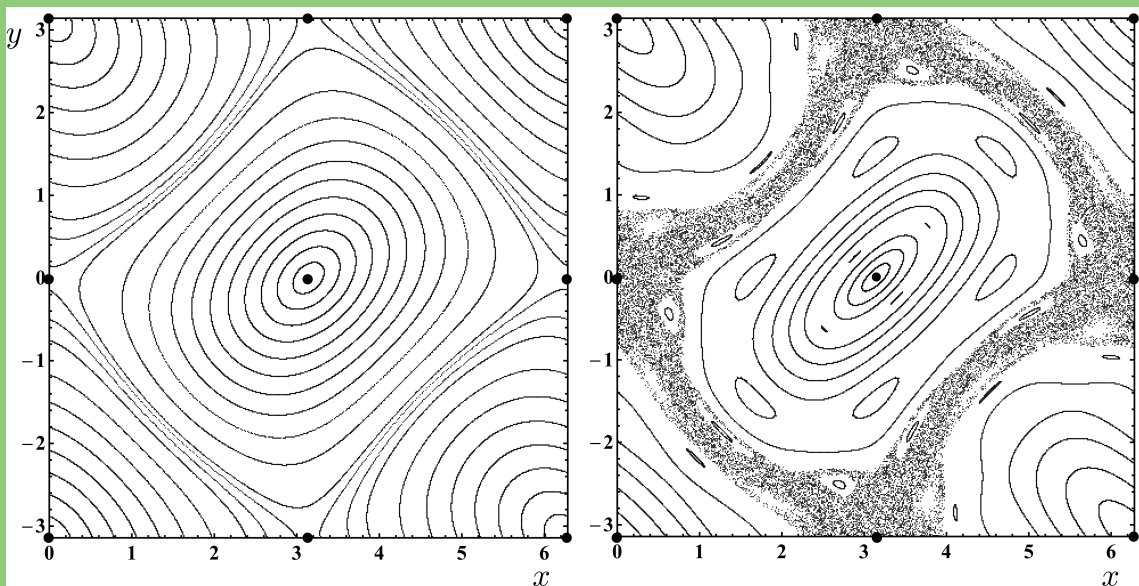




形の科学会誌

第 35 卷 第 1 号 2020

Bulletin of the Society for Science on Form



形の科学会

<https://katachi-jp.com/>

目 次

【論文】

四重可逆面積保存写像における四重対称周期軌道

山口 喜博 1

【論文】

標準写像における異常回転分岐

山口 喜博 35

【論文】

Python を始めて 10 日でゲームを作れるようになるのか？

- 61 歳からの挑戦：0 から始める Python Programming -

平田 隆幸 55

【連載講座】

Colaboratory で形の科学を楽しもう

- 第 1 回 コッホ曲線を描いてみよう -

平田 隆幸 75

【会告など】

会告 81

原稿募集 86

四重可逆面積保存写像における四重対称周期軌道

山口喜博

〒290-0073 千葉県市原市国分寺台中央 2-4-14

chaosfractal@iCloud.com

Quadruply symmetric periodic orbits
in the quadruply reversible area-preserving map

Yoshihiro Yamaguchi

2-4-14 Kokubunjidai-Chuo, Ichihara, Chiba 290-0073, Japan

(2020 年 7 月 23 日受付, 2020 年 9 月 15 日受理)

Abstract: The Harper map is a typical example of the quadruply reversible area-preserving maps defined on torus. In this map, there exist the singly symmetric periodic orbits, the doubly symmetric orbits (DSPOs) and the quadruply symmetric periodic orbits (QSPOs). The period q of QSPO is an even number, but not a multiple of four. In order to characterize QSPOs, the map T^q is separated into the three operations; the left-involution, the identity map and the right-involution. Using the left-involution and the right-involution, we can derive the condition that QSPO exists. The identity map also gives the same condition for the existence of QSPO. The stability coefficient $r(a)$ to determine the property of the elliptic periodic orbit is introduced. We obtain that $r(a)$ as a function of a for DSPO has a U-shaped structure and $r(a)$ for QSPO has a W-shaped structure. Let I be the rotation number interval that the elliptic periodic orbit undergoes the rotation bifurcation. The interval I is determined as follows : $I = (0,1)$ for DSPO and $I = (0,2)$ of QSPO.

Keywords: Harper map, Quadruply symmetric periodic orbit, Involution representation, Stability coefficient, Bifurcation

1. 本論文の目的

参考文献[1]において, 筆者は標準写像に存在する二重対称周期軌道の性質を議論した. 二重対称周期軌道の特徴付ける新しい対合表現を導入し, 新しい対合表現の代数構造と幾何学的な意味を明らかにした. 次に, 楕円型二重対称周期軌道が通常の周期倍分岐を起こさず回転分岐を起こすという新しい分岐現象を見出し, 分岐の性質を解明した. 対合表現の拡張を行い, 対称性そのものが周期軌道の分岐現象を制限していることを示した.

2004 年に筆者等はハーパー写像 (Harper map)[2]の対称周期軌道の分類に関する報告を行った[3]. しかし, 対称周期軌道の性質の検討は行わなかった. ハーパー写像には, 標準写像で存在する二重対称周期軌道より更に対称性の高い四重対称周期軌道が存在する. 対称性が高くなったことが分岐現象にどのような影響をもたらすのだろうか. 標準写像の二重対称

周期軌道の性質より更に興味深い性質が ハーパー写像の対称周期軌道で見つかるのではないかと期待される. 写像は異なるが本論文の内容は参考文献[1]の続きである.

本論文で扱うトーラス面 ($0 \leq x < 2\pi$, $0 \leq y < 2\pi$)で定義された可逆面積保存方向保存ハーパー写像 T を紹介する.

$$T : y_{n+1} = y_n + f(x_n) \pmod{2\pi}, \quad x_{n+1} = x_n + f(y_{n+1}) \pmod{2\pi}. \quad (1)$$

ここで, $f(x) = a \sin x$ ならびに $f(y) = a \sin y$. ただし, $a \geq 0$. 筆者は, ハーパー写像の可逆性に関心がある. そのため, 使用する写像 T としてハーパー写像の中でも最も対称性がよい上記の形式を利用する. パラメータが a だけであることより現象の理解がしやすい.

$P_{00} = (0,0)$ と $P_{11} = (\pi, \pi)$ がサドル型不動点で, $Q_{10} = (\pi, 0)$ と $Q_{01} = (0, \pi)$ が楕円型不動点である. これらは $0 < a < 2$ では楕円型で, $a > 2$ では反転を伴うサドル型である. 楕円型不動点は $a = 2$ で周期倍分岐を起こす. トーラス面における軌道を図 1 に描いた. 周期軌道と対称線を見やすく表示するために, トーラス面を $0 \leq x \leq 2\pi$, $-\pi \leq y \leq \pi$ とした.

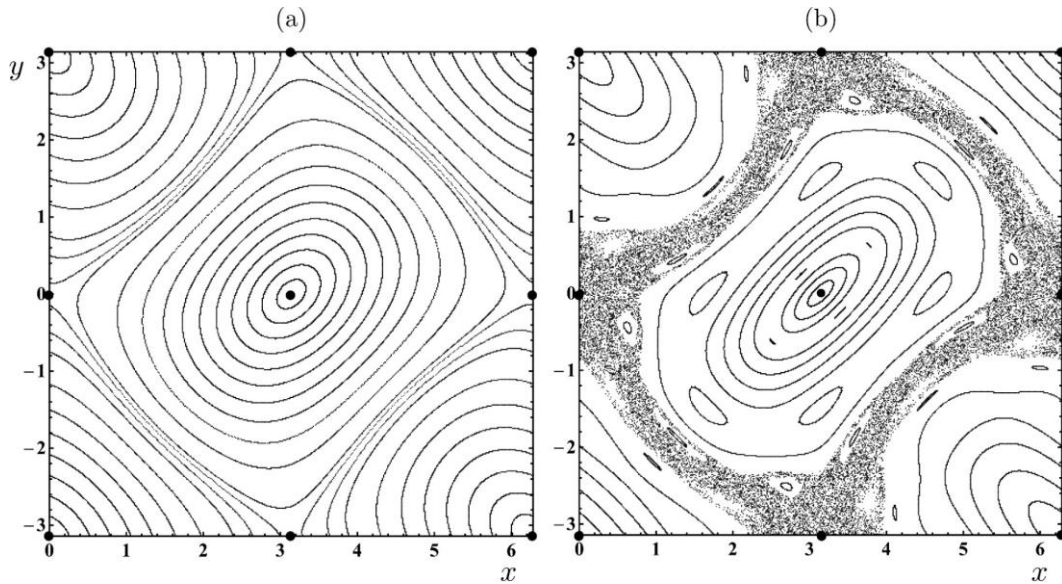


図 1 : トーラス面 ($0 \leq x \leq 2\pi$, $-\pi \leq y \leq \pi$) における軌道. (a) $a = 0.75$. (b) $a = 1.5$.

写像 T は以下のように四種の対合表現で記述される. 対合による分解を $T = H_i \circ G_i$ ($i = 1, 2, 3, 4$) と書く. ここで \circ は写像の合成記号である. 記号の右側の G_i を作用し, 次に左側の H_i を次に作用する.

$$H_1 \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -x + f(y) \end{pmatrix}, \quad G_1 \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + f(x) \\ -x \end{pmatrix}. \quad (2)$$

$$H_2 \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x - f(y) \end{pmatrix}, \quad G_2 \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y - f(x) \\ x \end{pmatrix}. \quad (3)$$

$$H_3 \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + \pi \\ -y + \pi \end{pmatrix}, \quad G_3 \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x - f(y + f(x)) + \pi \\ -y - f(x) + \pi \end{pmatrix}. \quad (4)$$

$$H_4 \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \pi \\ y + \pi \end{pmatrix}, \quad G_4 \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + f(y + f(x)) - \pi \\ y + f(x) + \pi \end{pmatrix}. \quad (5)$$

ここで, $G_i \circ G_i = H_i \circ H_i = Id.$ 対合は面積保存であるが方向反転写像である. 写像 T では変数 y と変数 x に $\pmod{2\pi}$ を作用する. そのため対合の表現で $+\pi$ を $-\pi$ とし, $-\pi$ を $+\pi$ と置き換えてもよい.

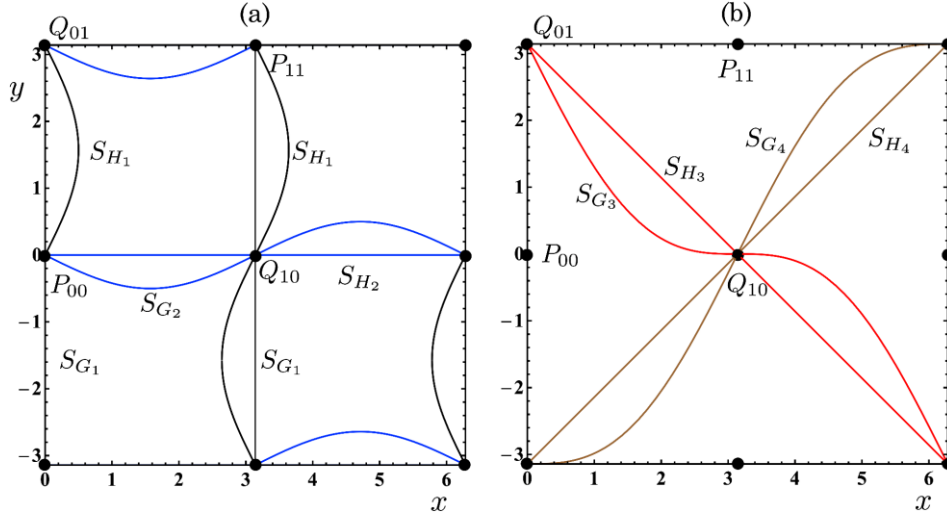


図 2：トーラス面 ($0 \leq x \leq 2\pi$, $-\pi \leq y \leq \pi$)における，左右上下の対称線 (図(a))と斜め左右上下の対称線 (図(b)). $a = 1$.

対合の不動点の集合が対称線である．対合による周期軌道点の動きは対称線に関する反転である．よって対合による周期軌道点の動きより， S_{H_1} と S_{G_1} を左右の対称線と呼び， S_{H_2} と S_{G_2} を上下の対称線と呼ぶ．便宜的に S_{H_3} と S_{G_3} を斜め左右の対称線と呼び， S_{H_4} と S_{G_4} を斜め上下の対称線と呼ぶ．これらの対称線を以下に示した．また，対称線を図 2 に描いたので参考にしたい．

左右の対称線．

$$S_{H_1}: x = f(y)/2, x = f(y)/2 + \pi, \quad (6)$$

$$S_{G_1}: x = 0, x = \pi. \quad (7)$$

上下の対称線．

$$S_{H_2}: S_{H_2}: y = 0, y = \pi, \quad (8)$$

$$S_{G_2}: y = -f(x)/2, y = -f(x)/2 + \pi. \quad (9)$$

斜め左右の対称線．

$$S_{H_3}: y = -x + \pi, \quad (10)$$

$$S_{G_3}: y = -x - f(x) + \pi. \quad (11)$$

斜め上下の対称線．

$$S_{H_4}: y = x - \pi, \quad (12)$$

$$S_{G_4}: y = x - f(x) - \pi. \quad (13)$$

写像が対合の積で表現される場合，系はバーコフの意味での可逆性をもつという[4]．上記のように四種類の異なった対合の積で表現される写像は，四重可逆写像と呼ばれる．四重可逆写像には，一重対称周期軌道，二重対称周期軌道，四重対称周期軌道が存在する．対称線を利用してこれらの対称周期軌道を定義する．

定義 1.1.

[i] 対称周期軌道と非対称周期軌道．

対称線上に軌道点をもつ軌道を対称軌道という。対称軌道が対称線上に偶数個の軌道点をもつならば、この軌道は対称周期軌道と呼ばれる。本論文では不動点は対称周期軌道に含めず、不動点として扱う。対称線上に軌道点を持たない周期軌道を非対称周期軌道と定義する。

[ii] 一重対称周期軌道。

上下の対称線のみ軌道点をもつ周期軌道を、一重上下対称周期軌道と定義する。左右の対称線のみ軌道点をもつ周期軌道を、一重左右対称周期軌道と定義する。斜め上下の対称線のみ軌道点をもつ周期軌道を、一重斜め上下対称周期軌道と定義する。斜め左右の対称線のみ軌道点をもつ周期軌道を、一重斜め左右対称周期軌道と定義する。これらをまとめて一重対称周期軌道と呼ぶ。

[iii] 二重対称周期軌道。

上下と左右の対称線上に軌道点をもつ周期軌道を、二重上下左右対称周期軌道と定義する。斜め上下と斜め左右の対称線上に軌道点をもつ周期軌道を、二重斜め上下左右対称周期軌道と定義する。これらをまとめて二重対称周期軌道と呼ぶ。

[iv] 四重対称周期軌道。

上下と左右の対称線上に軌道点をもち、かつ斜め上下と斜め左右の対称線上に軌道点をもつ周期軌道を、四重対称周期軌道と定義する。

ここで対称周期軌道について補足を述べておく。一重対称周期軌道は対称線上に二つ軌道点をもつ。二点が一点になった場合が不動点である。二重対称周期軌道は二つの場合がある。左右の対称線上に二つ軌道点をもち、かつ上下の対称線上に二つ軌道点をもつ場合と、斜め左右の対称線上に二つ軌道点をもち、かつ斜め上下の対称線上に二つ軌道点をもつ場合である。四点が一点になった場合が不動点である。最後に四重対称周期軌道は上下左右の対称線上に四つ軌道点をもち、かつ斜め上下左右の対称線上に四つ軌道点を持つ。八点が一点になった場合が不動点である。

本論文で議論する問題を紹介する。

問題 1.2.

