と同じである。

前半部の EDE を以下のように置き換えることはできない。

$$EDE \rightarrow DDE, EDD, EDS, FDE. \quad (40)$$

理由は、禁止語 DD , DS , FD を含むからである。

周期倍分岐では、母軌道点から生じた娘軌道点の g -対をなす二点だけが領域 V_0 (V_1)から領域 V_1 (V_0)へ移動する。これは、前半部のブロックを一つ変更すると時間反転対称性より後半部のブロックが一つ変更されることを意味する。この対称性を満たす娘軌道のブロックコードは式(38)と式(39)だけであることが示された。

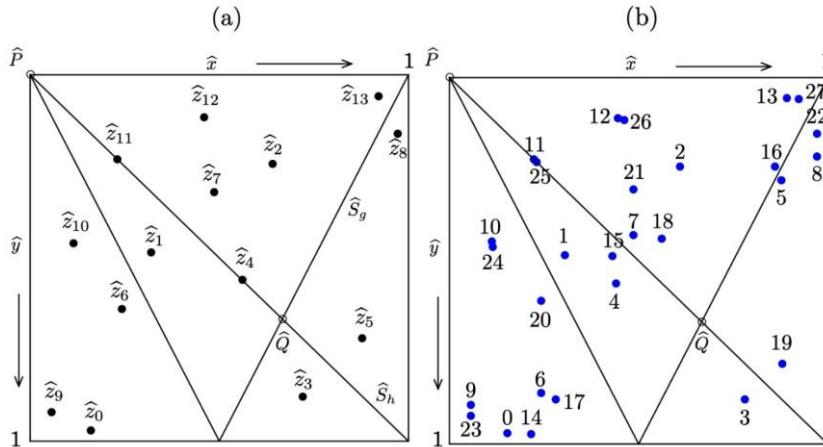


図 35: (a) 母軌道 $E(1/5)E(1/3)D(1/3)E(1/3)$ の軌道点。 (b) 娘軌道 $E(1/5)E(1/3)S(1/3)E(1/3) \cdot E(1/5)E(1/3)F(1/3)E(1/3)$ の軌道点。整数 k は軌道点 $\hat{\omega}_k$ を意味する。

上記で得られた記号化が正しいことを次に確かめる。そのために周期倍分岐で生じる娘軌道点と反周期倍分岐で生じる娘軌道点を調べる。周期 28 の娘軌道点を記号平面で描いて娘軌道点の性質を理解しよう。母軌道 $E(1/5)E(1/3)D(1/3)E(1/3)$ の軌道点を図 35(a)に、娘軌道 $E(1/5)E(1/3)S(1/3)E(1/3) \cdot E(1/5)E(1/3)F(1/3)E(1/3)$

の軌道点を図 35(b)に描いた。対称線 \hat{S}_h 上に軌道点 \hat{z}_4 と \hat{z}_{11} がある。軌道点 \hat{z}_4 から生じた軌道点 $\hat{\omega}_4$ と $\hat{\omega}_{18}$ の対称線 \hat{S}_h からの外れは明瞭である。これらの軌道点は図(b)では 4 と 18 としてある。

次に、母軌道 $E(1/5)E(1/3)D(1/3)E(1/3)$ の軌道点を図 36(a)に、娘軌道

$$E(1/5)S(1/3)D(1/3)E(1/3) \cdot E(1/5)E(1/3)D(1/3)F(1/3)$$

の軌道点を図 36(b)に描いた。対称線 \hat{S}_h 上に軌道点 \hat{z}_4 と \hat{z}_{11} がある。軌道点 \hat{z}_4 から生じた軌道点 $\hat{\Omega}_4$ と $\hat{\Omega}_{18}$ の対称線 \hat{S}_h からの外れは非常にわずかである。これらの軌道点の配置より、周期倍分

岐で娘軌道点 $\hat{\omega}_4$ と $\hat{\omega}_{18}$ が先に生じ、反周期倍分岐で娘軌道点 $\hat{\Omega}_4$ と $\hat{\Omega}_{18}$ が後で生じたと判断できる。一般に、先に生じた軌道点は母軌道点から遠くにあり、後で生じた軌道点は母軌道点の近くにあることを利用した。この性質は娘軌道のコードを決定するために利用できる。

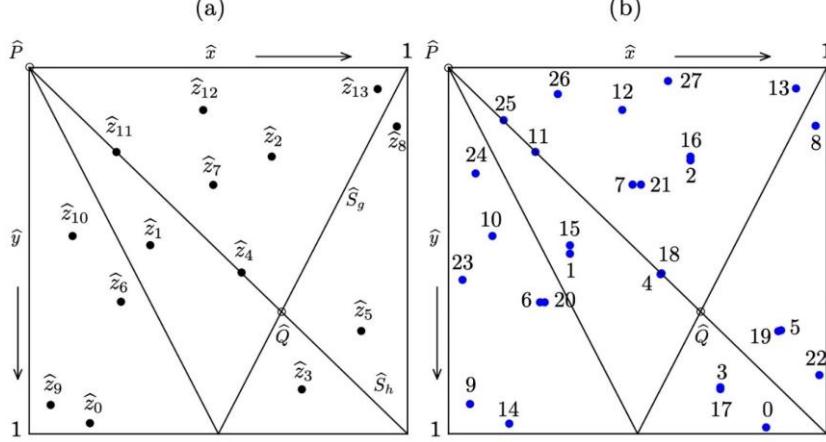


図 36: (a) 母軌道 $E(1/5)E(1/3)D(1/3)E(1/3)$ の軌道点. (b) 娘軌道 $E(1/5)S(1/3)D(1/3)E(1/3) \cdot E(1/5)E(1/3)D(1/3)F(1/3)$ の軌道点. 整数 k は軌道点 $\hat{\Omega}_k$ を意味する.