- (1) 四重対称周期軌道の特徴付ける対合表現は何か。
- (2) 楕円型四重対称周期軌道は、どのような分岐を順次起こすのか。

本論文の第 2 節以後の内容を示す。

第 2 節では、本論文で使用する記号と概念を紹介する。

第 3 節では、一重対称周期軌道と二重対称周期軌道に関する性質をまとめる。

第 4 節では、四重対称周期軌道の特徴付ける対合表現の代数構造を議論する。

第 5 節では、楕円型四重対称周期軌道の分岐構造を調べる。

第 6 節では、本論文で得られた分岐に関する解釈を与える。

第 7 節では、本論文で得られた結果をまとめる。

2. 準備

2.1. 周期軌道の安定性

周期軌道の安定性を判断する方法を紹介する．ここで $q (\geq 1)$ を周期軌道の周期とする．周期 q の周期軌道点を $z_k = (x_k, y_k) (0 \leq k \leq q-1)$ とする．軌道点 z_k における線形化行列 $M(z_k)$ は

$$M(z_k) = \begin{pmatrix} 1 & f'(x_k) \\ f'(y_{k+1}) & 1 + f'(x_k)f'(y_{k+1}) \end{pmatrix} \quad (14)$$

と得られる．ここで， $f'(x_k) = a \cos x_k$ ， $f'(y_{k+1}) = a \cos y_{k+1}$ ．面積保存写像であるから， $M(z_k)$ の行列式は 1 である．写像 $T^q (q \geq 1)$ の線形化行列を $M_q = M(z_{q-1})M(z_{q-2}) \cdots M(z_0)$ とすると，固有値 λ を決定する方程式

$$\lambda^2 - r(a)\lambda + 1 = 0 \quad (15)$$

が得られる．ここで， $r(a) = \text{Trace} M_q$ ．係数 $r(a)$ を安定性係数と名付ける．

式(15)の解である固有値を λ_{\pm} と書く．安定性係数 $r(a)$ を利用して 周期 q の周期軌道の安定性を定める．判別式は $D = r^2(a) - 4$ である． $r(a) > 2$ ならば，固有値は $0 < \lambda_- < 1 < \lambda_+$ を満たす．周期 q の周期軌道点はサドル型で不安定である． $|r(a)| < 2$ ならば，固有値 λ_{\pm} は複素共役である．よって，周期 q の周期軌道点は楕円型で安定である． $r(a) < -2$ ならば，固有値は $\lambda_- < -1 < \lambda_+ < 0$ を満たす．周期 q の周期軌道点は反転を伴うサドル型で不安定である．周期倍周期分岐（反周期倍周期分岐）の分岐点では $r(a) = -2$ が成り立ち，固有値は $\lambda_{\pm} = -1$ である．同周期分岐（反同周期分岐）の分岐点では $r(a) = 2$ が成り立ち，固有値は $\lambda_{\pm} = 1$ である．ここで述べた分岐の詳細は参考文献[5]を見られたい．

2.2. 回転分岐と周期倍分岐

楕円型不動点として Q_{10} を利用して回転分岐等の説明を行う．パラメータ a を 0 から増加すると，楕円型不動点 Q_{10} 近傍における軌道点の回転の仕方が速くなる．回転の方向は時計回りである．この回転の仕方の指標として，既約分数である回転数 p/q を導入する．ここで q は周期．周期軌道が 1 周期の間に Q_{10} の周りを回転する回数が p である．回転数 p/q は一回の写像で軌道が平均角度 $2\pi \times p/q$ だけ Q_{10} の周りを回転することを意味する．パラメータ a が

$$a_c(p/q) = 2 \sin(\pi p/q) \quad (0 < p/q \leq 1/2) \quad (16)$$

を満たすと，対称線上に軌道点を持つ回転数 p/q の周期軌道が Q_{10} より生じる． $0 < p/q < 1/2$ を満たす場合を回転分岐と呼び， $p/q = 1/2$ を満たす場合を周期倍分岐と呼ぶ．

式(16)を導く．不動点 Q_{10} の周りで線形解析を行うと，線形化行列 M_1 が下記のように得られる．

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ a & 1 - a^2 \end{pmatrix}. \quad (17)$$

二つの固有値 λ_{\pm} は， $0 < a < 2$ では複素数となる．

$$\lambda_{\pm} = \frac{(2 - a^2) \pm i\sqrt{4a^2 - a^4}}{2} \equiv \cos(2\pi p/q) \pm i \sin(2\pi p/q). \quad (18)$$

回転数 p/q を決めて式(18)を a について解けば 臨界値 $a_c(p/q)$ が求まる．ここで行なった計算を安定性係数 $r(a)$ を用いて再度行うと，回転数 p/q と安定性係数 $r(a)$ の関係が得られる．

$$r(a) = 2 \cos(2\pi p/q). \quad (19)$$

2.3. 傾きに関する写像

不動点 Q_{10} を通過する対称線を $y = F(x)$ と書く. $F(\pi) = 0$ であることを注意する. 不動点 Q_{10} における対称線の傾きを $\xi_0 = dF(\pi)/dx$ とする. 写像 T によって対称線の傾きが変化する. 傾きの変化は一次元写像

$$\xi_{n+1} = \frac{\xi_n - a}{a(\xi_n - a) + 1} \quad (20)$$

で決定される. ここで式(20)の導出方法を説明する. 写像 T を x_n で微分すると

$$\frac{dy_{n+1}}{dx_n} = \frac{dx_{n+1}}{dx_n} \frac{dy_{n+1}}{dx_{n+1}} = \frac{dy_n}{dx_n} + a \cos x_n, \quad (21)$$

$$\frac{dx_{n+1}}{dx_n} = 1 + a \cos y_{n+1} \frac{dy_{n+1}}{dx_n} = 1 + a \cos y_{n+1} \left(\frac{dy_n}{dx_n} + a \cos x_n \right) \quad (22)$$

が得られる. $x_n = \pi$, $y_{n+1} = 0$ として, 式(22)を式(21)に代入する. 傾き $\xi_n = dy_n/dx_n$ と $\xi_{n+1} = dy_{n+1}/dx_{n+1}$ を導入し, これらを用いると式(20)が導かれる.

2.4. ポアンカレ指数

ポアンカレ指数を定義し, ポアンカレ指数に関する定理を紹介する[5]. ポアンカレ指数は括弧で囲んで表現する.

定義 2.1 (ポアンカレ指数の定義).

写像 T^q ($q \geq 1$) における不動点 z のポアンカレ指数を以下のように定義する.

- (1) 不動点 z がサドル型周期軌道点なら, そのポアンカレ指数を (-1) とする
- (2) 不動点 z が楕円型周期軌道点なら, そのポアンカレ指数を $(+1)$ とする.
- (3) 不動点 z が反転型サドル周期軌道点なら, そのポアンカレ指数を $(+1)$ とする.

定理 2.2 (ポアンカレ指数の総和保存則). 分岐の前後でポアンカレ指数の総和は保存される.

2.5. 180 度回転作用

例として二つの対合の積 $H_1 H_2$ を計算すると

$$H_1 H_2 \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ -x \end{pmatrix} \quad (23)$$

が得られる. つまり, $H_1 H_2$ は 180 度回転作用を表現している. 式(23)は, $P_{00} = (0,0)$ を中心とした 180 度回転を意味している. この式の右辺の $-x$ を $-x + 2\pi$ とすれば, $Q_{10} = (\pi, 0)$ を中心とした 180 度回転を与える. 180 度回転作用 R の表式と性質をまとめ, 性質 2.3 とする.

性質 2.3.

- (1) 180 度回転作用 R は以下のように二つの対合の積で表現される.

$$R = H_1 H_2 = H_2 H_1 = H_3 H_4 = H_4 H_3 = G_1 G_2 = G_2 G_1 = G_3 G_4 = G_4 G_3. \quad (24)$$

- (2) 対称周期軌道の二つの軌道点 z_0 と z_k ($k \neq 0$) が同じ対称線上にあり, $z_k = R z_0$ を満たすとする. この対称周期軌道の周期 q は $q = 2k$ である. よって, 180 度回転作用 R は $R = T^{q/2}$ または $R = T^{-q/2}$ とかける.

3. 一重対称周期軌道と二重対称周期軌道

3.1. 一重対称周期軌道の対合表現

ハーバー写像における一重対称周期軌道の対合表現をまとめておく.

$$T^{2k} = T^{2k-1}H_i \circ G_i = H_i \circ G_i T^{2k-1}, \quad (25)$$

$$T^{2k+1} = T^{2k}H_i \circ G_i = H_i \circ G_i T^{2k}. \quad (26)$$

ここで, $i = 1, 2, 3, 4$. 式(25)の場合, 周期 q は $q = 2k$ ($k \geq 1$)であり, 式(26)の場合, 周期 q は $q = 2k + 1$ ($k \geq 1$)である. ハーバー写像には多くの一重対称周期軌道がある[3]. これらの性質についてはここでは議論しない.

例として $T^{2k} = T^{2k-1}H_i \circ G_i$ の表現で, $T^{2k-1}H_i$ を左対合, G_i を右対合と呼ぶ. 左対合と右対合について不変な集合を表1に示す. これらの不変集合は対称線と呼ばれる.

表1 : 対合と不変集合

対合	H_i	G_i	$T^{2k-1}H_i$	$G_i T^{2k-1}$	$T^{2k}H_i$	$G_i T^{2k}$
不変集合	S_{H_i}	S_{G_i}	$T^k S_{G_i}$	$T^{-k} S_{H_i}$	$T^k S_{H_i}$	$T^{-k} S_{G_i}$

例として $T^k S_{G_i}$ が左対合 $T^{2k-1}H_i$ について不変集合であることを確認しよう.

$$T^{2k-1}H_i \circ T^k S_{G_i} = T^{k-1}H_i S_{G_i} = T^{k-1}H_i G_i S_{G_i} = T^k S_{G_i}. \quad (27)$$

点 z_0 より出発する一重対称周期軌道 $O(z_0)$ が存在する場合, $RO(z_0) = O(Rz_0)$ も存在する.

3.2. 二重対称周期軌道の分類

参考文献[1]をもとに, ハーバー写像における二重対称周期軌道は八種類に分類される. 分類を表2として与える. 次に二重対称周期軌道の対合表現を表3に示す.¹

表2 : 二重対称周期軌道の分類

分類	対称線と軌道点	周期: q	条件
a	$H_1[z_0] \rightarrow H_2[z_k] \rightarrow H_1[z_{2k}]$	$4k$	$k \geq 1$
b	$H_1[z_0] \rightarrow G_2[z_k] \rightarrow H_1[z_{2k+1}]$	$4k + 2$	$k \geq 0$
c	$G_1[z_0] \rightarrow H_2[z_k] \rightarrow G_1[z_{2k-1}]$	$4k - 2$	$k \geq 2$
d	$G_1[z_0] \rightarrow G_2[z_k] \rightarrow G_1[z_{2k}]$	$4k$	$k \geq 1$
e	$H_3[z_0] \rightarrow H_4[z_k] \rightarrow H_3[z_{2k}]$	$4k$	$k \geq 1$
f	$H_3[z_0] \rightarrow G_4[z_k] \rightarrow H_3[z_{2k+1}]$	$4k + 2$	$k \geq 1$
g	$G_3[z_0] \rightarrow H_4[z_k] \rightarrow G_3[z_{2k-1}]$	$4k - 2$	$k \geq 2$
h	$G_3[z_0] \rightarrow G_4[z_k] \rightarrow G_3[z_{2k}]$	$4k$	$k \geq 1$

¹ ここでは参考文献[3]の内容を精密化した結果を掲載した. 後出の表4と表5においても同様である.

表 3 : 二重対称周期軌道の対合表現

分類	対合表現[左対合, 恒等写像, 右対合]	条件 1	条件 2
a	$T^{4k} = T^{2k}H_1 \circ G_1 T^{2k-1}H_2 \circ H_2$	$T^k S_{H_1} \cap S_{H_2} \neq \emptyset$	$T^k S_{H_2} \cap S_{H_1} \neq \emptyset$
b	$T^{4k+2} = T^{2k}H_1 \circ G_1 T^{2k}H_2 \circ G_2$	$T^k S_{H_1} \cap S_{G_2} \neq \emptyset$	$T^{k+1} S_{G_2} \cap S_{H_1} \neq \emptyset$
c	$T^{4k-2} = T^{2k-1}H_1 \circ G_1 T^{2k-2}H_2 \circ H_2$	$T^k S_{G_1} \cap S_{H_2} \neq \emptyset$	$T^{k-1} S_{H_2} \cap S_{G_1} \neq \emptyset$
d	$T^{4k} = T^{2k-1}H_1 \circ G_1 T^{2k-1}H_2 \circ G_2$	$T^k S_{G_1} \cap S_{G_2} \neq \emptyset$	$T^k S_{G_2} \cap S_{G_1} \neq \emptyset$
e	$T^{4k} = T^{2k}H_3 \circ G_3 T^{2k-1}H_4 \circ H_4$	$T^k S_{H_3} \cap S_{H_4} \neq \emptyset$	$T^k S_{H_4} \cap S_{H_3} \neq \emptyset$
f	$T^{4k+2} = T^{2k}H_3 \circ G_3 T^{2k}H_4 \circ G_4$	$T^k S_{H_3} \cap S_{G_4} \neq \emptyset$	$T^{k+1} S_{G_4} \cap S_{H_3} \neq \emptyset$
g	$T^{4k-2} = T^{2k-1}H_3 \circ G_3 T^{2k-2}H_4 \circ H_4$	$T^k S_{G_3} \cap S_{H_4} \neq \emptyset$	$T^{k-1} S_{H_4} \cap S_{G_3} \neq \emptyset$
h	$T^{4k} = T^{2k-1}H_3 \circ G_3 T^{2k-1}H_4 \circ H_4$	$T^k S_{G_3} \cap S_{G_4} \neq \emptyset$	$T^k S_{G_4} \cap S_{G_3} \neq \emptyset$

周期 2 については注意する必要がある．表 2 の分類 b における周期 2 の周期軌道は二重対称周期軌道である．一般に二重対称周期軌道は対称線上に四点軌道点をもつが，分類 b における周期 2 の周期軌道は対称線 S_{H_1} と S_{G_2} の交点に軌道点をもつ．この場合，交点を二個と数えれば合計四個となる．

分類 c と f では周期 2 の周期軌道は生じない．分類 g の場合において可能な周期 2 の周期軌道は四重対称周期軌道である．そのため条件を $k \geq 2$ として周期 2 の周期軌道を除いてある．この場合について簡単に説明を追加する．一般に四重対称周期軌道は対称線上に八点軌道点をもつ．ここで，後出の図 3(a)を見て欲しい．四つの対称線 S_{H_1} , S_{G_2} , S_{G_3} , S_{H_4} が交差している点が二つあることが分かるであろう．これらの交点が周期 2 の軌道点である．つまり，周期 2 の軌道点は四種類の対称線の交点になっているので，ひとつ交点を四個と数えれば合計八個となる．

表 2 と表 3 における分類 a を例として説明する．表現 $H_1[z_0]$ は軌道点 z_0 が対称線 S_{H_1} 上にあることを表現している．次の表現 $H_2[z_k]$ は軌道点 z_k が対称線 S_{H_2} 上にあることを表現し，最後の表現 $H_1[z_{2k}]$ は軌道点 z_{2k} が対称線 S_{H_1} 上にあることを表現している．記号 $H_1[z_0] \rightarrow H_2[z_k]$ は， z_1 から z_{k-1} までの軌道点が対称線上にないことも意味している．記号 $H_2[z_k] \rightarrow H_1[z_{2k}]$ についても同様である．

表 2 の周期より，二重対称周期軌道の周期が偶数であることが分かる．分類 a の表 3 における条件 1 は，対称線の像 $T^k S_{H_1}$ と対称線 S_{H_2} の交点が二重対称周期軌道の軌道点であることを意味している．ただし，交点として不動点は除く．条件 2 も同様のことを意味している．条件 1 を利用しても条件 2 を利用しても同じ二重対称周期軌道が決まる．

二重対称周期軌道と第 4 節で議論する四重対称周期軌道との相違を把握するために，二重対称周期軌道の例を図 3 に示した．図 3(a), (b), ..., (h) の軌道はそれぞれ表 2 と表 3 の分類 a, b, ..., h に属する周期軌道例である．図 3(a) の場合，初期点 z_0 (図では 0) は対称線 S_{H_1} 上にあり， z_1 は S_{H_2} 上にある．周期は 4 である．他の図も同様である．

周期を q とし，分類 a から分類 h において写像 T^q を三つの作用に分解した．左から順に左対合，恒等写像，右対合と呼ぶ[1]．それぞれの表現については表 3 に載せた．最初に，分類 a と分類 c における周期 q の導出を行う．残りの場合の導出は省く．

分類 a. この場合，周期軌道が対称線 S_{H_1} 上と S_{H_2} 上に軌道点をもつから 二重対称周期軌道で

ある．初期点 z_0 が S_{H_1} にあり， z_k が対称線 S_{H_2} 上にあることから周期を求める． $H_1[z_0]$ より $H_1 z_0 = z_0$ が得られ， $H_2[z_k]$ より $H_2 z_k = z_k$ が得られる．後者を $H_2 z_{2k} = z_0$ となおし，前者に代入すると $H_1 z_0 = H_2 z_{2k}$ が求まる．これを $H_2 H_1 z_0 = z_{2k}$ と書き，更に 180 度回転作用 $R = H_2 H_1$ を利用すると $R z_0 = z_{2k} = T^{2k} z_0$ が得られる．更に T^{2k} を z_{2k} に作用すると z_0 に戻るなので，周期 q は $q = 4k$ と得られる．

分類 c. この場合，周期軌道が対称線 S_{G_1} 上と S_{H_2} 上に軌道点をもつから二重対称周期軌道である．初期点 z_0 が S_{G_1} にあり， z_k が対称線 S_{H_2} 上にあることから周期を求める． $G_1[z_0]$ より $G_1 z_0 = z_0$ が得られ， $H_2[z_k]$ より $H_2 z_k = z_k$ が得られる．後者を $H_2 z_{2k} = z_0$ と書きなおし，前者に代入すると $G_1 z_0 = H_2 z_{2k}$ が求まる．両辺に G_2 を作用する．左辺は $G_2 G_1 z_0 = R z_0$ で，右辺は $G_2 H_2 z_{2k} = T^{-1} z_{2k} = z_{2k-1}$ ． $R z_0 = z_{2k-1}$ より， $q = 4k - 2$ が得られる．

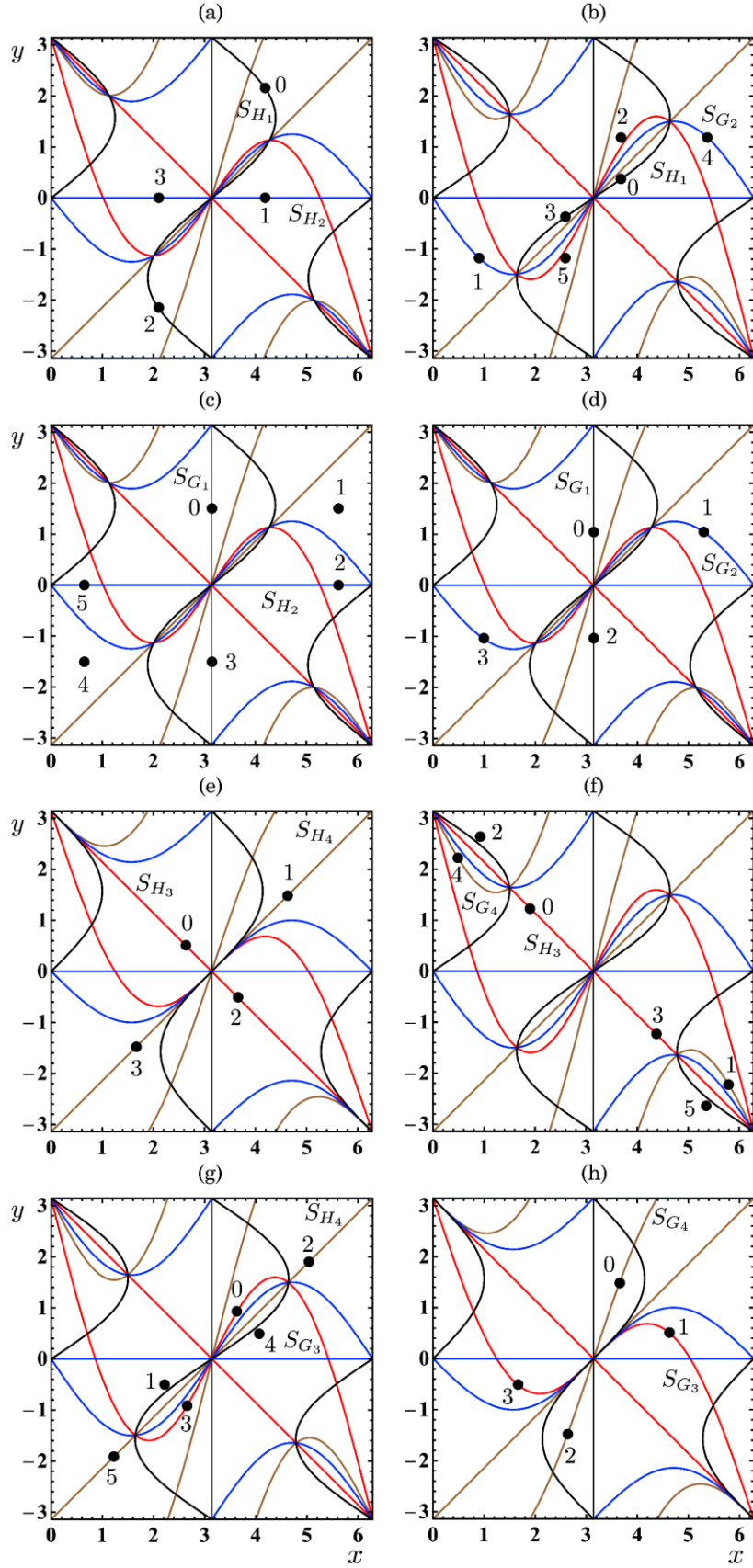


図 3：二重対称周期軌道の例. 整数 k は軌道点 z_k を表す. (a) $a = 2.5$. (b) $a = 3$. (c) $a = 2.5$. (d) $a = 2.5$. (e) $a = 2$. (f) $a = 3$. (g) $a = 2.5$. (h) $a = 2$.

分類 a-h における臨界値と条件の説明を行う。

分類 a. この場合, 左対合 $T^{2k}H_1$ について不変な集合は $T^kS_{H_1}$ である. また右対合 H_2 について不変な集合は S_{H_2} である. つまり, $T^kS_{H_1}$ と S_{H_2} の交点は二重対称周期軌道の軌道点である (交点として不動点は省く). これが条件 1 を表している. 次に恒等写像は, 分類 a の軌道点 z_i に対して

$$G_1T^{2k-1}H_2z_i = z_i \quad (28)$$

を満たす. これを $T^{2k}H_2z_i = TG_1z_i = H_1z_i$ と書き直す. $T^{2k}H_2$ について不変な集合は $T^kS_{H_2}$ である. H_1 について不変な集合は S_{H_1} である. つまり, 軌道点 z_i は, $T^kS_{H_2}$ と S_{H_1} の交点である. これが条件 2 を意味している. 対称線 S_{H_1} と S_{H_2} の交点は不動点のみである. よって, $k=1$ の場合を調べる. ここでは条件 2 を利用する. 対称線 S_{H_2} の Q_{10} における傾きは0である. これを, $\xi_0=0$ と書く. $k=1$ であるから, 式(20)を利用して ξ_1 が求まる. 一方で S_{H_1} の Q_{10} における傾きは $2/a$ である. $\xi_1=2/a$ より臨界値が求まる.

$$\xi_1 = \frac{-a}{1-a^2} = \frac{2}{a}. \quad (29)$$

これより臨界値が $a=\sqrt{2}$ と得られる. k についての条件 $k \geq 1$ が示された.

分類 b. この場合, $k=0$ を満たす周期軌道が存在することを示す. a を増加すると, 対称線 S_{H_1} と S_{G_2} が接する. この臨界値を決める式は, $2/a = a/2$ である. 左辺が対称線 S_{H_1} の Q_{10} における傾きで, 右辺が S_{G_2} の Q_{10} における傾きである. これより臨界値は $a=2$ である. 最小の周期は2である. この周期2の周期軌道は二重対称周期軌道である.

分類 c. この場合, TS_{G_1} は $y=x-\pi$ と書ける. これと x 軸 (S_{H_2})は不動点以外で交差しない. これは周期2が生じないことを意味する. よって, $k=2$ の場合を調べる. TS_{G_1} の Q_{10} における傾きは $\xi_1=1$ である. 次に $T^2S_{G_1}$ の Q_{10} における傾き $\xi_2=(1-a)/(a(1-a)+1)$ が得られる. これが0になることより, 臨界値は $a=1$ である. k についての条件 $k \geq 2$ が示された.

分類 d. この場合, TS_{G_1} の傾きは1である. 一方の S_{G_2} の傾きは $a/2$ である. よって臨界値は $a=2$ が導かれる. k についての条件 $k \geq 1$ が示された.

分類 e. 対称線 S_{H_3} と S_{H_4} は不動点以外で交差しないので $k=1$ とする. 対称線 S_{H_3} の Q_{10} における傾きは $\xi_0=-1$ を利用して, ξ_1 を求める. 対称線 S_{H_4} の Q_{10} における傾きは1である.

$$\xi_1 = \frac{a+1}{a(a+1)-1} = 1$$

より, 臨界値は $a=\sqrt{2}$ と得られる.

分類 f. 対称線 S_{H_3} と S_{G_4} は不動点以外で交差しない. 対称線 S_{G_4} の Q_{10} における傾きは $a+1$ である. $k=1$ として, a を決める式

$$\xi_1 = \frac{a+1}{a(a+1)-1} = a+1$$

が得られる. これを解いて臨界値は $a=1$ となる.

分類 g. $k = 1$ とすると周期 2 の周期軌道が得られる. しかし, これは四重対称周期軌道である. そのために条件として $k \geq 2$ とした. 対称線 S_{G_3} の Q_{10} における傾きは $\xi_0 = a - 1$ である. 対称線 S_{H_4} の Q_{10} における傾きは 1 である. $k = 2$ として

$$\xi_2 = \frac{a^2 - a - 1}{a^3 - a^2 - 2a + 1} = 1$$

が得られる. これより 臨界値 $a = 1$ が求まる.

分類 h. 対称線 S_{G_3} と S_{G_4} は不動点以外で交差しない. 対称線 S_{G_3} の Q_{10} における傾きは $\xi_0 = a - 1$ であり, 対称線 S_{G_4} の Q_{10} における傾きは $a + 1$ である. $k = 1$ として, $\xi_1 = 1/(a - 1) = a + 1$ を解いて, 臨界値が $a = \sqrt{2}$ と得られる.

最後に二重対称周期軌道の性質を定理 3.1 としてまとめておく. 二重対称周期軌道の性質は参考文献[1]をみられたい.

定理 3.1. 二重対称周期軌道について(1)から(5)までが成り立つ.

- (1) 周期 q は, 2 以上の偶数.
- (2) 写像 T^q は左対合, 恒等写像 (γ), 右対合の三つの作用に分解される.
- (3) 左対合について不変な集合を S_l とし, 右対合について不変な集合 S_r とする. 関係 $z = S_l \cap S_r$ を満たす点 z は二重対称周期軌道の軌道点である. 点 z は不動点でないとする.
- (4) 条件 $\gamma w = w$ を満たす点 w は二重対称周期軌道の軌道点である. 点 w は不動点でないとする.
- (5) 二重対称周期軌道は 180 度回転対称性をもつ.

3.3. U 字形分岐

最初に二重周期倍分岐と二重同周期分岐の定義を与える. 二重同周期分岐については四重対称周期軌道の分岐を理解するために必要となる.

定義 3.2.

- (i) 周期倍分岐と反周期倍分岐が同時に生じる場合, この分岐を二重周期倍分岐と定義する.
- (ii) 同周期分岐と反同周期分岐が同時に生じる場合, この分岐を二重同周期分岐と定義する.

命題 3.3 は参考文献[1]で得られた結果である.

命題 3.3.

- (i) 楕円型一重対称周期軌道は周期倍分岐を起こし, 生じた娘周期軌道は一重対称周期軌道である.
- (ii) 楕円型二重対称周期軌道は最初に二重周期倍分岐を起こし, 次に同周期分岐を起こす. これらの分岐で生じた娘周期軌道はともに一重対称周期軌道である.

ハーバー写像における楕円型一重対称周期軌道の分岐の例を図 4(a)に示した. 楕円型一重

対称周期軌道は周期倍分岐のみを起こす．楕円型二重対称周期軌道(分類 e)の分岐を図 4(b)に示した．この周期軌道は最初に二重周期倍分岐を起こし，次に同周期分岐を起こす．特に図 4(b)における安定性係数 $r(a)$ の形状を U 字形と呼ぶ．U 字形に従う分岐を U 字形分岐と名付ける．楕円型二重対称周期軌道は U 字形分岐を起こす．

図 4(a)で示した周期倍分岐の例はよく知られているので，ここでは図 4(b)の U 字形分岐の例を紹介する．二重周期倍分岐で生じた周期軌道の例を図 5 に示した．周期 4 の楕円型二重対称周期軌道は大きな丸で描き，分岐で生じた周期 8 の軌道点は小さな丸で描いた．図 5(a)と図 5(b)で描いた周期 8 の周期軌道が生じた直後は楕円型である．図 5(a)では軌道点 z_0 より生じた二点対称線 S_{H_3} 上にあり，図 5(b)では軌道点 z_2 より生じた二点対称線 S_{H_3} にある．図 5(c)と図 5(d)で描いた周期 8 の周期軌道が生じた直後はサドル型である．図 5(c)では軌道点 z_1 より生じた二点対称線 S_{H_4} 上にあり，図 5(d)では軌道点 z_3 より生じた二点対称線 S_{H_4} 上にある．

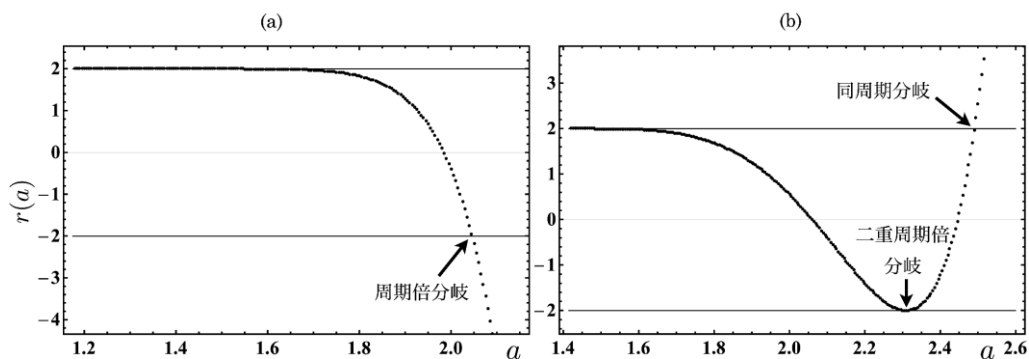


図 4 : (a) 楕円型一重対称周期軌道の分岐の例． $z_0 \in S_{H_4}$ ， $z_2 \in S_{G_4}$ ， $q = 5$ ， $a_c(1/5) = 2\sin(\pi/5) = 1.1755$. (b) 楕円型二重対称周期軌道の分岐の例．分類 e. $z_0 \in S_{H_3}$ ， $z_1 \in S_{H_4}$ ， $q = 4$ ， $a_c(1/4) = \sqrt{2}$.

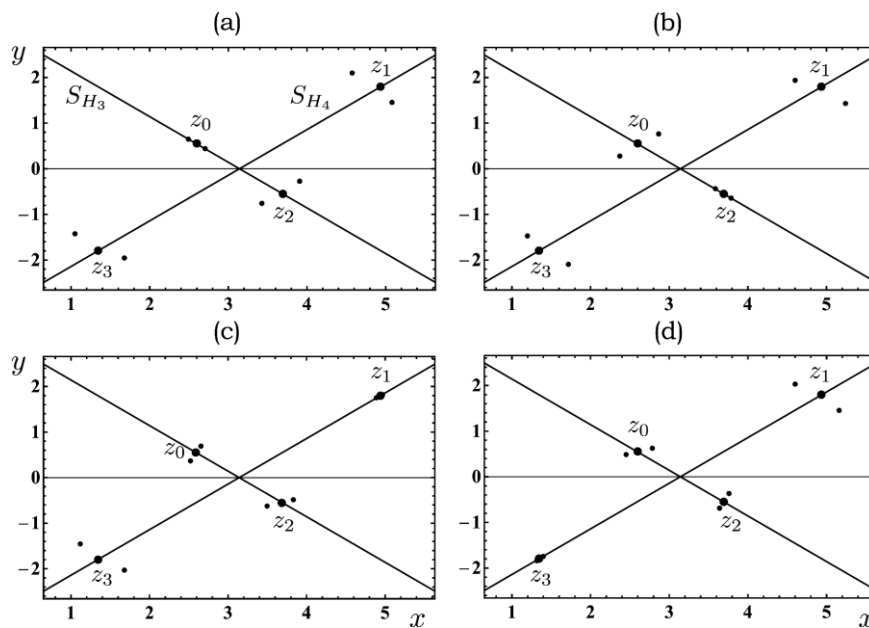


図 5: 周期 4 の二重対称周期軌道の軌道点 z_k ($0 \leq k \leq 3$) (大きな丸印)より生じた周期 8 の軌道点(小さな丸印)．(a)と(b)の小さな丸印の周期軌道が生じた直後は楕円型．(c)と(d)の小さな丸印の周期軌道が生じた直後はサドル型． $a = 2.4$.

二重周期倍分岐では、楕円型周期軌道とサドル型周期軌道が共に二つ生じる。写像 T^8 のもとで、楕円型周期軌道のポアンカレ指数は $(2 \times (+1))$ で、一方のサドル型周期軌道のポアンカレ指数は $(2 \times (-1))$ である。二重周期倍分岐の前、周期 4 の周期軌道は楕円型である。写像 T^4 で周期軌道点が楕円点ならば、この軌道点は写像 T^8 でも同様である。よって、分岐前のポアンカレ指数の総和は $(+1)$ である。ポアンカレ指数の保存則より、分岐後も $(+1) = (+1) + (2 \times (+1)) + (2 \times (-1))$ である。これより周期 4 の周期軌道のポアンカレ指数は分岐の前後で変化しないことが導かれる。このことは、安定性係数 $r(a)$ が $r = -2$ と接していることの傍証となる。

4. 四重対称周期軌道の性質

4.1. 対合の積に関する関係

二つの対合の積に関する関係を式(30)から式(32)にまとめておく。

$$\begin{aligned} H_1 H_3 &= G_1 G_3 = H_2 H_4 = H_4 G_1 = H_3 G_2 = G_2 G_4 \\ &= -H_1 H_4 = -H_3 G_1 = -H_4 G_2 = -G_1 G_4 = -H_2 H_3 = -G_2 G_3, \end{aligned} \quad (30)$$

$$G_4 H_1 = G_3 H_2 = -G_4 H_2 = -G_3 H_1, \quad (31)$$

$$G_1 H_2 = G_2 H_1 = G_3 H_4 = G_4 H_3. \quad (32)$$

例として、 $H_1 H_3 = G_1 G_3$ は $H_3 H_1 = G_3 G_1$ も意味する。対合を利用して計算することでこれらの関係を示すことができる。よって、式(30)から式(32)の導出は省く。特に式(32)は二重対称周期軌道においても成立する。以下の議論では上記の関係を必要に応じて利用する。