相平面におけるこれらの軌道点を図 37 に示した。先に生じた二点 ω_4 と ω_{18} は母軌道点 z_4 から遠くへ移動しているが、後で生じた二点 Ω_4 と Ω_{18} は母軌道点 z_4 の近くにある。以上で娘軌道のブロックコードの確認を終える。

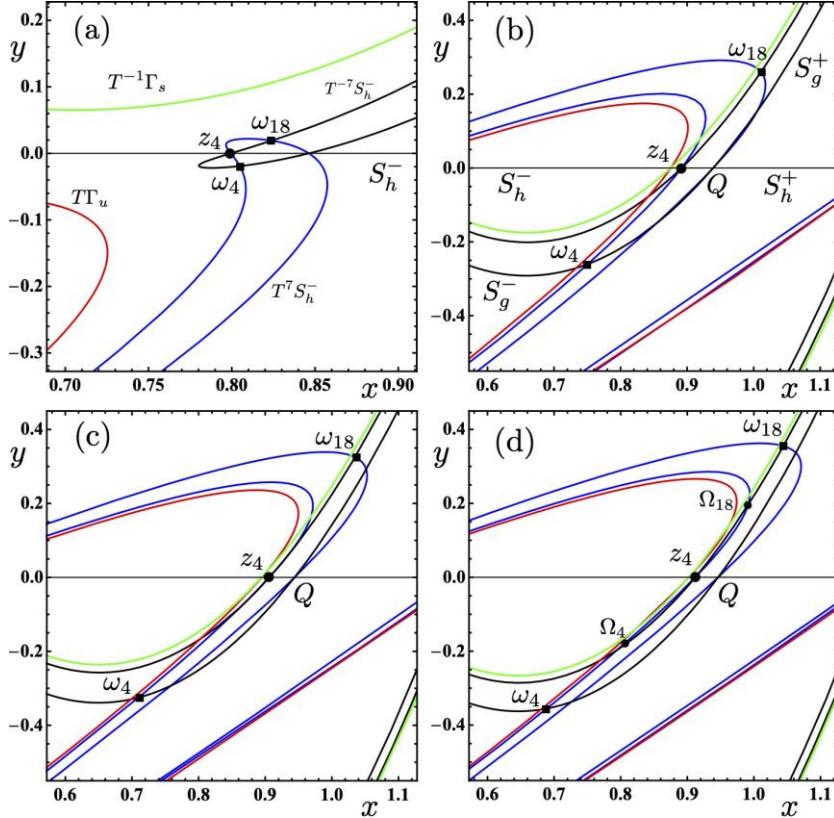


図 37: 点 z_4 は母軌道 $E(1/5)E(1/3)D(1/3)E(1/3)$ の軌道点。点 ω_4 と点 ω_{18} は娘軌道 $E(1/5)E(1/3)S(1/3)E(1/3) \cdot E(1/5)E(1/3)F(1/3)E(1/3)$ の軌道点。点 Ω_4 と点 Ω_{18} は娘軌道 $E(1/5)S(1/3)D(1/3)E(1/3) \cdot E(1/5)E(1/3)D(1/3)F(1/3)$ の軌道点。 (a) $a = 3.02$. (b) $a = 3.035196309$. (c) $a = 3.05$. (d) $a = 3.1$.

図 38 に描いた条件を満たす周期軌道点 β をもつ周期軌道がタイプ IV の分岐過程を起こすことがわかっている。この周期軌道のブロックコードは必ず $\dot{D}(p/q)$ ($0 < p/q < 1/2$) を含む。これをもとにタイプ IV の分岐過程を起こす条件 3.10 が得られる。

条件 3.10. 母周期軌道が生じた直後においてサドル型であり、ブロックコードがブロック $\dot{D}(p/q)$ ($0 < p/q < 1/2$) を含みかつ偶コードであること。

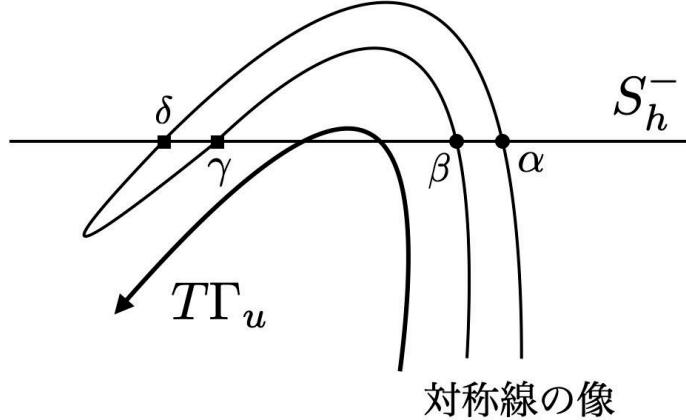


図 38: 対称線の像が、最初に対称線 S_h^- と交点し α と β が生じる。次に交点 γ と δ が生じる。交点 β を周期軌道点としてもつ 対称周期軌道はタイプ IV の分岐過程を示す。

図 38 に示した四つの交点の説明を行う。対称線の像が、最初に対称線 S_h^- と交差し、交点 α と β が生じる。次に対称線の像是不安定多様体の弧 $T\Gamma_u$ を迂回した後、再度対称線 S_h^- と交差し交点 γ と δ が生じる。弧 $T\Gamma_u$ が交点 β と γ の間に入り込むことに注意しよう。交点 α を周期軌道点としてもつ対称周期軌道はタイプ II の分岐過程を示す。交点 γ を周期軌道点としてもつ対称周期軌道はサドル型周期軌道点で分岐現象を起こさない。交点 δ を周期軌道点としてもつ対称周期軌道はタイプ I の分岐過程を示す。

4. 結語

一時期（1970 年代後半から 1980 年代前半），カオスへ至るルートの一つとして周期倍分岐は脚光を浴びた。しかし、カオスへの関心が薄れるにつれて周期倍分岐の研究も減ってしまった。筆者は、周期倍分岐が他の現象と孤立している場合のタイプ I に関する研究はもう終了していると考えている。

本論文で示したように周期倍分岐を別の観点から見ると研究すべき課題が多くある。特にタイプ IV については本論文が初めの報告である。タイプ II から IV については研究すべき問題が残っていると考えている。周期倍分岐と同周期分岐を関連付けて議論することは新しい方向性である。これらの分岐過程を議論するためには安定多様体と不安定多様体の侵入を無視することはできない。今後は、このような考え方による研究を望みたい。

謝辞

査読者より多くのコメントを賜りました。心より感謝いたします。

参考文献

- [1] 周期倍分岐に関する解説. http://www.scholarpedia.org/article/Period_doubling
- [2] Hénon, M., Numerical study of quadratic area-preserving mappings. *Quart. Appl. Math.*, 27 (1969), 291–312.
- [3] Smale, S., Differentiable dynamical systems, *Bull. Amer. Math. Soc.* 73 (1967), 747-817.
<https://www.ams.org/journals/bull/1967-73-06/S0002-9904-1967-11798-1/S0002-9904-1967-11798-1.pdf>
- [4] 山口喜博, 谷川清隆, 馬蹄への道 (共立出版, 2016).
- [5] Yamaguchi, Y. and Tanikawa, K., A new interpretation of the symbolic codes for the Hénon map. II. Prog. Theor. Phys. 125 (2011), 435-471.
<https://doi.org/10.1143/PTP.125.435>
- [6] 山口喜博, 谷川清隆, 周期倍分岐で生じた対称周期軌道の記号則, 国立天文台報 第 21 卷 (2021), 1-20. https://doi.org/10.50916/rnaoj.21.0_1
- [7] Feigenbaum, M. J., Qualitative universality for a class of nonlinear transformations. *J. Stat. Phys.* 19 (1978), 25-52. <https://doi.org/10.1007/BF01020332>
- [8] Feigenbaum, M. J., Universal metric properties of nonlinear transformations. *J. Stat. Phys.* 21 (1979), 669-706. <https://doi.org/10.1007/BF0110790>
- [9] Devaney, R., *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, (Westview Press, 2003).
邦訳:カオス力学系入門 第2版 新訂版 (後藤憲一その他訳), 2003, 共立出版株式会社.
- [10] 長島弘幸, 馬場良和, カオス入門, 培風館, (1992).
- [11] MacKay, R. S., *Renormalisation in area-preserving maps* (World Scientific, 1993).

付録 A 記号平面における写像と記号平面で周期軌道を描くプログラム

コード s の偶奇性が奇の場合, 語 $s' = ss$ を用意する. 偶の場合, 語 $s' = s$ とする. 例として, $s = 001$ の場合は $s' = 001001$ で, $s = 011$ の場合は $s' = 011$ である. 以下では $s' = 001001$ をもとに記号列を下記のように書く. ここで小数点を配置した.

$$\dots 001001.001001 \dots$$

小数点より右方向に読む. これを $x = .(001001)^\infty$ と書く. 小数点より左方向に読み, $y = .(100100)^\infty$ と書く. ここで x と y について二進法へ変換する (コードの二進法への変換手続き A.1 を参考にせよ). 変換後の表現を次に示す.

$$X_0 = .(001110)^\infty = (7/32)/(1 - 1/64) = 2/9,$$

$$Y_0 = .(111000)^\infty = (7/8)/(1 - 1/64) = 8/9.$$

初期点 (X_0, Y_0) に下記の写像 \hat{T} を作用して, その後の軌道点を決定する. 記号平面では, \hat{y} 座標の上下を反転して軌道点を描く. これによって相平面の軌道点との対応が分かりやすくなる.

記号平面 ($0 \leq \hat{x}, \hat{y} \leq 1$) における写像 \hat{T} を紹介する.

$$\hat{x}_{n+1} = 2\hat{x}_n, \quad \hat{y}_{n+1} = \hat{y}_n/2, \quad (0 \leq \hat{x}_n \leq 1/2) \quad (41)$$

$$\hat{x}_{n+1} = 2 - 2\hat{x}_n, \quad \hat{y}_{n+1} = 1 - \hat{y}_n/2. \quad (1/2 < \hat{x}_n \leq 1) \quad (42)$$

写像 \hat{T} は, 対合 \hat{h} と \hat{g} の積で記述できる.

$$\hat{h}(\hat{x}, \hat{y}) = (\hat{y}, \hat{x}), \quad (43)$$

$$\hat{g}(\hat{x}, \hat{y}) = \begin{cases} (\hat{y}/2, 2\hat{x}), & (0 \leq \hat{x} \leq 1/2) \\ (1 - \hat{y}/2, 2 - 2\hat{x}). & (1/2 < \hat{x} \leq 1) \end{cases} \quad (44)$$

記号平面での対称線を次に示す.

$$\hat{S}_h: \hat{y} = \hat{x}, \quad (45)$$

$$\hat{S}_g: \begin{cases} \hat{y} = 2\hat{x}, & (0 \leq \hat{x} \leq 1/2) \\ \hat{y} = 2 - 2\hat{x}. & (1/2 < \hat{x} \leq 1) \end{cases} \quad (46)$$

これらの対称線は全ての記号平面の図で描かれている.

コードの二進法への変換手続き A.1.

コードを $s_0 s_1 \dots s_{q-1}$ と書く. コードの偶奇性が偶ならば変換前のコードを $s_0 s_1 \dots s_{q-1}$ とし, 変換後は $t_0 t_1 \dots t_{q-1}$ とする. 奇ならば $s_0 s_1 \dots s_{q-1} s_0 s_1 \dots s_{q-1}$ を用意し, 添字が連続するように書き直し, 変換前のコードを $s_0 s_1 \dots s_{2q-1}$ とする. 変換後は $t_0 t_1 \dots t_{2q-1}$ とする. 変換前のコードに対して以下の手順を実行する.

$$[1] \quad t_0 = s_0.$$

$$[2] \quad 1 \leq k \leq q-1 \text{ または } 1 \leq k \leq 2q-1 \text{ の場合, } t_k \text{ を下記の規則に従って決める.}$$

$$(a) \quad s_0 \text{ から } s_{k-1} \text{ までの } 1 \text{ の個数が奇数の場合. } t_k = 1 - s_k.$$

$$(b) \quad s_0 \text{ から } s_{k-1} \text{ までの } 1 \text{ の個数が偶数の場合. } t_k = s_k.$$