4.2. 四重対称周期軌道の分類

四重対称周期軌道は一周期の間に異なった四つの対称線を通過する。通過の仕方で四重対称周期軌道は八種類に分類できる[3]。八種類を表 4 と表 5 に示した。

表 4 : 四重対称周期軌道の分類 I

分類	対称線と軌道点	周期: q	条件
A1	$H_1[z_0] \rightarrow H_3[z_k] \rightarrow G_2[z_{2k}] \rightarrow G_4[z_{3k}] \rightarrow H_1[z_{4k+1}]$	$8k + 2$	$k \geq 1$
B1	$H_1[z_0] \rightarrow H_4[z_k] \rightarrow G_2[z_{2k}] \rightarrow G_3[z_{3k}] \rightarrow H_1[z_{4k+1}]$	$8k + 2$	$k \geq 0$
C1	$H_2[z_0] \rightarrow H_3[z_k] \rightarrow G_1[z_{2k}] \rightarrow G_4[z_{3k}] \rightarrow H_2[z_{4k+1}]$	$8k + 2$	$k \geq 1$
D1	$H_2[z_0] \rightarrow H_4[z_k] \rightarrow G_1[z_{2k}] \rightarrow G_3[z_{3k}] \rightarrow H_2[z_{4k+1}]$	$8k + 2$	$k \geq 1$
E1	$H_3[z_0] \rightarrow H_1[z_k] \rightarrow G_4[z_{2k-1}] \rightarrow G_2[z_{3k-1}] \rightarrow H_3[z_{4k-1}]$	$8k - 2$	$k \geq 1$
F1	$H_3[z_0] \rightarrow H_2[z_k] \rightarrow G_4[z_{2k-1}] \rightarrow G_1[z_{3k-1}] \rightarrow H_3[z_{4k-1}]$	$8k - 2$	$k \geq 2$
G1	$H_4[z_0] \rightarrow H_1[z_k] \rightarrow G_3[z_{2k-1}] \rightarrow G_2[z_{3k-1}] \rightarrow H_4[z_{4k-1}]$	$8k - 2$	$k \geq 1$
H1	$H_4[z_0] \rightarrow H_2[z_k] \rightarrow G_3[z_{2k-1}] \rightarrow G_1[z_{3k-1}] \rightarrow H_4[z_{4k-1}]$	$8k - 2$	$k \geq 1$

表 5 : 四重対称周期軌道の分類 II

分類	対称線と軌道点	周期: q	条件
A2	$G_2[z_0] \rightarrow G_4[z_k] \rightarrow H_1[z_{2k+1}] \rightarrow H_3[z_{3k+1}] \rightarrow G_2[z_{4k+1}]$	$8k + 2$	$k \geq 1$
B2	$G_2[z_0] \rightarrow G_3[z_k] \rightarrow H_1[z_{2k+1}] \rightarrow H_4[z_{3k+1}] \rightarrow G_2[z_{4k+1}]$	$8k + 2$	$k \geq 0$
C2	$G_1[z_0] \rightarrow G_4[z_k] \rightarrow H_2[z_{2k+1}] \rightarrow H_3[z_{3k+1}] \rightarrow G_1[z_{4k+1}]$	$8k + 2$	$k \geq 1$
D2	$G_1[z_0] \rightarrow G_3[z_k] \rightarrow H_2[z_{2k+1}] \rightarrow H_4[z_{3k+1}] \rightarrow G_1[z_{4k+1}]$	$8k + 2$	$k \geq 1$
E2	$G_4[z_0] \rightarrow G_2[z_k] \rightarrow H_3[z_{2k}] \rightarrow H_1[z_{3k}] \rightarrow G_4[z_{4k-1}]$	$8k - 2$	$k \geq 1$
F2	$G_4[z_0] \rightarrow G_1[z_k] \rightarrow H_3[z_{2k}] \rightarrow H_2[z_{3k}] \rightarrow G_4[z_{4k-1}]$	$8k - 2$	$k \geq 2$
G2	$G_3[z_0] \rightarrow G_2[z_k] \rightarrow H_4[z_{2k}] \rightarrow H_1[z_{3k}] \rightarrow G_3[z_{4k-1}]$	$8k - 2$	$k \geq 1$
H2	$G_3[z_0] \rightarrow G_1[z_k] \rightarrow H_4[z_{2k}] \rightarrow H_2[z_{3k}] \rightarrow G_3[z_{4k-1}]$	$8k - 2$	$k \geq 1$

最初に A1 をもとに表の記号の意味を説明する．周期 q は $q = 8k + 2$ である．初期点 z_0 は対称線 S_{H_1} 上にあり，軌道点 z_k は対称線 S_{H_3} にある．記号 $H_1[z_0] \rightarrow H_3[z_k]$ が，このことを表現している．軌道点 z_1 から z_{k-1} までは対称線にない．次に軌道点 z_{2k} は対称線 S_{G_2} 上にあり，軌道点 z_{3k} は対称線 S_{G_4} にある．周期の丁度半分で再び軌道点は対称線 S_{H_1} に戻る．つまり， $z_{4k+1} \in S_{H_1}$ が成り立つ．ここで $z_0 \neq z_{4k+1}$ である．A1 に含まれる四重対称周期軌道の最小周期は $q = 10$ ($k = 1$) である．

周期軌道が通過する対称線の順番は，表 4 の分類では H_i ($i = 1, 2, 3, 4$) から始まる．この表現を巡回し，軌道点の順番を変更すると表 5 が得られる．表 4 と表 5 は同じ情報を与える．初期点が S_{H_i} ($i = 1, 2, 3, 4$) がある場合と， S_{G_i} ($i = 1, 2, 3, 4$) にある場合に分けておくと表が利用しやすい．

八種類の四重対称周期軌道の例を図 5 に示す．図 5(A) で， $z_0 \in S_{H_1}$ (z_0 は，図では 0 と表現されている) から出発した場合が分類 A1 になり， z_2 を初期点とした場合が分類 A2 である．図 5(A) の例では，周期は $q = 10$ で，8 個の軌道点に対称線上にある．

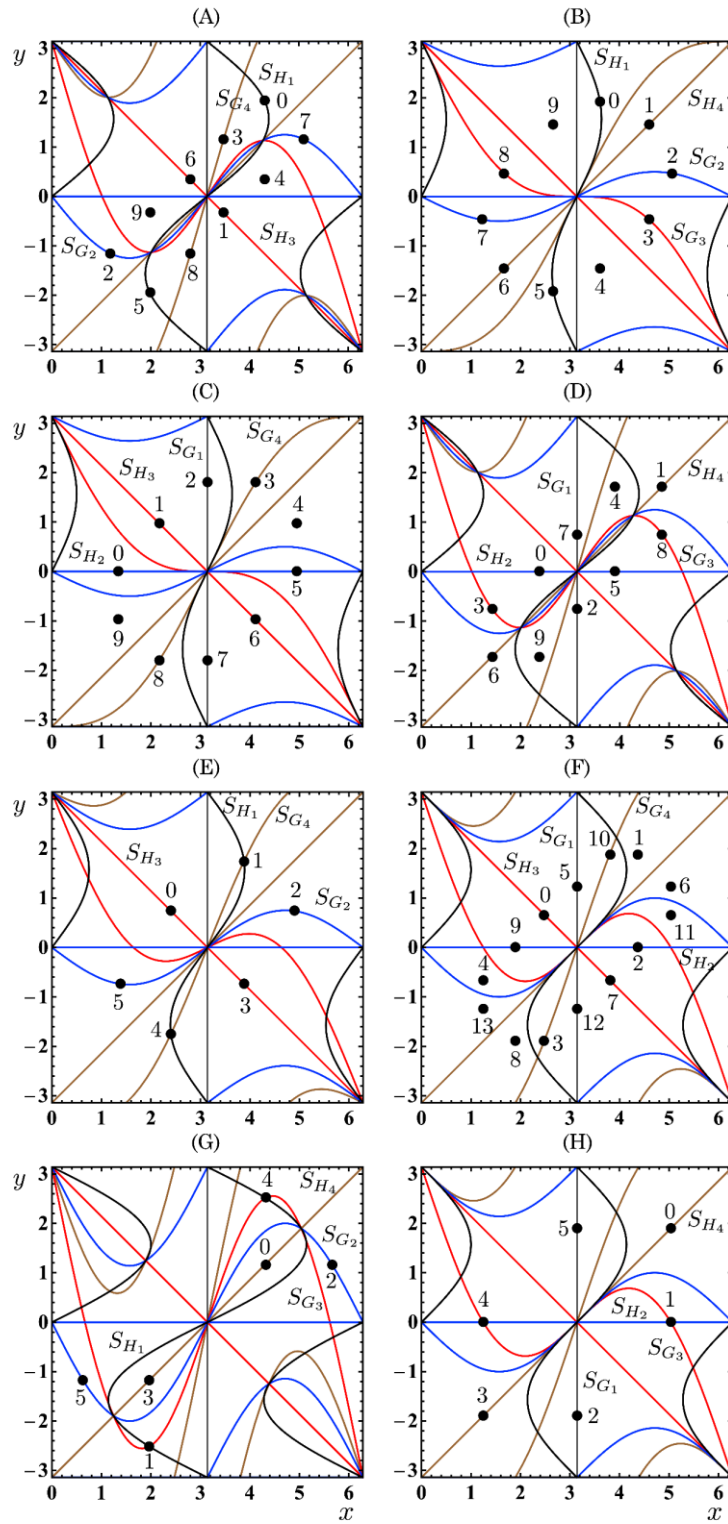


図 6 : 四重対称周期軌道の例. 整数 k は軌道点 z_k を表す. (A) $a = 2.5$. (B) $a = 1$. (C) $a = 1$. (D) $a = 2.5$. (E) $a = 1.5$. (F) $a = 2$. (G) $a = 4$. (H) $a = 2$.

分類 A1 の場合, 対称線 S_{H_1} にある初期点 z_0 から出発し, 途中で対称線 S_{H_3} , S_{G_2} , S_{G_4} を経由して再び対称線 S_{H_1} に戻る. この周期軌道は, 左右の対称線 S_{H_1} , 上下の対称線 S_{G_2} , 斜め左右の対称線 S_{H_3} , そして斜め上下の対称線 S_{G_4} に軌道点をもつから四重対称周期軌道である. この周期軌道が経由していく順番をもとに, 周期が $8k+2$ であることを証明する.

A1 の場合. 最初に周期を決定し, 次にこの周期軌道が存在するための条件を導く. 軌道点 z_0 と z_k について, $z_0 \in S_{H_1}$ かつ $z_k \in S_{H_3}$ が成り立つ. 最初に $z_{2k} \in S_{G_2}$ を導く. $z_k \in S_{H_3}$ より, $z_k = H_3 z_k$ が成り立つ. 両辺に T^k を作用する. 左辺は z_{2k} で, 右辺は $T^k H_3 z_k = H_3 T^{-k} z_k = H_3 z_0$. 関係 $z_{2k} = H_3 z_0$ の両辺に G_2 を作用すると, $G_2 H_3 z_0 = G_2 z_{2k}$ が得られる. 関係式 $G_2 H_3 = H_3 H_1$ を利用する(式(30)を見よ). $H_1 z_0 = z_0$ であるから, $H_3 H_1 z_0 = H_3 z_0 = z_{2k}$. よって, $z_{2k} = G_2 z_{2k}$ が成り立つ. これは $z_{2k} \in S_{G_2}$ を意味する.

次に $z_{2k} = G_2 z_{2k}$ の両辺に T^{-k} を作用する. 左辺は z_k で, 右辺は $T^{-k} G_2 z_{2k} = G_2 T^k z_{2k} = G_2 z_{3k}$. 得られた $G_2 z_{3k} = z_k$ を $z_{3k} = G_2 z_k$ と書き直し, 両辺に G_4 を作用する. 左辺は $G_4 z_{3k}$ で, 右辺は $G_4 G_2 z_k$. この右辺を以下のように書き換える.

$$\begin{aligned} G_4 G_2 z_k &= G_3 G_1 z_k = G_3 G_1 H_1 H_1 z_k = G_3 T^{-1} H_1 z_k \\ &= G_3 T^{-1} z_{-k} = G_3 z_{-k-1} = G_3 H_3 H_3 z_{-k-1} = T^{-1} z_{3k+1} = z_{3k} \end{aligned} \quad (33)$$

ここで, $G_4 G_2 = G_3 G_1$, $H_1 z_k = z_{-k}$, $H_3 z_{-k-1} = z_{3k+1}$ の関係を順に利用した. まとめて, $z_{3k} = G_4 z_{3k}$ が得られた. これは $z_{3k} \in S_{G_4}$ を意味する.

周期を導く. $G_4 z_{3k} = z_{3k}$ の左辺を以下のように書き換える.

$$\begin{aligned} G_4 z_{3k} &= G_4 G_2 z_k = G_4 G_2 H_3 z_k = G_3 G_1 H_3 z_k = G_3 H_4 H_1 z_k \\ &= G_3 H_4 z_{-k} = G_3 H_3 H_3 H_4 z_{-k} = T^{-1} R z_{-k} = z_{-k-1+q/2}. \end{aligned} \quad (34)$$

ここで, $G_2 z_k = z_{3k}$, $z_k = H_3 z_k$, $G_4 G_2 = G_3 G_1$, $G_1 H_3 = H_4 H_1$, $H_1 z_k = z_{-k}$, $R = H_3 H_4$, $R = T^{q/2}$ を順に利用した. 以上で $z_{3k} = z_{-k-1+q/2}$ が導かれ, 周期が $q = 8k+2$ と決まる.

関係 $z_{4k+1} \in S_{H_1}$ を示す. $z_0 = H_1 z_0$ の両辺に T^{-4k-1} を作用すると, $z_{-4k-1} = T^{-4k-1} H_1 z_0 = H_1 T^{4k+1} z_0 = H_1 z_{4k+1}$. 周期が $q = 8k+2$ であるから, $z_{-4k-1} = z_{4k+1}$. よって, $z_{4k+1} = H_1 z_{4k+1}$ が成り立つ.

$k=0$ を満たす周期 2 が存在しないことを示す. $k=0$ は, 対称線 S_{H_1} と S_{H_3} が Q_{10} 以外で交差することを意味する. しかし, 対称線 S_{H_1} の Q_{10} における傾き $2/a$ が正で, 一方の S_{H_3} の傾き -1 は負である. よって, S_{H_1} と S_{H_3} が Q_{10} 以外で交差することはない. 次に, $k=1$ は可能であることを示す. S_{H_1} の傾き $\xi_0 = 2/a$ の像 $\xi_1 = (a^2 - 2)/(a^3 - 3a)$ が 0 になる条件は, $a = \sqrt{2}$ である.

B1 の場合. 対称線 S_{H_1} の Q_{10} における傾きは $2/a$ である. 対称線 S_{H_4} の傾きは 1 であるから, 臨界値は 2 と得られる. この場合, $k \geq 0$ である. つまり, この場合にのみ周期 2 が存在する.

C1 の場合. 対称線 S_{H_2} の傾きは $\xi_0 = 0$ で, 対称線 S_{H_3} の傾きは -1 であるから, $k=0$ は成り立たない. よって, $k=1$ とする. ξ_1 を求めて, $\xi_1 = -1$ と置く.

$$\frac{a}{a^2 - 1} = -1. \quad (35)$$

これより臨界値は $(\sqrt{5} - 1)/2$ である. この場合, $k \geq 1$ である.

D1 の場合. 対称線 S_{H_2} の傾きは $\xi_0 = 0$ で, 対称線 S_{H_4} の傾きは 1 であるから, $k=0$ は成り立た

ない. よって, $k = 1$ とする. C1 の場合と同様にして

$$\frac{a}{a^2 - 1} = 1 \quad (36)$$

が得られる. これより臨界値は $(\sqrt{5} + 1)/2$ である. この場合, $k \geq 1$ である.

E1 の場合. 対称線 S_{H_3} の傾きは $\xi_0 = -1$ で, 対称線 S_{H_1} の傾きは $2/a$ であるから, $k = 0$ は成り立たない. $k = 1$ として ξ_1 を求めると臨界値を決める式

$$\frac{a + 1}{a^2 + a - 1} = \frac{2}{a} \quad (37)$$

が得られる. 臨界値は1である. この場合, $k \geq 1$ である.

F1 の場合. 対称線 S_{H_3} の傾きは $\xi_0 = -1$ で, 対称線 S_{H_2} の傾きは0であるから, $k = 0$ は成り立たない. $k = 1$ として, ξ_1 を求めると $\xi_1 = (a + 1)/(a^2 + a - 1)$ が得られる. しかし, $\xi_1 = 0$ は成立しない. よって, ξ_2 を求める.

$$\xi_2 = \frac{a^3 + a^2 - 2a - 1}{a^4 + a^3 - 3a^2 - 2a + 1}. \quad (38)$$

この式の分子を0として臨界値が1.24698と得られる. 条件は $k \geq 2$ となる.

G1 の場合. $k = 1$ は, 周期2の軌道から生じた周期3の周期軌道を与える(図5(G)). つまり, 周期は $6 = 2 \times 3$. 数値計算で分岐が生じる臨界値は3.6963と得られる.

H1 の場合. 対称線 S_{H_4} の傾きは $\xi_0 = 1$ を利用して ξ_1 を求める.

$$\xi_1 = \frac{a - 1}{a^2 - a - 1}. \quad (39)$$

対称線 S_{H_2} の傾きは0であるから, 臨界値は1. また $k \geq 1$ である.

命題 4.1. 四重可逆写像では, 180度回転対称性をもつ周期軌道は二重対称周期軌道と四重対称周期軌道に限られる.

証明. 二重対称周期軌道の場合の主張は定理 3.1 で既に述べられている. 四重対称周期軌道の場合の主張を証明する. ここでは表4におけるA1の場合を証明する.

最初に $z_{q/2} = Rz_0$ を示す. A1の場合は, $Rz_0 = H_2H_1z_0$ を利用する. $z_0 \in S_{H_1}$ より, $Rz_0 = H_2z_0$ が得られる. 次に $z_{2k} \in S_{G_2}$ より, $G_2z_{2k} = z_{2k}$ が成り立つ. 両辺に H_2 を作用する. $H_2G_2z_{2k} = z_{2k+1}$ より, $z_{2k+1} = H_2z_{2k}$ が得られる. これを, $z_{4k+1} = H_2z_0$ と書き直すと, $Rz_0 = H_2z_0 = z_{4k+1}$ が求まる. $q/2 = 4k + 1$ であるから, $z_{q/2} = Rz_0$ が示された. 次に $z_{q/2} = Rz_0$ の両辺に T を作用すると, $z_{q/2+1} = TRz_0 = RTz_0 = Rz_1$ が得られる. これを繰り返すことで, 四重対称周期軌道が180度回転対称性を持つことが示される. 以上で証明を終える.

4.3. 対合表現

四重対称周期軌道の特徴付ける対合表現を導こう. 結果は表6と表7に載せた. ここではA1の対合表現を導出する. まず, T^{8k+2} を次のように分解することから始める.

$$T^{8k+2} = T^{2k}H_1 \circ G_1T^{6k+1}H_3 \circ H_3. \quad (40)$$

次に第二番目の作用を書き直す.

$$\begin{aligned}
G_1 T^{6k+1} H_3 &= G_2 G_2 G_1 T^{6k+1} H_3 = G_2 R T^{6k+1} H_3 \\
&= G_2 T^{-4k-1} T^{6k+1} H_3 = G_2 T^{2k} H_3.
\end{aligned} \tag{41}$$

書き換えの途中で R を $R = T^{-4k-1}$ で置き換えた。第二の作用 $G_2 T^{2k} H_3$ に、左対合と右対合を合わせて対合表現が得られる。

$$T^{8k+2} = T^{2k} H_1 \circ G_2 T^{2k} H_3 \circ H_3. \tag{42}$$

表 6 : 対合表現 I

分類	対合表現[左対合, 恒等写像, 右対合]	存在条件 1	存在条件 2
A1	$T^{8k+2} = T^{2k} H_1 \circ G_2 T^{2k} H_3 \circ H_3$	$T^k S_{H_1} \cap S_{H_3} \neq \emptyset$	$T^k S_{H_3} \cap S_{G_2} \neq \emptyset$
B1	$T^{8k+2} = T^{2k} H_1 \circ G_2 T^{2k} H_4 \circ H_4$	$T^k S_{H_1} \cap S_{H_4} \neq \emptyset$	$T^k S_{H_4} \cap S_{G_2} \neq \emptyset$
C1	$T^{8k+2} = T^{2k} H_2 \circ G_1 T^{2k} H_3 \circ H_3$	$T^k S_{H_2} \cap S_{H_3} \neq \emptyset$	$T^k S_{H_3} \cap S_{G_1} \neq \emptyset$
D1	$T^{8k+2} = T^{2k} H_2 \circ G_1 T^{2k} H_4 \circ H_4$	$T^k S_{H_2} \cap S_{H_4} \neq \emptyset$	$T^k S_{H_4} \cap S_{G_1} \neq \emptyset$
E1	$T^{8k-2} = T^{2k} H_3 \circ G_4 T^{2k-2} H_1 \circ H_1$	$T^k S_{H_3} \cap S_{H_1} \neq \emptyset$	$T^{k-1} S_{H_1} \cap S_{G_4} \neq \emptyset$
F1	$T^{8k-2} = T^{2k} H_3 \circ G_4 T^{2k-2} H_2 \circ H_2$	$T^k S_{H_3} \cap S_{H_2} \neq \emptyset$	$T^{k-1} S_{H_2} \cap S_{G_4} \neq \emptyset$
G1	$T^{8k-2} = T^{2k} H_4 \circ G_3 T^{2k-2} H_1 \circ H_1$	$T^k S_{H_4} \cap S_{H_1} \neq \emptyset$	$T^{k-1} S_{H_1} \cap S_{G_3} \neq \emptyset$
H1	$T^{8k-2} = T^{2k} H_4 \circ G_3 T^{2k-2} H_2 \circ H_2$	$T^k S_{H_4} \cap S_{H_2} \neq \emptyset$	$T^{k-1} S_{H_2} \cap S_{G_3} \neq \emptyset$

表 7 : 対合表現 II

分類	対合表現[左対合, 恒等写像, 右対合]	存在条件 1	存在条件 2
A2	$T^{-8k-2} = G_4 T^{2k} \circ G_4 T^{-2k-2} H_1 \circ G_2$	$T^{-k} S_{G_4} \cap S_{G_2} \neq \emptyset$	$T^{-k-1} S_{H_1} \cap S_{G_4} \neq \emptyset$
B2	$T^{-8k-2} = G_3 T^{2k} \circ G_3 T^{-2k-2} H_1 \circ G_2$	$T^{-k} S_{G_3} \cap S_{G_2} \neq \emptyset$	$T^{-k-1} S_{H_1} \cap S_{G_3} \neq \emptyset$
C2	$T^{-8k-2} = G_4 T^{2k} \circ G_4 T^{-2k-2} H_2 \circ G_1$	$T^{-k} S_{G_4} \cap S_{G_1} \neq \emptyset$	$T^{-k-1} S_{H_2} \cap S_{G_4} \neq \emptyset$
D2	$T^{-8k-2} = G_3 T^{2k} \circ G_3 T^{-2k-2} H_2 \circ G_1$	$T^{-k} S_{G_3} \cap S_{G_1} \neq \emptyset$	$T^{-k-1} S_{H_2} \cap S_{G_3} \neq \emptyset$
E2	$T^{-8k+2} = G_2 T^{2k} \circ G_2 T^{-2k} H_3 \circ G_4$	$T^{-k} S_{G_2} \cap S_{G_4} \neq \emptyset$	$T^{-k} S_{H_3} \cap S_{G_2} \neq \emptyset$
F2	$T^{-8k+2} = G_1 T^{2k} \circ G_1 T^{-2k} H_3 \circ G_4$	$T^{-k} S_{G_1} \cap S_{G_4} \neq \emptyset$	$T^{-k} S_{H_3} \cap S_{G_1} \neq \emptyset$
G2	$T^{-8k+2} = G_2 T^{2k} \circ G_2 T^{-2k} H_4 \circ G_3$	$T^{-k} S_{G_2} \cap S_{G_3} \neq \emptyset$	$T^{-k} S_{H_4} \cap S_{G_2} \neq \emptyset$
H2	$T^{-8k+2} = G_1 T^{2k} \circ G_1 T^{-2k} H_4 \circ G_3$	$T^{-k} S_{G_1} \cap S_{G_3} \neq \emptyset$	$T^{-k} S_{H_4} \cap S_{G_1} \neq \emptyset$

A1 の条件として、 $H_3 z_k = z_k$ と $G_2 z_{2k} = z_{2k}$ がある。これを利用して作用 $G_2 T^{2k} H_3$ が恒等写像であることが示せる。

$$G_2 T^{2k} H_3 z_i = G_2 T^{2k} z_{2k-i} = G_2 z_{4k-i} = z_i. \tag{43}$$

次に対称線の関係を導こう。左対合と右対合から、 $T^k S_{H_1} \cap S_{H_3} \neq \emptyset$ を満たす点が A1 を満たす四重対称周期軌道である。次に恒等写像を次のように書き直す。

$$T^{2k} H_3 z_i = G_2 z_i. \tag{44}$$

対合 $T^{2k} H_3$ について不変な集合は $T^k S_{H_3}$ であり、 G_2 について不変な集合は S_{G_2} である。よって、 $T^k S_{H_3} \cap S_{G_2} \neq \emptyset$ が得られる。

次に A2 の対合表現を導出する。まず、 T^{-8k-2} を次のように分解する。

$$T^{-8k-2} = T^{-2k} T^{-1} T^{-6k-1} = T^{-2k} G_4 \circ H_4 T^{-6k-1} G_2 \circ G_2 = G_4 T^{2k} \circ H_4 T^{-6k-1} G_2 \circ G_2. \tag{45}$$

次に第二の作用を書き直す。

$$H_4 T^{-6k-1} G_2 = H_4 T^{-6k-1} G_2 G_1 \circ G_1 H_1 \circ H_1 = H_4 T^{-6k-1} R T^{-1} H_1$$

$$= H_4 T^{-6k-1} T^{4k+1} T^{-1} H_1 = G_4 \circ G_4 H_4 T^{-2k-1} H_1 = G_4 \circ T^{-1} T^{-2k-1} H_1 = G_4 T^{-2k-2} H_1. \quad (46)$$

以上より、下記の対合表現が得られる。

$$T^{-8k-2} = G_4 T^{2k} \circ G_4 T^{-2k-2} H_1 \circ G_2. \quad (47)$$

A2 の条件である $H_1 z_{2k+1} = z_{2k+1}$ と $G_4 z_k = z_k$ を利用すると、 $G_4 T^{-2k-2} H_1$ が恒等写像であることが導かれる。

$$G_4 T^{-2k-2} H_1 z_i = G_4 T^{-2k-2} z_{4k+2-i} = G_4 z_{2k-i} = z_i. \quad (48)$$

左対合と右対合から、 $T^{-k} S_{G_4} \cap S_{G_2} \neq \emptyset$ を満たす点が A2 を満たす四重対称周期軌道である。恒等写像を下記のように書き直す。

$$T^{-2k-2} H_1 z_i = G_4 z_i. \quad (49)$$

対合 $T^{-2k-2} H_1$ について不変な集合は $T^{-k-1} S_{H_1}$ であり、 G_4 について不変な集合は S_{G_4} である。よって、 $T^{-k-1} S_{H_1} \cap S_{G_4} \neq \emptyset$ が得られた。得られた結果をまとめて命題 4.2 とする。

命題 4.2. 恒等写像を Γ と書く。関係 $\Gamma z = z$ を満たす点 z は、四重対称周期軌道の軌道点である。ただし、点 z は不動点でないとする。

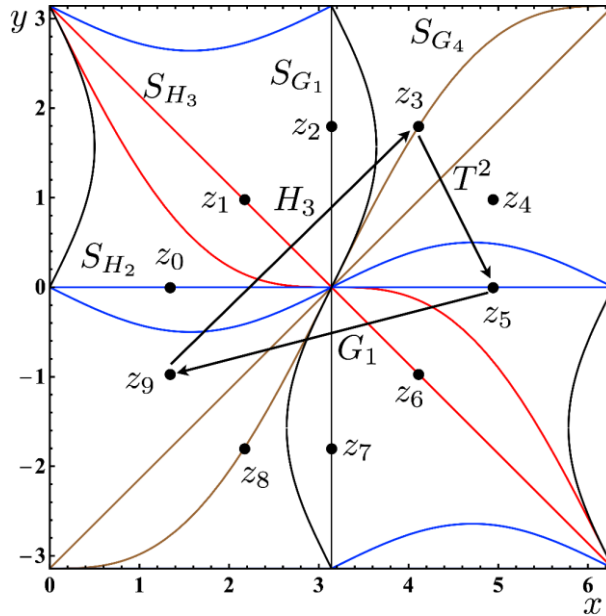


図 7: C1 の場合. 恒等写像 $G_1 T^2 H_3$ における軌道点の動き: $z_9 \rightarrow z_3 \rightarrow z_5 \rightarrow z_9$. $q = 10$, $a = 1.5$.

C1 の周期 10 の四重対称周期軌道を例として、恒等写像による軌道点を動きを図 7 に示した。ここで $z_6 = H_3 z_6$ である。これは $z_9 = H_3 z_3$ と書き直せる。軌道点 z_9 に H_3 を作用すると、軌道点は z_3 に移動する。次に、 T^2 によって z_5 に移る。 $G_1 z_7 = z_7$ より、 $G_1 z_5 = z_9$ が導かれる。よって、恒等写像で軌道点は出発点 z_9 に戻る。

最後に四重対称周期軌道の性質をまとめて定理 4.3 とする。

定理 4.3. 四重対称周期軌道について(1)から(5)までが成り立つ。

- (1) 周期 q は、2 以上の偶数。ただし、4 の倍数を除く。 $q = 4n + 2$ ($n \geq 0$).
- (2) 写像 T^q は左対合、恒等写像 (Γ)、右対合の三つの作用に分解される。

- (3) 左対合について不変な集合を δ_l とし, 右対合について不変な集合 δ_r とする. 関係 $z = \delta_l \cap \delta_r$ を満たす点 z は四重対称周期軌道の軌道点である. 点 z は不動点でないとする.
- (4) 条件 $\Gamma w = w$ を満たす点 w は四重対称周期軌道の軌道点である. 点 w は不動点でないとする.
- (5) 四重対称周期軌道は 180 度回転対称性をもつ.

5. 四重対称周期軌道の分岐現象

5.1. 臨界値と W 字形分岐

楕円型四重対称周期軌道の中で最もわかりやすい周期 2 を利用して分岐現象の説明を行う. 最初に周期 2 が生じる臨界値の導出を行う.

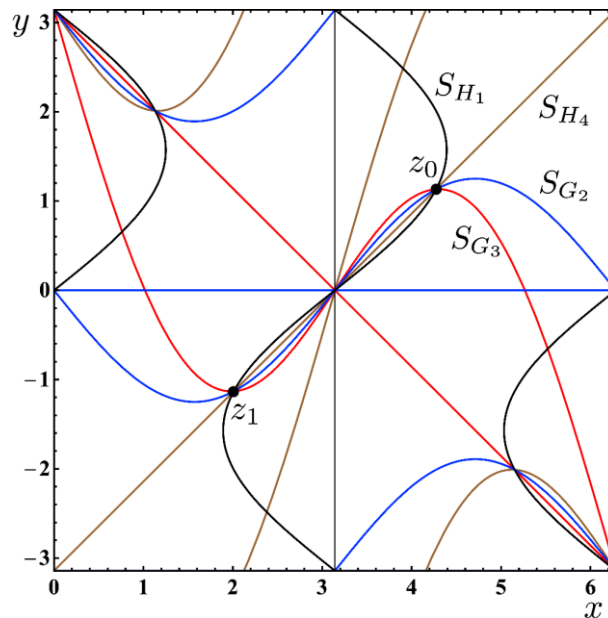


図 8 : 周期 2 の軌道点 z_0, z_1 は対称線 $S_{H_1}, S_{H_4}, S_{G_2}, S_{G_3}$ の交点にある. $a = 2.5$.

表 4 の B1 より, 周期 2 の軌道点 z_0 と z_1 は四つの対称線 ($S_{H_1}, S_{H_4}, S_{G_2}, S_{G_3}$) の交点にあることが導かれる (図 8). これらの中から, S_{H_4} ($y = x - \pi$) と S_{G_2} ($y = -(a/2)\sin x$) を選ぶ. $a > 2$ では, これらの交点は不動点 Q_{10} 以外に二つ生じる. 生じた交点を $z_0 = (\pi + t, t)$ ($0 < t < \pi$) と $z_1 = (\pi - t, -t)$ とする. z_0 を S_{G_2} の式に代入すると, t を決める式 (50) が得られる.

$$t = (a/2)\sin t. \quad (50)$$

線形化行列 M の $\text{Trace} M$ である安定性係数 $r(a)$ は以下のように得られる.

$$r(a) = 2 - 4a^2\cos^2 t + a^4\cos^4 t. \quad (51)$$

最初に二重同周期分岐 (同周期分岐も含む) の臨界値を調べる. この場合, $r(a) = 2$ とすると, 式 (51) より次式が導かれる.

$$a^2\cos^2 t(a^2\cos^2 t - 4) = 0. \quad (52)$$

$\cos t = 0$ より, $t = \pi/2$ が求まる. これを式 (50) に代入して臨界値が $a_c^{(2)} = \pi$ と得られる.