$$[3]$$

$$\text{偶奇性が偶の場合: } X = (\sum_{k=0}^{q-1} t_k / 2^k) / (1 - 2^q).$$

$$\text{偶奇性が奇の場合: } X = (\sum_{k=0}^{2q-1} t_k / 2^k) / (1 - 2^{2q}).$$

最後に, 記号平面上で周期軌道を描く Mathematica® のプログラムを載せた.

```

(*Input code*)
s = { 0, 0, 1}; nn = Length[s];
(*Definition of function*)
F[s_] := Module[{m, parity, xx, xxnew}, m = Length[s];
  parity = Mod[Sum[s[[j]], {j, 1, m}], 2];
  If[parity == 1, {m = 2 m,
    xx = xxnew = Flatten[Append[s, s]]}, {xx = xxnew = s}];
  Do[If[xx[[j]] == 1, {Do[If[xxnew[[j + i]] == 1,
    {xxnew = ReplacePart[xxnew, j + i -> 0]},
    {xxnew = ReplacePart[xxnew, j + i -> 1]}],
    {i, 1, m - j}]}, {j, 1, m - 1}];
  Sum[xxnew[[k]]/2^k, {k, 1, m}]/(1 - 1/2^m)];
(*Orbital points*)
tx[1] = F[s]; ty[1] = F[Reverse[s]];
Do[If[tx[k] < 1/2, {tx[k + 1] = 2 tx[k],
  ty[k + 1] = ty[k]/2}, {tx[k + 1] = 2 - 2 tx[k],
  ty[k + 1] = 1 - ty[k]/2}], {k, 1, nn}];
pp1 = Table[{tx[k], 1 - ty[k]}, {k, 1, nn}]; Print[pp1];
figp = ListPlot[pp1, PlotStyle -> {Black, PointSize[0.02]}, AspectRatio -> 1,
  DisplayFunction -> Identity];
Show[figp, Graphics[{Circle[{0, 1}, 0.01], Circle[{2/3, 1/3}, 0.01]}],
  Graphics[{AbsoluteThickness[1.5],
  Line[{{0, 1}, {1, 0}}], Line[{{0, 1}, {1/2, 0}}], Line[{{1, 1}, {1/2, 0}}],
  Line[{{0, 0}, {1, 0}}], Line[{{1, 0}, {1, 1}}], Line[{{1, 1}, {0, 1}}],
  Line[{{0, 1}, {0, 0}}], Line[{{0.6, 1.03}, {0.85, 1.03}}],
  Line[{{0.85, 1.03}, {0.825, 1.03 + 0.01}}],
  Line[{{0.85, 1.03}, {0.825, 1.03 - 0.01}}],
  Line[{{-0.03, 0.4}, {-0.03, 0.15}}], Line[{{-0.03, 0.15}, {-0.02, 0.175}}],
  Line[{{-0.03, 0.15}, {-0.04, 0.175}}]}], PlotRange -> All,
  Axes -> False, DisplayFunction -> $DisplayFunction]

```


Colaboratory で形の科学を楽しもう

- 第3回 ランダムウォーク：間違った情報は拡散する -

平田 隆幸

福井大学 大学院工学研究科 知能システム工学専攻

〒910-8507 福井市文京3丁目9-1

hirata@u-fukui.ac.jp

Let's Enjoy Science on Form by Colaboratoy

- Random Walk: Diffusion of Wrong Information under the Pandemic -

Takayuki Hirata

Department of Human & Artificial Intelligent Systems, Faculty of Engineering,
University of Fukui, 3-9-1 Bunkyo, Fukui 910-8507, Japan.

(2021年7月2日受付, 2021年7月2日受理)

1. はじめに

困ったことに誤った情報は、容易に拡散する。疫病のパンデミックが発生したときに付随しておこる危険なことの一つが、「誤った情報の流布」である。現在のコロナ禍においてもこのような現象の発生がおこっているのではないだろうか。例えば、「コロナウィルスは、某国の軍事施設で開発されたものである」、「コロナ禍は存在しない」、「コロナワクチンは陰謀である」、「コロナ感染予防には、うがい薬イソジンが有効である」等々、枚挙にいとまがない。一部に真実そうなところがあるのがミソで、人々が信じたいと思えることが含まれているほうが、流布しやすい。

さて、暗い話題が多いコロナ禍の下で、明るい話題として取り上げられることが多いのが、藤井聰太2冠(2021年7月1日時点)の活躍である。颯爽と現れた青年棋士が、強敵を打ち負かし、古い記録を次々と打ち破っていく様は、気持ちを明るくしてくれる。また一方同時に、ベテラン棋士が、藤井聰太を打ち負かすと、大きく注目され、ファンから持ち上げられる。一例として最近では、深浦9段が王座戦の本戦で藤井聰太2冠を下し、「将棋星人の侵略から地球を守った」、「地球代表は深浦9段」とネットのニュースで取り上げられた。

これは、『人間離れするほど強すぎる藤井聰太は「将棋星人」である。』という前提が背景にある。詳しくは、30年ほど前に、羽生善治9段が「将棋星人」と言われたのが始まりである。鳥山明の「ドラゴンボール」がブームなっており、サイヤ人が地球に侵略にきて、主人公の孫悟空（地球育ちのサイヤ人）たちが地球を守るという展開のときであった。地球代表として、地球の未来を託したのは、サイヤ人の孫悟空であって、人間としては最強のクリリンではなかった。当時、羽生9段があまりにも強すぎるので、実は悟空のように将棋星から送り込まれた「将棋星人」であるという、ファンの妄想である。そこでは、「もし、将棋星人が地球を侵略にきて、地球代表と戦って、地球側が負けたら、侵略される。

そのときの地球側の代表として運命を託すのは、「将棋星人」の羽生だろう。深浦は地球人最強であるが、地球代表は深浦ではないだろう。」という、話であった。もし将棋星人が侵略してきたら、「地球代表は、将棋星人である、過去は羽生9段であり、今は藤井聰太2冠であり、深浦9段ではないはずである。」しかし、情報が伝わっていくうちに、変容してしまい、地球代表 深浦9段と色紙に書いてくれと頼まれるようになってしまった。深浦=クリリンの立ち位置は、人間代表であるが、地球代表ではない。念の為、「地球の存亡は、クリリンではなく、悟空に託したいだろう。」というネット上のネタ話であった。