先に進む前に $a = a_c^{(2)}$ における安定性係数 $r(a)$ の傾きを求める。

$$\frac{dr(a)}{da} = -8a\cos^2 t + 8a^2\cos t\sin t \left(\frac{dt}{da}\right) + 4a^3\cos^4 t - 4a^4\cos^3 t\sin t \left(\frac{dt}{da}\right). \quad (53)$$

ここで $dt/da = \sin t / (2 - a\cos t)$. この式に $t = \pi/2$ を代入すると、ただちに安定性係数 $r(a)$ の傾きがゼロであることが得られる。これは $a = a_c^{(2)}$ で $r(a)$ が $r = 2$ と接していることを意味している。

次に $a^2\cos^2 t = 4$ と式(50)より、

$$t = \sqrt{a^2/4 - 1} \quad (54)$$

が得られる。これを式(50)に代入して臨界値を決める式

$$\sqrt{a^2/4 - 1} = (a/2)\sin\sqrt{a^2/4 - 1} \quad (55)$$

が求まる。数値計算より、臨界値は $a_c^{(4)} = 4.52365$ と決まる。 $a_c^{(4)} > a_c^{(2)}$ である。この事実より、二重同周期分岐の臨界値が $a_c^{(2)} = \pi$ で、同周期分岐の臨界値が $a_c^{(4)} = 4.52365$ であることがわかる。

次に二重周期倍分岐の臨界値を決める式を導出する。この場合、 $r(a) = -2$ が成り立つ。関係式 $a^2\cos^2 t = 2$ と式(50)より、次式が得られる。

$$F(a) \equiv a\sin(\sqrt{a^2 - 2}/2) - \sqrt{a^2 - 2} = 0. \quad (56)$$

式(56)のグラフを図9に描いた。 $F(a) = 0$ を満たす解は二つある。 $a_c^{(1)} = 2.30558$ と $a_c^{(3)} = 4.09803$ である。これらは共に二重周期倍分岐の臨界値である。以上より $2 < a_c^{(1)} < a_c^{(2)} < a_c^{(3)} < a_c^{(4)}$ が成り立つ。つまり、最初に二重周期倍分岐が生じ、次に二重同周期分岐が生じる。2回目の二重周期倍分岐が生じた後に同周期分岐が生じる。

最後に、 $a = a_c^{(1)}$ と $a = a_c^{(3)}$ で安定性係数 $r(a)$ が $r = -2$ と接していることを示しておく。安定性係数は $r(a) = (a^2\cos^2 t - 2)^2 - 2$ と書き直せる。安定性係数の最小値 -2 である。これより安定性係数が $r = -2$ と接していることが導かれる。

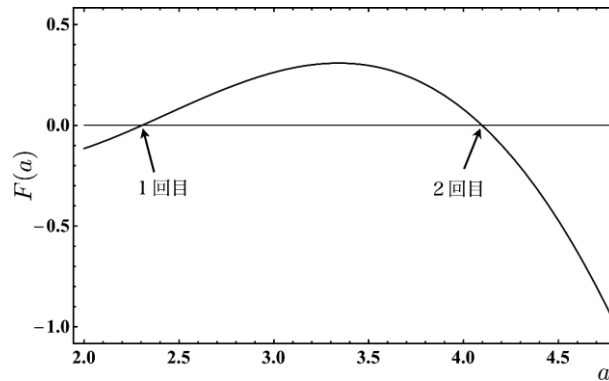


図9: $F(a) = 0$ を満たす二つの解の関係. 1 回目は最初に生じる二重周期倍分岐を表し, 2 回目は二重同周期分岐の後に生じる二重周期倍分岐を表している。

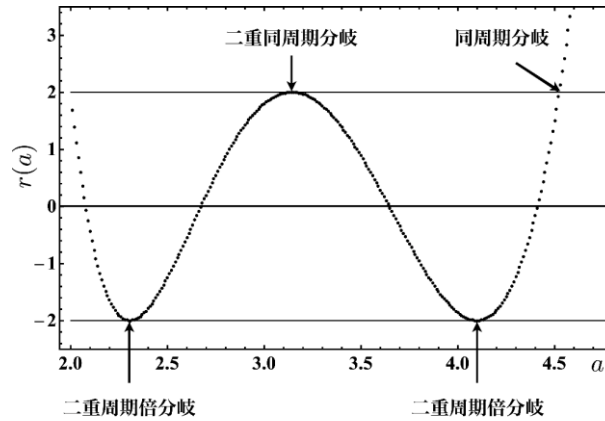


図 10：安定性係数 $r(a)$ の W 字形 a 依存性 (W 字形分岐).

5.2. 分岐で生じた対称周期軌道の性質

今後の議論で必要となる命題を紹介する.

命題 5.1. 楕円型四重対称周期軌道が二重周期倍分岐を起こして生じた娘周期軌道は一重対称周期軌道である.

証明. 生じた娘周期軌道が一重対称周期軌道以外の周期軌道でないことを証明する.

(1) 娘周期軌道が四重対称周期軌道でないこと.

定理 4.3(1)より, 楕円型四重対称周期軌道の周期 q は $q = 4n + 2$ である. 娘周期軌道の周期は $2q$ である. 娘周期軌道の周期は 4 の倍数 $(4(2n + 1))$ になる. これは定理 4.3(1)に反する.

(2) 娘周期軌道が二重対称周期軌道でないこと.

母四重対称周期軌道から分岐で生じた娘対称周期軌道は四重対称周期軌道が使用している対称線上に軌道点をもつ. 娘周期軌道の周期が 4 の倍数であることを利用する. 表 2 より, この周期に関する条件を満たす二重対称周期軌道は分類 (a), (d), (e), (h)に限られる. 表 4 を見ると, 分類 (a)における対称線 S_{H_1} と S_{H_2} に軌道点をもつ母四重対称周期軌道は存在しない. 残りの場合においても同様である.

(3) 娘周期軌道が非対称周期軌道でないこと.

楕円型四重対称周期軌道の軌道点 z_0 が対称線 S_{H_2} 上にあるとする. これは表 4 の C1 または D1 の場合に相当する. 娘周期軌道点 u_0 と u_q は対称線上にないとする. $u_q = H_2 u_0$ は成り立つから, 両辺に $T^{-q/2}$ を作用する. 左辺は $u_{q/2}$ で, 右辺は $T^{-q/2} H_2 u_0 = H_2 T^{q/2} u_0 = H_2 u_{q/2}$. つまり, $u_{q/2} = H_2 u_{q/2}$ が得られる. これは, 軌道点 $u_{q/2}$ が対称線 S_{H_2} 上にあることを意味する. よって, 矛盾が導かれた.

命題 5.2. 楕円型対称周期軌道が同周期分岐または反同周期分岐を起こして生じた娘周期軌道について, (i), (ii)と(iii)が成り立つ.

(i) 楕円型対称周期軌道が一重対称軌道ならば, 娘周期軌道は非対称軌道である.

(ii) 楕円型対称周期軌道が二重対称軌道ならば, 娘周期軌道は一重対称軌道である.

(iii) 楕円型対称周期軌道が四重対称軌道ならば, 娘周期軌道は二重対称軌道である.

証明. (i)と(ii)は既に参考文献[1]で証明されている. ここでは(iii)の証明を行う.

(1) 娘周期軌道は二重対称周期軌道または四重対称周期軌道であること。

図 7 で使用した C1 を利用する．ここで周期は $q = 8k + 2$ である．軌道点 z_0 は対称線 S_{H_2} 上にある．軌道点 z_0 より対称線上に u_0 と v_0 ($\neq u_0$) が生じたとする．軌道点 z_0 は四重対称周期軌道の軌道点であるから，軌道点 $z_{q/2}$ も対称線 S_{H_2} 上にある．結果として軌道点 $z_{q/2}$ より $u_{q/2}$ と $v_{q/2}$ が生じる．

$z_{q/2} = H_3 G_2 H_3 z_0$ が成り立つことを示す．対称線 S_{H_3} 上に軌道点 z_k が存在するから， $H_3 z_k = z_k$ が成り立つ．両辺に T^k を作用すると，左辺は $T^k H_3 z_k = H_3 T^{-k} z_k = H_3 z_0$ で，右辺は z_{2k} である． $H_3 z_0 = z_{2k}$ が得られる．対称線 S_{H_2} 上に軌道点 z_0 が存在するから， $H_2 z_0 = z_0$ が成り立つ．両辺に G_2 を作用すると，左辺は $G_2 H_2 z_0 = T^{-1} z_0 = z_{-1}$ であるから $z_{-1} = G_2 z_0$ が得られる．両辺に T^{-2k} を作用すると，左辺は z_{-2k-1} となる．周期性より z_{-2k-1} を z_{6k+1} と書き直す．右辺は $T^{-2k} G_2 z_0 = G_2 T^{2k} z_0 = G_2 z_{2k}$ である．まとめて， $G_2 z_{2k} = z_{6k+1}$ が得られる． $H_3 z_k = z_k$ の両辺に T^{-5k-1} を作用する．左辺は $T^{-5k-1} H_3 z_k = H_3 T^{5k+1} z_k = H_3 z_{6k+1}$ となる．右辺は $T^{-5k-1} z_k = z_{-4k-1}$ であるが，周期性より z_{-4k-1} を $z_{4k+1} = z_{q/2}$ と書き直す．以上をまとめると $z_{q/2} = H_3 G_2 H_3 z_0$ が得られる．

ここで $G_2 H_3 = H_3 H_1$ (式(30)を見よ) を利用すると， $z_{q/2} = H_3 G_2 H_3 z_0 = H_3 H_3 H_1 = H_1 z_0$ が成り立つ．ここで $z_0 = H_2 z_0$ を利用すると， $z_{q/2} = H_1 H_2 z_0 = R z_0$ が得られる．軌道点 $z_{q/2}$ は z_0 を反転した位置にあるから， $z_{q/2}$ は対称線 S_{H_2} 上にある．軌道点 u_0 と v_0 に H_1 を作用しても同様の反転が生じる．軌道点 $z_{q/2}$ から四点 $u_{q/2}$, $v_{q/2}$, $H_1 u_0$, $H_1 v_0$ が生じることは矛盾であるから， $H_1 v_0 = v_{q/2}$ かつ $H_1 u_0 = u_{q/2}$ が成り立つ場合と， $H_1 v_0 = u_{q/2}$ かつ $H_1 u_0 = v_{q/2}$ が成り立つ場合がある．ここでは，前者の場合について調べる．左辺は $H_1 v_0 = H_1 H_2 v_0 = R v_0$ であるから， $R v_0 = v_{q/2}$ が得られる．これは軌道点 v_0 から出発した周期軌道 $O(v_0)$ の周期が q であることを意味している．周期軌道 $O(u_0)$ の周期も q である．つまり，周期軌道 $O(u_0)$ と $O(v_0)$ は軌道点 z_0 より (反) 同周期分岐で生じた周期軌道であることが示された．周期軌道 $O(u_0)$ と $O(v_0)$ が対称周期軌道であることは明らかで，更にこれらは 180 度回転対称性を持つ．命題 4.1 より，周期軌道 $O(u_0)$ と $O(v_0)$ は二重対称周期軌道または 四重対称周期軌道であることが導かれた．

(2) 娘周期軌道は四重対称周期軌道でないこと．

生じた二つの娘周期軌道が四重対称周期軌道とすると，これらは母楕円型四重対称周期軌道と同じ条件を満たすことになる．つまり二つの娘周期軌道と母楕円型四重対称周期軌道が一致することになる．よって，四重対称周期軌道の娘周期軌道は生じない．以上で証明を終える．

上記の証明で利用した二重対称周期軌道が通過するもう一つの対称線を決定する．ここでは $u_0 = H_2 u_0$ を利用する．両辺に G_2 を作用すると，左辺は $G_2 u_0$ で，右辺は $G_2 H_2 u_0 = T^{-1} u_0 = u_{-1}$ ．よって， $G_2 u_0 = u_{-1}$ が得られる．両辺に G_1 を作用する．左辺は $G_1 G_2 u_0 = R u_0 = T^{q/2} u_0 = u_{q/2}$ で，右辺は $G_1 u_{-1}$ ．関係式 $u_{q/2} = G_1 u_{-1}$ が成り立つ．次に $q = 8k + 2$ を利用すると，この関係は $u_{4k+1} = G_1 u_{-1}$ と書き直せる．両辺に T^{-2k-1} を作用する．左辺は u_{2k} で，右辺は $T^{-2k-1} G_1 u_{-1} = G_1 T^{2k+1} u_{-1} = G_1 u_{2k}$ ．よって， $u_{2k} = G_1 u_{2k}$ が成り立つ．これは軌道点 u_{2k} が対称線 S_{G_1} 上にあることを意味している．ここで考えている二重対称周期軌道は，対称線 S_{H_2} 上と S_{G_1} 上に軌道点をもつ．

命題 5.3. 楕円型四重対称周期軌道が二重同周期分岐を起こして生じた娘周期軌道は一重対称軌道である．

証明. 二重同周期分岐は同時に同周期分岐と反同周期分岐が生じる現象である. この現象を二つに分けて考える. 最初は楕円型四重対称周期軌道が同周期分岐を起こすと考える. 命題 5.2(iii)より, 生じた娘周期軌道は二重対称周期軌道である. 次に生じた娘二重対称周期軌道が反同周期分岐を起こすと考える. 命題 5.2(ii)より, 生じた娘周期軌道は一重対称周期軌道である.

5.3. 最初の二重周期倍分岐

$a_c^{(1)} = 2.30558$ で最初の二重周期倍分岐が生じる. 命題 5.1 より, この分岐で生じる娘周期軌道は全て一重対称周期軌道である. 対称線 S_{H_1} と S_{G_2} に生じた周期 4 の軌道点は楕円型である(図 11 (a-1),(a-2),(b-1),(b-2)). 図において軌道点 z_k は整数 k で表現されている. 周期 2 の軌道点 z_0 と z_1 の周りにそれぞれ 4 個の軌道点が生じ, 合計 8 個の軌道点が存在することになる. T^4 を単位とするとポアンカレ指数の和は(+8)である. 対称線 S_{H_4} と S_{G_3} に生じた周期 4 のサドル型軌道点が生じる(図 11 (c-1),(c-2),(d-1),(d-2)). 結果として, 周期 2 の軌道点 z_0 と z_1 の周りに 8 個のサドル型軌道点が現れる. T^4 を単位とするとポアンカレ指数の和は(-8)である. つまり, $(+8) + (-8) = 0$ と互いに打ち消しあう. 結果として, 周期 2 の軌道点のポアンカレ指数は(+1)のまま変化しない. つまり, 二重周期倍分岐の前後で周期 2 の母軌道点の安定性は楕円型で変化しない.

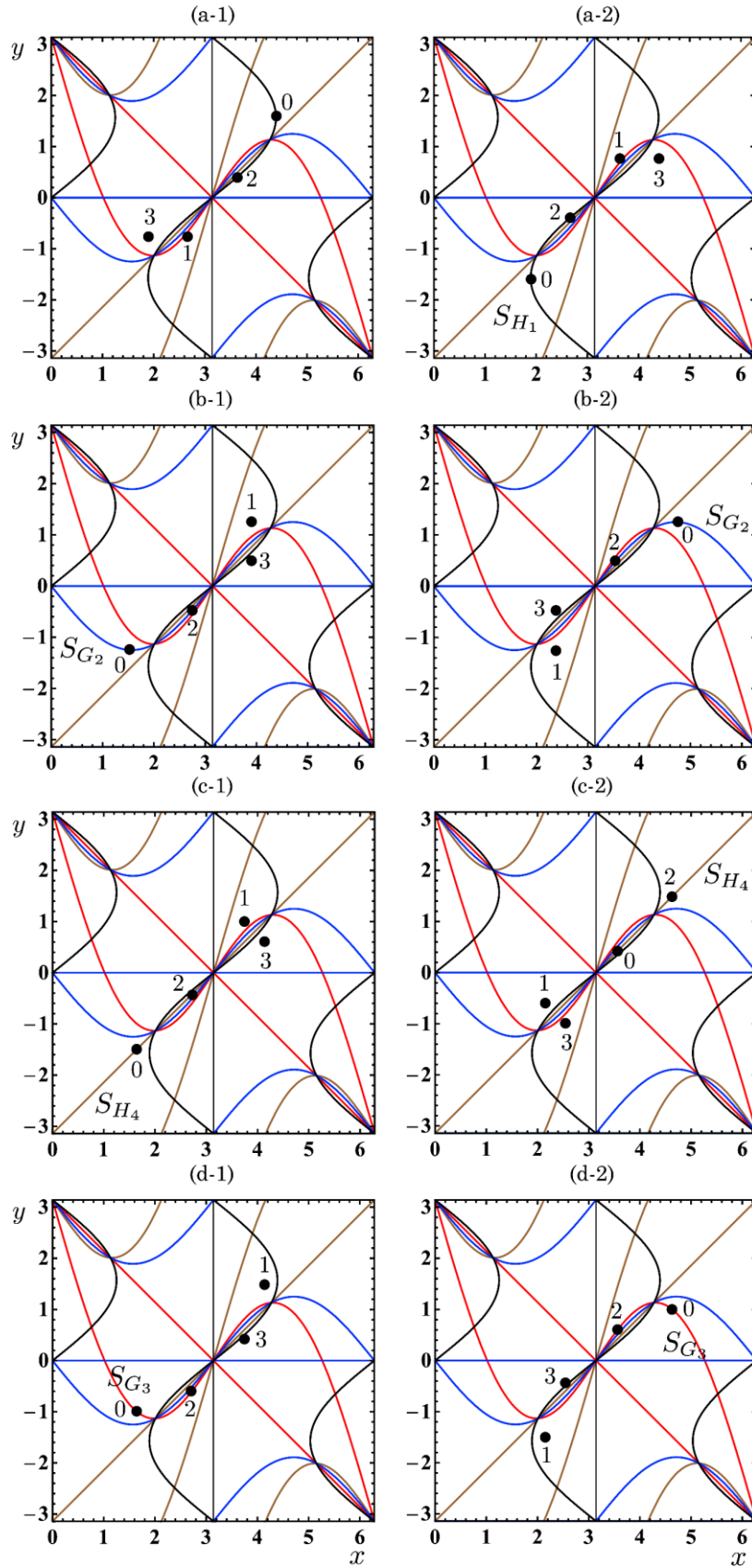


図 11：最初の二重周期倍分岐で生じた楕円型一重対称周期軌道 (a-1),(a-2),(b-1),(b-2)．最初の二重周期倍分岐で生じたサドル型一重周期軌道 (c-1),(c-2),(d-1),(d-2)．周期 4. $a = 2.5$.

5.4. 二重同周期分岐

二重同周期分岐が生じることが楕円型四重対称周期軌道の特徴である。命題 5.3 より、二重同周期分岐で生じる娘周期軌道は一重対称周期軌道である。

楕円型周期軌道は対称線 S_{H_1} 上と S_{G_2} 上に生じることが、数値計算結果で得られた (図 12 (a-1),(a-2),(b-1),(b-2))。これらの性質は二重周期倍分岐の場合と同じである。対称線 S_{H_1} 上と S_{G_2} 上それぞれ 2 個の軌道点が生じる。周期 2 の軌道点 z_0 と z_1 の周りにそれぞれ 4 個の軌道点が生じ、合計 8 個の軌道点が存在することになる。 T^2 を単位とするとポアンカレ指数の和は (+8) である。

サドル型周期軌道は対称線 S_{H_4} 上と S_{G_3} 上に生じる (図 12(c-1),(d-2),(d-1),(d-2))。周期 2 の軌道点 z_0 と z_1 の周りにそれぞれ 4 個の軌道点が生じ、合計 8 個の軌道点が存在することになる。 T^2 を単位とするとポアンカレ指数の和は (-8) である。

以上の結果をまとめる。ポアンカレ指数の和において、 $(+8) + (-8) = 0$ が成り立つから、周期 2 の母軌道点の安定性は二重同周期分岐の前後で変化しない。つまり、母軌道点の安定性は二重同周期分岐の直前は楕円型であったから、二重同周期分岐の直後も楕円型である。

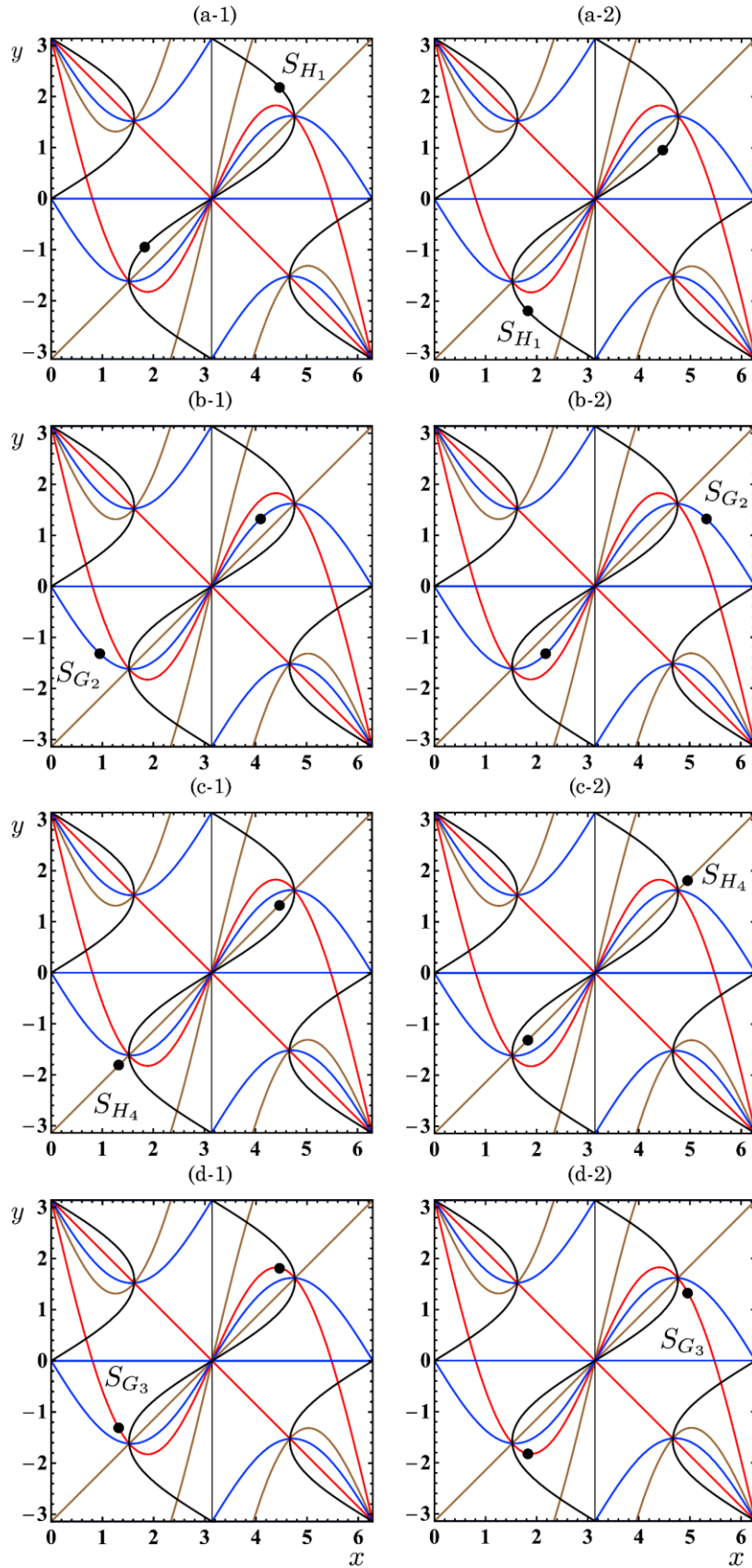


図 12：二重同周期分岐で生じた楕円型一重対称周期軌道 (a-1),(a-2),(b-1),(b-2). 二重同周期分岐で生じたサドル型一重周期軌道 (c-1),(c-2),(d-1),(d-2). 周期 2. $a = \pi + 0.1$.

5.5. 第 2 回目の二重周期倍分岐

第 2 回目の二重周期倍分岐で生じる娘周期軌道も，全て一重対称周期軌道である（図 13）．対称線 S_{H_1} 上と S_{G_2} 上に楕円型周期 4 周期軌道点が生じ，対称線 S_{H_4} 上と S_{G_3} 上にサドル型周期 4 周期軌道点が生じる．これらの性質は 第 1 回目の二重周期倍分岐と同じである．

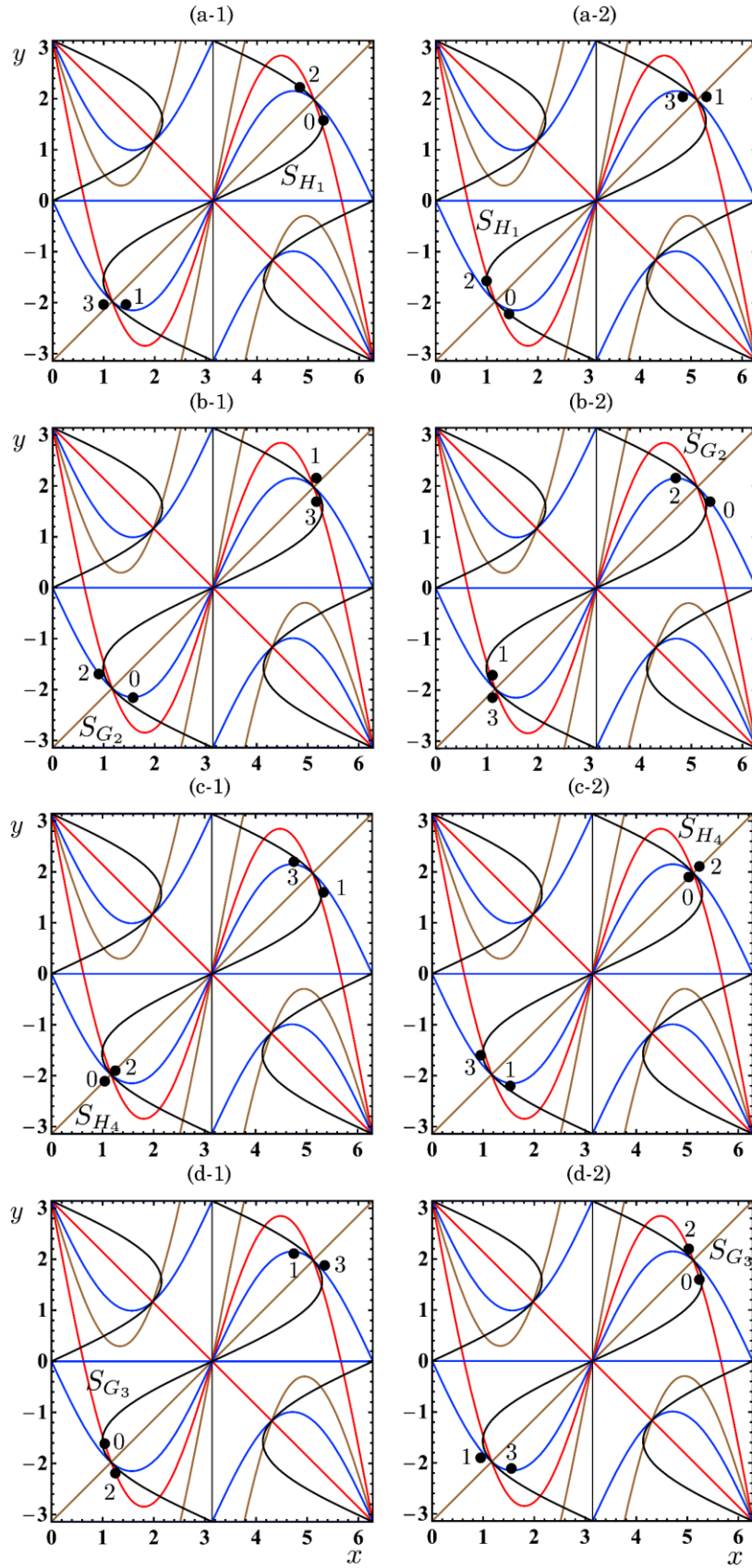


図 13：二重周期倍分岐で生じた楕円型一重対称周期軌道 (a-1),(a-2),(b-1),(b-2). 二重周期倍分岐で生じたサドル型一重周期軌道 (c-1),(c-2),(d-1),(d-2). 周期 4. $a = 4.2$.

5.6. 同周期分岐

最後の同周期分岐で生じる娘周期軌道は二重対称周期軌道である(命題 5.2(iii)). 周期 2 は表 2(b)の場合に相当し, 生じた二重対称周期軌道は対称線 S_{H_1} と S_{G_2} の交点に軌道点をもつ(図 14). 同周期分岐の後, 母軌道点はサドル型周期軌道点となる. パラメータを増加しても母軌道点の安定性は変わらないため W 字形分岐は同周期分岐で完了する.

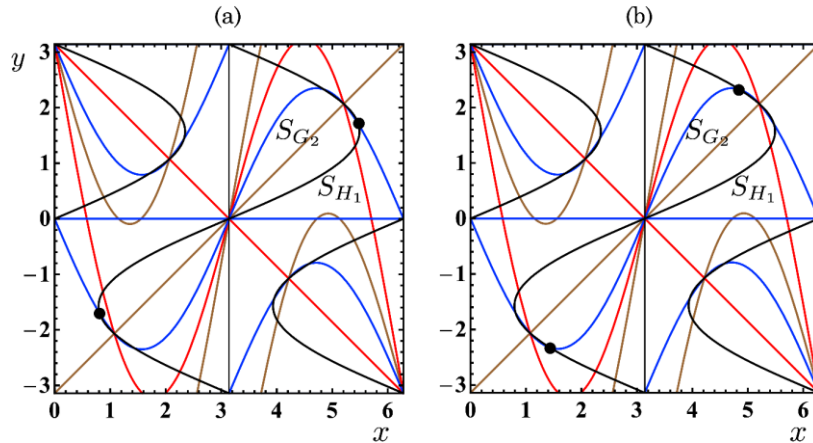


図 14: 同周期分岐で生じた楕円型二重対称周期軌道. 周期 2. $a = 4.7$.

6. W 字形分岐に関する解釈

W 字形分岐で安定性係数 $r(a)$ の変化を見ると, 二重周期倍分岐が生じるまでは母軌道点の周りの回転の仕方が速くなり, 二重周期倍分岐が生じた後は遅くなるのではないと思われる. また, 二重同周期分岐が生じた後は回転の仕方が再び速くなると考えられる. しかし, このような考えは誤りである. 母軌道点の周りの回転の仕方はパラメータの増大とともに増加しているのである. 例を用いてこの事実を説明する.

母軌道点として周期 2 の軌道点を考える. 母軌道点 z_0 は領域 $0 < x < \pi$ にあり, $z_1 = (x_1, y_1)$ は領域 $\pi < x < 2\pi$ にある. ここで, \hat{S}_{G_2} は対称線 S_{G_2} の $x \geq x_1$ を満たす部分とする. 図 15 には, 対称線 S_{G_2} , S_{H_4} ならびに像 $T^2\hat{S}_{G_2}$ を描いた. 母軌道点 z_1 に微小ベクトル v をおく. 対称線 S_{G_2} の接線方向で x 座標の増加する方向を微小ベクトル v の方向とする. 図 15では, 微小ベクトル v を太い矢印で描き, 像 T^2v は細い矢印で描いた.

楕円型不動点 Q_{10} の周期倍分岐の臨界値は $a_c(1/2) = 2$ である. この臨界値より a の値を増加する. 図 15(a)から図 15(l)までを順に追って, 像 T^2v の回転の仕方を観察してほしい. 微小ベクトル v と像 T^2v のなす角度を θ とする. 回転の方向は反時計回りであるから, 角度 θ も反時計回りに測る. 図(a)から図(d)まで回転角度 θ は増加する. 図(a)から(d)までの過程は, W 字形分岐における安定性係数 $r(a)$ の最初の減少部分に対応している. 図(d)($a = 2.3$)での回転角 θ は 180 度に少し足りない. 図(e)($a = 2.5$)での回転角 θ は 180 度を越している. これは, 周期 2 が二重周期倍分岐を起こした後の状況である. 図(f)($a = 2.8$)では, 回転角 θ は 270 度を越している. これらの状況は, 安定性係数 $r(a)$ の最初の増加部分に対応している. 図(g)では回転角 θ はほぼ 360 度で, 図(h)では回転角 θ は 360 度以上である. 図(g)と図(h)の間で二重同周期分岐が生じている.

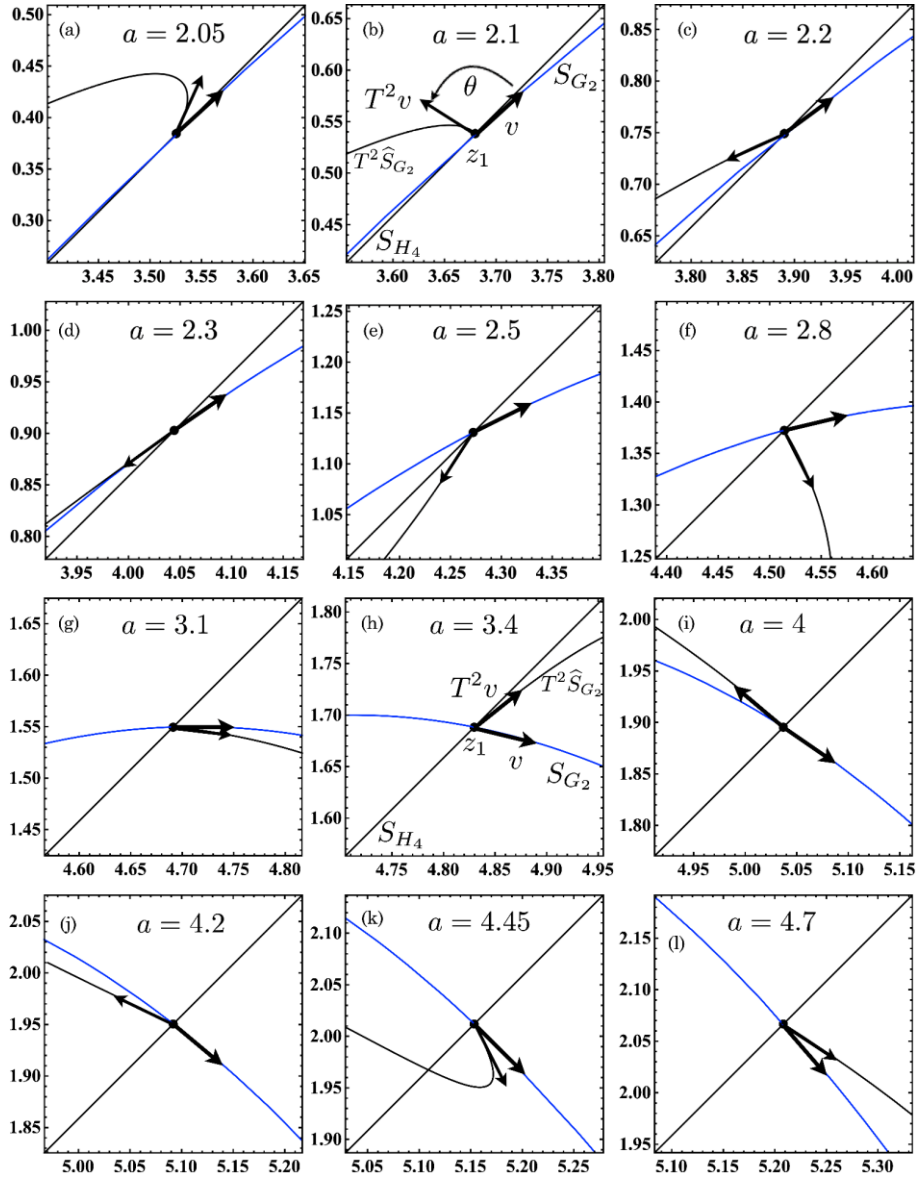


図 15：微小ベクトル v と像 T^2v の関係。

二重同周期分岐が生じた後では、安定性係数 $r(a)$ は再び減少する。像 T^2v は軌道点 z_1 の周りを 360 度以上回転している。図(i)と図(j)の間で 2 回目の二重周期倍分岐が生じている。2 回目の二重周期倍分岐が生じた後、安定性係数 $r(a)$ は増加する。図(k)と図(l)の間で同周期分岐が生じている。図(l)では像 T^2v は z_1 の周りを二回転以上している。以上の結果より、二重周期倍分岐と二重同周期分岐を性質 6.1 のように再解釈できる。これより、定理 6.2 が得られる。

性質 6.1. 回転数と周期は写像 T^2 を単位とする。

- (1) 最初の二重周期倍分岐は、回転数 $1/2$ の回転分岐で周期 4 が生じたことと同等である。
- (2) 最初の二重同周期分岐は、回転数 $1/1$ の回転分岐で周期 2 が生じたことと同等である。
- (3) 二度目の二重周期倍分岐は、回転数 $3/2$ の回転分岐で周期 4 が生じたことと同等である。

定理 6.2. 楕円型対称周期軌道の周期を q とし、回転数は T^q を単位とする。楕円型四重対称周

期軌道における W 字形分岐の場合, 回転分岐の回転数区間は $(0,2)$ である.