拡散現象をミクロな視点からみたモデルとしてのブラウン運動[1]に関しても、よく似た逸話が存在する[2]。ブラウン運動も、ブラウンが顕微鏡で、花粉を観察していて花粉の動きから発見したと伝えられてきた。しかし正確には、花粉ではなく花粉から放出された粒子の動きから発見したのである。日本でも、顕微鏡で花粉の動きを観測すると、ブラウン運動を観測できると紹介されてきた。生物由来の花粉が熱ゆらぎとして、あたかも生物のように動くというのがポイントで、チョークの粉などでは面白くない。それゆえ、「花粉がブラウン運動するのは、花粉が生物であるからではなく、熱揺らぎによるものである。」というのを強調したいがため、物理学者は「ブラウン運動の粒子の例として、花粉を用いたがる」のではないだろうか？というのが、著者の推測である。

今回の講座では、ブラウン運動を取り上げ、拡散する粒子のシミュレーション実験を試みる。ここでは、Colaboratory で Python を使いランダムウォーク（醉歩）のシミュレーションを試みる。

2. Python でランダムウォーク

2.1. 拡散方程式とランダムウォーク

ランダムウォークのシミュレーションをおこなう前に、拡散方程式をみておこう。単純化するため、拡散係数は、空間や時間によらず一定であるとする。拡散方程式は、

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = D \nabla^2 \phi$$

という線形の偏微分方程式になる。ここで、 ϕ は拡散物質の密度、 t は時間、 ∇ （ナブラ）は空間微分作用素、 D は拡散係数である。なお、拡散方程式を微視的に粒子の視点からみると、ランダムウォークに対応する。

2.2. 正規乱数

復習とランダムウォークの準備として、第1回講座[3]でも紹介した Colaboratory へようこそ[4]で示されているサンプル「データサイエンス」の乱数を見ていく。

2.2.1. 亂数を準備する

ブラウザを使って、Colaboratory の HP にアクセスして、データサイエンスのところに行ってみよう。同時に、matplotlib[5]のサンプルプログラムを参考にする。サンプルプログラムを少し変えて、乱数の性質をみていこう。まず、正規分布（平均 0, 分散（標準偏差） σ^2 ）を生成する。

差) 1) に従う正規乱数を 200 個生成してみよう。

プログラムリスト 1

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt

np.random.seed(19680801)
number_of_data = 200
data = np.random.randn(1,number_of_data)
x = [x for x in range(number_of_data)]

fig, axs = plt.subplots(1, 2, figsize=(11, 5))
axs[0].plot(x, data[0])
axs[1].hist(data[0])

plt.show()
```

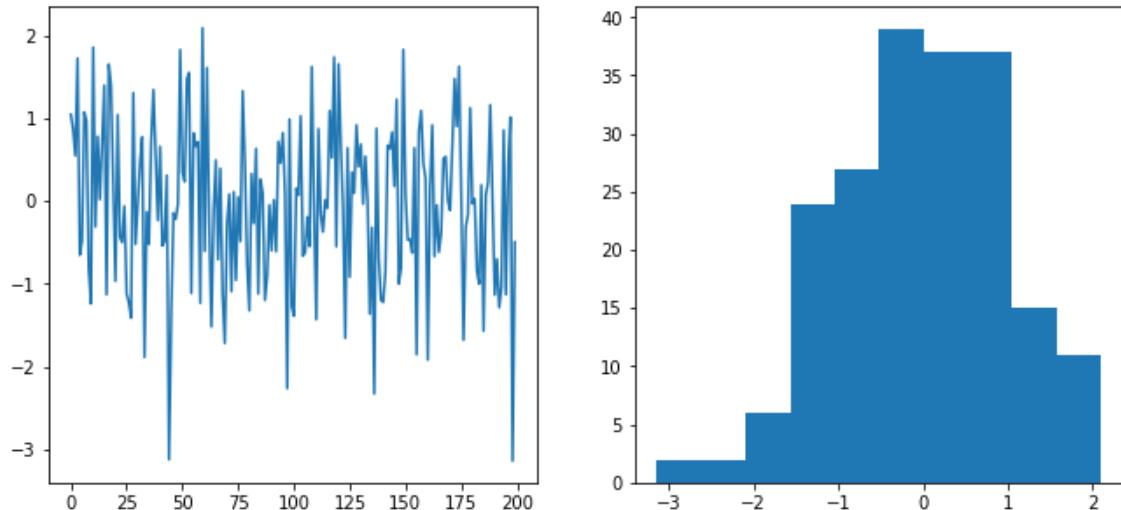


図 1：乱数の時系列と頻度分布。

図 1 の頻度分布を見ると、正規分布に見えないかもしれない。発生させる乱数の個数 number_of_data = 200 を変えて、number_of_data = 20000 として、乱数が正規分布に従っているか確かめてみよう。発生する個数を増やすと、正規分布にしたがう乱数になっているのが明確になる。bin の個数を増やすと、より明確に正規分布になっているのが分かる。

プログラムリスト 2

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt
```

```

np.random.seed(19680801)
number_of_data = 1000000
number_of_bins = 100
data = np.random.randn(1,number_of_data)
x = [x for x in range(number_of_data)]

fig, axs = plt.subplots()
axs.hist(data[0],number_of_bins)

plt.show()

```

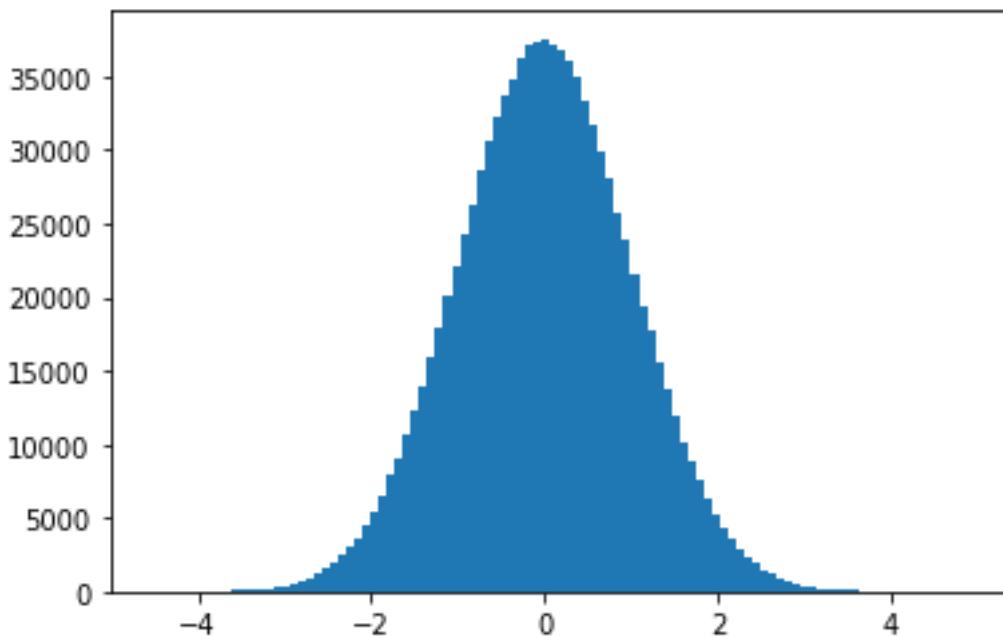


図 2：乱数を 1000000 個発生させて正規分布になるのを見よう。bin の個数は 100 である。

次に、生成した正規乱数列を使って、ランダムウォークをおこなう。

2.3. ランダムウォーク

2.3.1. 1 次元のランダムウォーク

1 次元のランダムウォーク（醉歩）から見ていこう。モデルを簡略化して考えるため、時間ステップを離散値 Δt とする。なお、移動距離は連続値 Δx として、時間ステップ Δt 毎に、 Δx だけ左右に移動するとする。ここで、 Δx は、前章で示した正規乱数を用いる。1 次元のランダムウォークのシミュレーション（プログラムリスト 3）を図 4 に示す。なお、グラフなどの描画には、matplotlib を使用する [5]。

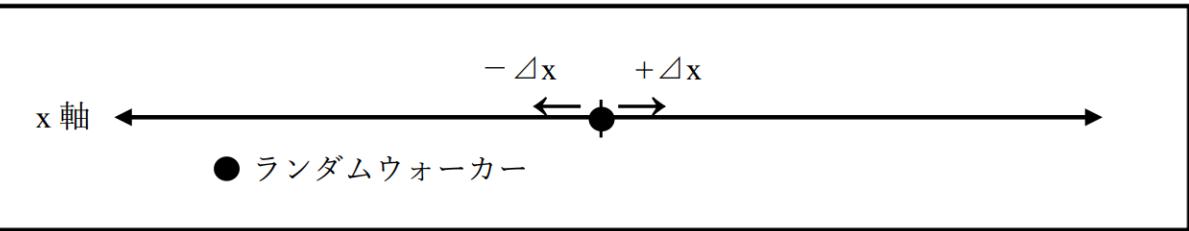


図 3: 1 次元のランダムウォーク。

プログラムリスト 3

```

import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt

np.random.seed(20210601) # 亂数の種を設定
number_of_data = 100000
number_of_bins = 50
noise = np.random.randn(1,number_of_data)
x = [x for x in range(number_of_data)]

position = noise.tolist() # numpy 配列を Python の配列に変換
position[0][0] = 0 # 初期位置を 0 にする

def randomwalk():
    for i in range(number_of_data - 1):
        position[0][i + 1] = position[0][i] + noise[0][i]
    return

randomwalk()

fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(x, position[0])
ax.grid()
ax.set_xlabel('Steps')
ax.set_ylabel('Position')
ax.set_title('1D Random Walk')

plt.show()

```

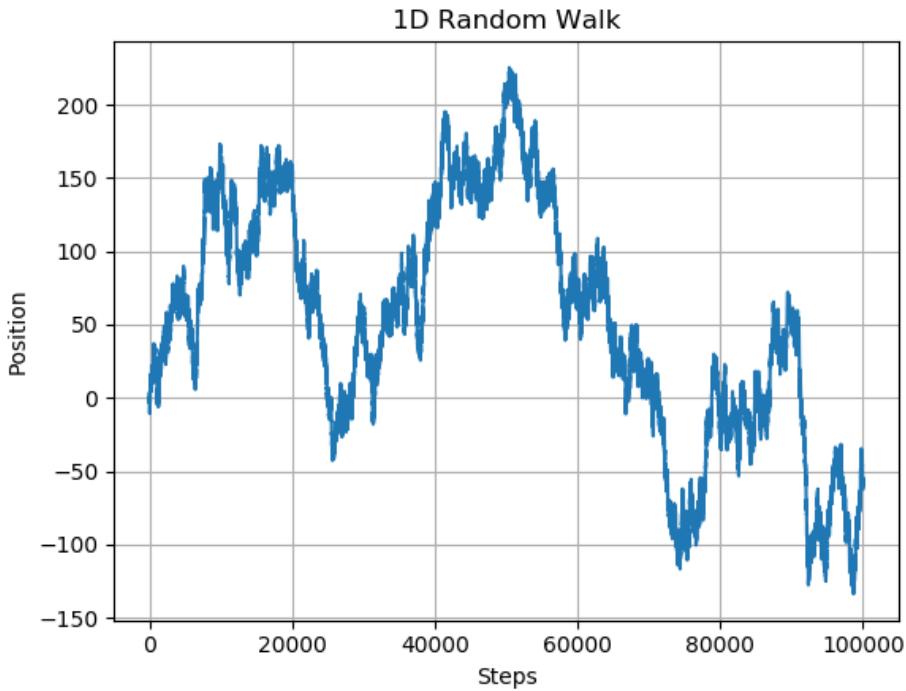


図 4 : 1 次元のランダムウォーク。時間ステップに対して x 軸上の位置をプロット。

2.3.2. 2 次元のランダムウォーク

次に、2 次元のランダムウォーク（プログラムリスト 4）を見てみよう。シミュレーション結果を図 5 に示す。

プログラムリスト 4

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt

np.random.seed(20210601)
number_of_data = 1000
number_of_bins = 30
noise = np.random.randn(2,number_of_data)    # 2 つの正規乱数

t = [t for t in range(number_of_data)]    # t は時間の変数

position = noise.tolist() # numpy 配列を Python の配列に変換
position[0][0] = 0        # 初期位置 x を 0 にする
position[1][0] = 0        # 初期位置 y を 0 にする

def randomwalk():
    for i in range(number_of_data - 1):
```

```

        position[0][i + 1] = position[0][i] + noise[0][i]
        position[1][i + 1] = position[1][i] + noise[1][i]
    return

randomwalk()

fig, ax = plt.subplots(1,3,figsize=(16,5))
ax[0].plot(t, position[0])
ax[0].grid()
ax[1].plot(t, position[1])
ax[1].grid()
ax[2].plot(position[0], position[1])
ax[2].grid()

ax[0].set_xlabel('Steps')
ax[1].set_xlabel('Steps')
ax[0].set_title('x Position')
ax[1].set_title('y Position')
ax[2].set_title('Trajectory of the Random Walker in 2-D')

plt.show()

```

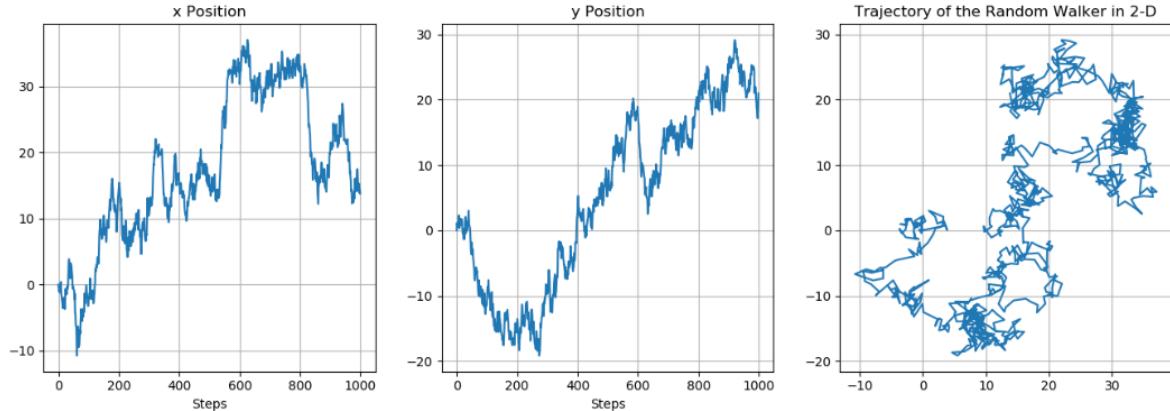


図 5: 2 次元のランダムウォーク。左は x vs. time プロット、中央は y vs. time プロット、右はランダムウォーカーの 2 次元平面上の軌跡。

2.4. 経過時間とランダムウォーカーの到達距離

2.4.1. 2 次元平面でのシミュレーション

ランダムウォークの経過時間と到達距離を調べる。時刻 0 で、座標の原点から出発させて、時間経過に対して、原点からの距離を調べた。2 次元座標でのシミュレーション結果

を図 6 に示す。図の左がランダムウォーカーの軌跡、中央に原点からの距離、右に原点からの最遠到達距離をプロットしたものを示す。

プログラムリスト 5

```
import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt

np.random.seed(20210601)
number_of_steps = 10000
reachdistance = 0    # 最高到達距離

noise = np.random.randn(2,number_of_steps)    # 2つの正規乱数
t = [t for t in range(number_of_steps)]    # t は時間の変数

position = noise.tolist() # Walker の位置を Numpy 配列から Python の配列に変換
position[0][0] = 0        # 初期位置 x を 0 にする
position[1][0] = 0        # 初期位置 y を 0 にする
distance = [0]            # 原点からの距離時系列の配列
maxreach = [0]            # 最遠到達距離の時系列の配列

def randomwalk():
    reach = 0
    for i in range(number_of_steps - 1):
        position[0][i + 1] = position[0][i] + noise[0][i]
        position[1][i + 1] = position[1][i] + noise[1][i]

        rr = reachd(position[0][i+1], position[1][i+1])
        if rr >= reach :
            reach = rr

        distance.append(rr)
        maxreach.append(reach)

    return

def reachd(xp, yp):
    r = np.sqrt(xp*xp + yp*yp)
    return(r)

randomwalk()

fig, ax = plt.subplots(1,3,figsize=(16,5))
```

```

ax[0].plot(position[0], position[1])
ax[0].grid()
ax[1].plot(t,distance)
ax[2].plot(t,maxreach)
ax[0].set_xlabel('x position')
ax[0].set_ylabel('y position')
ax[1].set_xlabel('Steps')
ax[2].set_xlabel('Steps')
ax[0].set_title('Trajectory of the Random Walker in 2-D')
ax[1].set_title('Timeseries of Distance of Walker')
ax[2].set_title('Timeseries of Max Reach Distance')

plt.show()

```

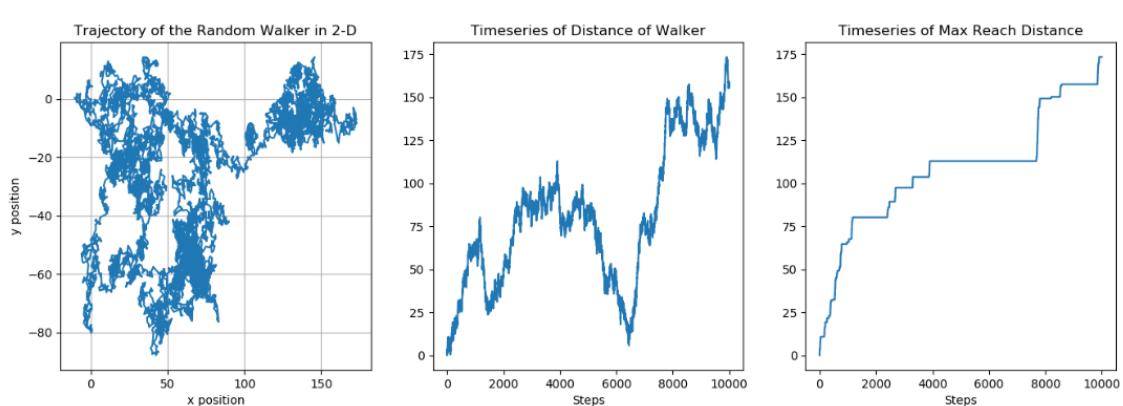


図 6：2 次元のランダムウォーカーのシミュレーション。左は 2 次元軌道、中央は原点から測った距離の時系列、右は最遠到達距離の時系列。

図 6 から、拡散方程式とランダムウォーカーの関係、ランダムウォーカーの最遠到達距離 r は、時間 t に対して $r \propto t^{0.5}$ であることを、シミュレーションで実感できるではないだろうか。複数個のランダムウォーカーを使ったシミュレーションをおこなうと、一層明確に確かめることができるので挑戦してみてほしい。

2.4.2. ランダムウォーカーの位置分布の時間変化

複数個のランダムウォーカーを原点から出発させ、時間経過とともに、ランダムウォーカーの原点からの距離分布を調べた。ここでは、1 次元のランダムウォーカーのシミュレーション結果を示す。

プログラムリスト 6

```

import numpy as np
from matplotlib import pyplot as plt

np.random.seed(20210601)

```

```

number_of_steps = 8000 # 最長の時間ステップ
nwalker = 1000          # ランダムウォーカーの個数

# 正規乱数の個数=時間ステップ×nwalker の個数
noise = np.random.randn(number_of_steps, nwalker)
position = noise.tolist() # Walker の位置を Numpy 配列から Python の配列に変換

def randomwalk():
    for i in range(number_of_steps - 1):
        for j in range(nwalker):
            position[i + 1][j] = position[i][j] + noise[i][j]
    return

for i in range(nwalker):
    position[0][i] = 0 # 初期値を 0 にする

randomwalk()

range1 = (-100,100)
number_of_bins = 30

fig, ax = plt.subplots(1,5,figsize=(16,5))
ax[2].set_title('Histograms of the Position of Walker in 1-D')
for i in range(5):
    ax[i].set_ylim([-1,1100])

for i in range(4):
    ax[i].hist(position[20**i - 1],bins=number_of_bins,range=range1)
    ax[4].hist(position[20**i - 1],
               bins=number_of_bins,histtype='step',stacked=True,fill=False,range=range1)

plt.show()

```

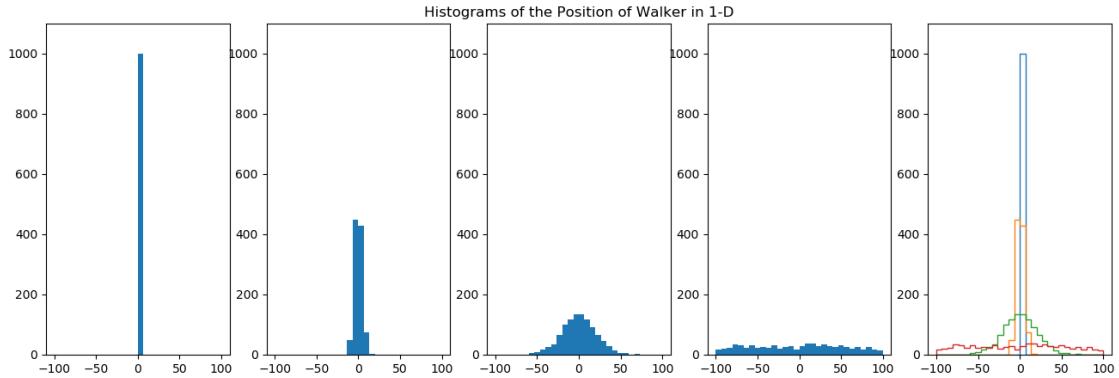


図 7：頻度分布の変遷。

ランダムウォーカーの位置の分布は、正規分布 ($N(\mu, \sigma^2)$) に従う。時間経過とともに、正規分布の平均 $\mu = 0$ はかわらず、分散 σ^2 が大きくなっていく。その結果、充分に時間が経過すると、ランダムウォーカーが空間に一様に分布し、一様分布に近似できるようになる。

Colaboratory で Python とライブラリ matplotlib を使うと、ブラウン運動と拡散方程式の本に使用できる図（例えば、米沢富美子の本の表紙）が簡単なプログラムで作れる。matplotlib.org の Gallery には、面白いサンプルプログラムが多くある[5]。（Animation のカテゴリーに、2重振り子などの動画もある。）Gallery の URL を以下に記しておく。

<https://matplotlib.org/stable/gallery/index.html>

プログラムの書き換えに挑戦することを通して、Python のプログラミングにも慣れるだろうことが期待される。焦らずに、いろいろと試して楽しんでほしい。

さて、Python のライブラリ matplotlib を使うことにより、簡単にグラフを作れるのをみてきた。このようなライブラリが充実しているのも Python の特徴のひとつであり、便利なライブラリを見つけるのも Python プログラミングの楽しみである。Python は、学びやすいプログラミング言語であり（例えば、参考書[6]を参照）、さらに Colaboratory を使うことにより、すぐにプログラミングを始められる。ぜひ、スマートフォンなどを使い手軽にプログラミングを楽しんで頂けたらと思う。また、プログラムは形の科学会の HP から download できるようにする予定である。

【(注) 作成した図は本来カラーであり、白黒で印刷すると見にくい場合があります。】

謝辞

原稿を読んで有益なコメントをしてくださった高田宗樹教授をはじめとする福井大学大学院工学研究科知能システム工学専攻非線形科学研究室のメンバーに感謝いたします。

参考文献

- [1] 米沢富美子：ブラウン運動 物理学 One Point 27 卷、共立出版、pp. 160(1986). ブラウン運動に関して、シミュレーション結果を示しながら、物理学を専門としない方にも分かりやすい参考書

- [2] ブラウン運動にまつわる誤解 ja.wikipedia.org/wiki/ブラウン運動にまつわる誤解
- [3] 平田隆幸：Colaboratory で形の科学を楽しもう—コッホ曲線を描いてみよう—、形の科学会誌、35巻、1号、75-80、(2020)
- [4] Google Colaboratory <https://colab.research.google.com/notebooks/intro.ipynb#>
- [5] matplotlib.org <https://matplotlib.org>
- [6] クジラ飛行机：ゼロからやさしくはじめる Python 入門、マイナビ出版、pp.255、(2018)

講座に掲載されたプログラムは、形の科学会の HP の以下からダウンロードできます。
<https://katachi-jp.com/journal36>
カット & ペーストで Colaboratory のコードセルに貼り付けて、走らせてみてください。