7. 結語

四重可逆面積保存ハーパー写像において本論文で得られた結果を簡単にまとめる.

- (1) 四重対称周期軌道の特徴付けるために, 対合表現を導入した. 一周分分の写像は, 左対合, 恒等写像, そして右対合に分解される.
- (2) 楕円型四重対称周期軌道の安定性係数 $r(a)$ は W 字形を示すことが得られた. W 字形によって楕円型四重対称周期軌道の分岐が決定される.
- (3) 楕円型四重対称周期軌道の回転分岐の回転数区間は区間 $(0,2)$ である.

謝辞

本論文に対して査読者より多くの貴重なコメントをいただきました. 心より感謝いたします.

参考文献

- [1] 山口喜博, 二重可逆面積保存写像における二重対称周期軌道, 形の科学会誌, 第 34 巻, 第 1 号 (2019), 13-42. <https://katachi-jp.com/gakkaishi>
- [2] Harper, P. G., Single band motion of conduction electrons in a uniform magnetic field, Proc. Soc. London A8 (1955), 874-878.
<https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0370-1298/68/10/304/meta>
- [3] Yamaguchi, Y. and Tanikawa, K., Periodic orbits in the quadruply reversible non-twist Harper map, Prog. Theor. Phys. 111 (2004), 757-762.
<https://academic.oup.com/ptp/article/111/5/757/1875581>
- [4] Birkhoff, G. D., *Dynamical systems*. American Mathematical Society, Colloquium Publications, Vol.9. (AMS, 1966). Revised edition.
<https://archive.org/details/dynamicalsystems00birk/page/n7>
- [5] 山口喜博, 谷川清隆, 馬蹄への道 (共立出版, 2016).

標準写像における異常回転分岐

山口喜博

〒290-0073 千葉県市原市国分寺台中央 2-4-14

chaosfractal@iCloud.com

Anomalous rotation bifurcation in the standard map

Yoshihiro Yamaguchi

2-4-14 Kokubunjidai-Chuo, Ichihara, Chiba 290-0073, Japan

(2020 年 7 月 23 日受付, 2020 年 9 月 15 日受理)

Abstract: The anomalous rotation bifurcation in the standard map T on cylinder is discussed. The elliptic fixed point Q of T undergoes the ordinary rotation bifurcation and the period-doubling bifurcation. As a result, the elliptic daughter periodic orbit with the rotation number p/q ($0 < p/q \leq 1/2$) appears. This orbit is represented as p/q -BE. We study whether the anomalous bifurcation of p/q -BE occurs. Let $p/q:r/s$ -BE (BS) be the elliptic (saddle) periodic orbit appearing through the ordinary or anomalous rotation bifurcation of p/q -BE. The period of $p/q:r/s$ -BE (BS) is qr . We prove that the doubly symmetric periodic orbit $1/2:2/3$ -BE (BS) appears through the anomalous rotation bifurcation of $1/2$ -BE and the singly symmetric periodic orbit $1/2:1/3$ -BE (BS) appears through the ordinary rotation bifurcation of $1/2$ -BE.

Keywords: Standard map, Symmetric periodic orbit, Ordinary and anomalous rotation bifurcations

1. 本論文の目的

面積保存写像における楕円型周期軌道点はパラメータを増加すると回転分岐ならびに周期倍分岐を起こすことはよく知られている [1]. 回転分岐には正常回転分岐と異常回転分岐 [1, 2, 3] があることを, 図 1 と 2 を用いて説明する. パラメーターの増加につれて考えている楕円型不動点 Q の近傍の回転の仕方は速くなるとする. 正常回転分岐が生じる場合, 楕円点の近傍の回転の仕方は楕円点から離れるにつれて遅くなる. これは楕円点の近傍の回転の仕方の単調ねじれ性を意味している. 図 1(a) で回転数として $1/4$ と書いてあるあたりに, 回転数 $1/4$ の周期軌道点が存在する. この場合, 回転数 $1/4$ の周期軌道点は楕円型不動点 Q から生じて, パラメーターの増加につれて楕円点から離れていく. 回転数 $1/4$ の周期軌道が生じる臨界値を $a_c(1/4)$ をすると, $a > a_c(1/4)$ で回転数 $1/4$ の周期軌道点が存在する (図 2(a)).

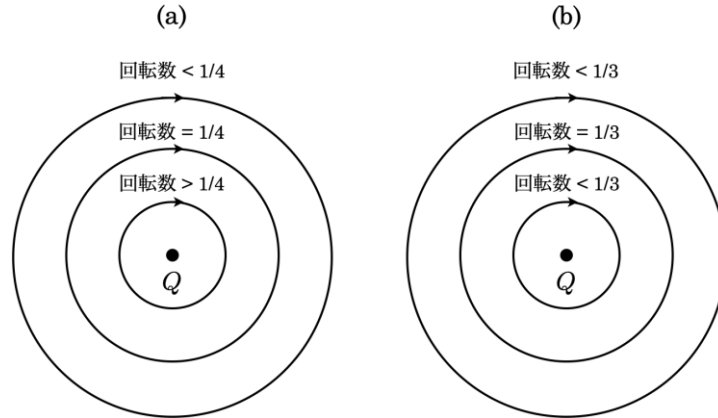


図 1: (a) 正常回転分岐における楕円型不動点 Q の近傍の運動. (b) 異常回転分岐における楕円型不動点 Q の近傍の運動.

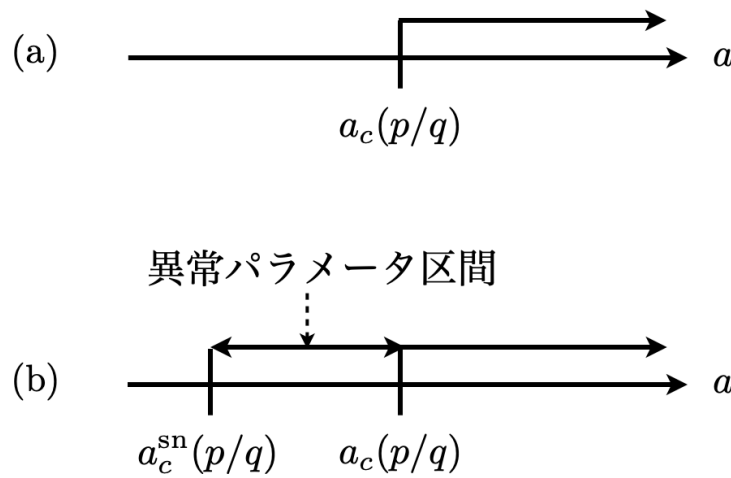


図 2: (a) 正常回転分岐. $a > a_c(p/q)$ において, p/q -B が存在する. (b) 異常回転分岐における異常回転区間.

次に異常回転分岐について説明する. 異常回転分岐が生じる場合, 楕円型不動点 Q の近傍の回転の仕方は楕円点から離れるにつれて速くなり, 途中から遅くなる. 回転数として $1/3$ と書いてあるあたりに回転数 $1/3$ の周期軌道点が存在する (図 1(b)). この場合, 回転数 $1/3$ の周期軌道点は楕円型不動点 Q から離れた領域で生じる. 生じ方はサドルノード分岐で, 楕円型周期軌道点とサドル型周期軌道点が生じる. 臨界値を $a_c^{sn}(p/q)$ とする. パラメーターを $a_c^{sn}(p/q)$ より増加すると, サドル型周期軌道点が楕円型不動点 Q に向けて近づき, 楕円型周期軌道点は生じた地点から遠ざかっていく. $a = a_c(p/q)$ で, サドル型周期軌道点と Q が一致する. $a > a_c(p/q)$ でサドル型周期軌道点は楕円型不動点 Q から出て, Q から離れる. この場合, 異常回転パラメータ区間 $[a_c^{sn}(p/q), a_c(p/q))$ が定義できる (図 2(b)). 異常回転パラメータ区間では楕円点の周りの単調ねじれ性が破れている. 実際, 楕円点から離れると回転の仕方が楕円点より速くなる. サドル型周期軌道点を過ぎると回転の仕方は遅くなる. このような楕円点の周りの単調ねじれ性の破れによって, 異常回転分岐が生じることがわかる. 議論すべき問題は, 楕円点の周りの単調ねじれ性の破れが生じる原因である. 以下の議論では, 回転分岐 (Rotation bifurcation) を正常回転分岐 (Ordinary rotation bifurcation) と異常回転分岐 (Anomalous rotation bifurcation) の総称として利用する.

円筒面 $(0 \leq x < 2\pi, -\infty < y < \infty)$ で定義された標準写像を紹介する [4].

$$T : y_{n+1} = y_n + f(x_n), \quad x_{n+1} = x_n + y_{n+1} \pmod{2\pi}. \quad (1)$$

ここで, $f(x) = a \sin x$ ($a \geq 0$).

写像 T ($a > 0$) では, $f(x) = 0$ と $y = 0$ を満たす周期軌道点が不動点である. 標準写像において, 不動点は $P = (0, 0)$ と $Q = (\pi, 0)$ である. 不動点 P はサドル型不動点である. 不動点 Q は, $0 < a < 4$ において楕円型不動点で, $a > 4$ では反転を伴うサドル型不動点である.

対称周期軌道を定義するために写像 T の対合表現を導入する. 第一の対合表現を示す. 式 (1) の表現では, 第一の対合表現 $T = h \circ g$ は常に可能である. 写像 T は二つの対合と呼ばれる写像の合成で記述される. 記号 \circ の右側にある対合 g を先に作用し, 次に対合 h を作用する. 以下で対合の表式を示す.

$$g \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y - f(x) \\ x \end{pmatrix}, \quad h \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x - y \end{pmatrix}. \quad (2)$$

写像関数 $f(x)$ が奇関数であることにより, 次の第二の対合表現 $T = H \circ G$ も可能である.

$$G \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y + f(x) \\ -x \pmod{2\pi} \end{pmatrix}, \quad H \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ y - x \pmod{2\pi} \end{pmatrix}. \quad (3)$$

ここで, $g \circ g = h \circ h = G \circ G = H \circ H = id.$

対合は面積保存であるが方向反転写像である. 対合の不動点の集合が対称線である.

$$S_g : y = -f(x)/2, \quad (4)$$

$$S_h : y = 0, \quad (5)$$

$$S_G : x = 0, \quad x = \pi, \quad (6)$$

$$S_H : y = 2x, \quad y = 2(x - \pi). \quad (7)$$

円筒面で定義された標準写像における四つの対称線を図 3 に描いたので参考にして欲しい.

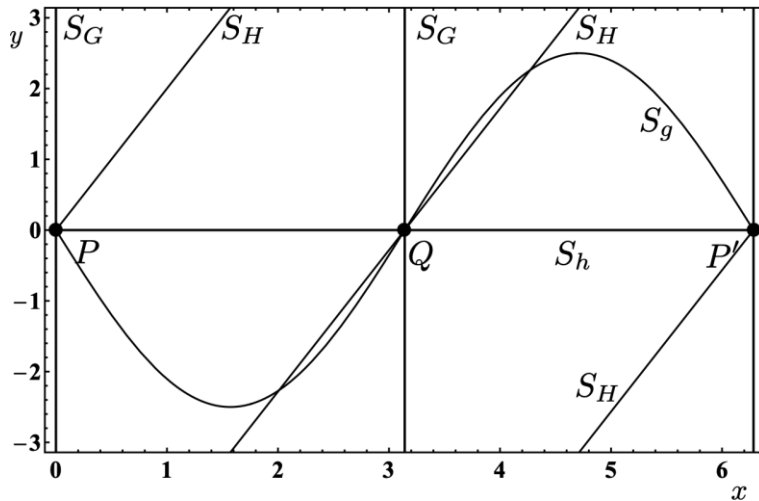


図 3 : 円筒面で定義された標準写像における対称線. $P = (0, 0)$ と $Q = (\pi, 0)$ は不動点. $P' = (2\pi, 0)$. 円筒面では $P = P'$. S_g と S_h は上下の対称線, S_G と S_H は左右の対称線. $a = 5$.

対合による周期軌道点の動きは対称線に関する反転である. よって対合による周期軌道点の動きより, S_g と S_h を上下の対称線と呼び, S_G と S_H を左右の対称線と呼ぶ. 写像が対合の積で表現される場合, 系はバーコフの意味での可逆性をもつという [1]. 上記のように二種類の異なった対合の積で表現される写像は, 二重可逆写像と呼ばれる. 二重可逆写像には一重対

称周期軌道と二重対称周期軌道が存在する [5]. 対称線を利用して対称周期軌道と非対称周期軌道を定義し, 次に一重対称周期軌道と二重対称周期軌道を定義する.

定義 1.1 (対称周期軌道と非対称周期軌道の定義). 対称線上に軌道点をもつ軌道を対称軌道という. 対称軌道が対称線上に偶数個の軌道点をもつならば, この軌道は対称周期軌道と呼ばれる. 本論文では不動点は対称周期軌道に含めず, 不動点として扱う. 対称線上に軌道点をもたない周期軌道を非対称周期軌道と定義する.

定義 1.2 (一重対称周期軌道の定義). 上下の対称線のみ軌道点をもつ周期軌道を一重上下対称周期軌道と定義する. また, 左右の対称線のみ軌道点をもつ周期軌道を一重左右対称周期軌道と定義する. これらをまとめて一重対称周期軌道と呼ぶ.

周期軌道が対称線上に軌道点をひとつもつと, 別の軌道点が対称線上にあるという性質がある. そのため一重対称周期軌道は対称線上に二つ軌道点をもつ. 二つの軌道点が一点になった場合が不動点である.

定義 1.3 (二重対称周期軌道の定義). 上下と左右の対称線上に軌道点をもつ周期軌道を二重対称周期軌道と定義する.

二重対称周期軌道は上下の対称線上に二つ軌道点をもちかつ左右の対称線上に二つ軌道点をもつ. すなわち二重対称周期軌道は対称線上に四つ軌道点をもつ. 四つの軌道点が二点になった場合は周期 2 の軌道点であり, 四つの軌道点が一点になった場合が不動点である.

楕円型不動点 Q が回転分岐を起こして生じた娘周期軌道を p/q -B ($0 < p/q < 1/2$) と書く (B は Birkhoff を意味する). p/q -B は楕円型娘周期軌道 p/q -BE と, サドル型娘周期軌道 p/q -BS の総称である. ここで, E は Elliptic を意味し, S は Saddle を意味する. 楕円型不動点 Q が周期倍分岐を起こして生じた楕円型娘周期軌道を $1/2$ -BE と書く. これらの周期軌道について性質 1.4 が成り立つ. 詳細は参考文献 [5] を見られたい.

性質 1.4.

- (1) 周期 q が偶数の場合, p/q -B と $1/2$ -BE は二重対称周期軌道である.
- (2) 周期 q が奇数の場合, p/q -B は一重対称周期軌道である.

ここで本論文の目的をまとめ, 次に以下の節の内容を簡単に紹介する.

目的 1.5. 楕円型不動点 Q が回転分岐または周期倍分岐を起こして生じた楕円型娘周期軌道 p/q -BE の回転分岐を調べること.

第 2 節. 本論文で使用する数学的道具について説明する.

第 3 節. 楕円型娘周期軌道 p/q -BE の回転分岐について数値計算で得られた結果を紹介する.

第 4 節. 数値計算で得られた結果の一部に証明を与え, 定理 4.1 と命題 4.5 とする.

第 5 節. 本論文で得られた結果をまとめる.

2. 数学的道具

2.1. 周期軌道の安定性係数

周期軌道の安定性を判断する方法を紹介する．ここで $q (\geq 1)$ を周期軌道の周期とする．周期 q の周期軌道点を $z_k = (x_k, y_k)$ ($0 \leq k \leq q-1$) とする．軌道点 z_k における線形化行列 $M(z_k)$ は

$$M(z_k) = \begin{pmatrix} 1 & f'(x_k) \\ 1 & 1 + f'(x_k) \end{pmatrix} \quad (8)$$

と得られる．ここで, $f'(x_k) = a \cos x_k$. 面積保存写像であるから, $M(z_k)$ の行列式は 1 である．

写像 T^q の線形化行列を $M_q = M(z_{q-1}) \cdots M(z_1)M(z_0)$ とすると, 固有値 λ を決定する方程式

$$\lambda^2 - r(a)\lambda + 1 = 0 \quad (9)$$

が得られる．係数 $r(a) = \text{Trace} M_q$ を安定性係数と呼ぶ．式(9)の解である固有値を λ_{\pm} と書く．回転数 p/q の周期軌道が正常回転分岐が生じる場合, 下記の関係が成立する．

$$\lambda_{\pm} = \frac{r(a) \pm i\sqrt{4 - r^2(a)}}{2} = \cos(2\pi p/q) \pm i \sin(2\pi p/q). \quad (10)$$

この式より安定性係数 $r(a)$ と回転数 p/q の関係が得られる．

$$r(a) = 2\cos(2\pi p/q). \quad (11)$$

2.2. 傾き等の写像

式(1)の第 1 式と第 2 式の両辺を x_n で微分すると, 下記の二式が得られる．

$$\frac{dy_{n+1}}{dx_n} = \frac{dx_{n+1}}{dx_n} \frac{dy_{n+1}}{dx_{n+1}} = \frac{dy_n}{dx_n} + f'(x_n), \quad (12)$$

$$\frac{dx_{n+1}}{dx_n} = \frac{dy_n}{dx_n} + f'(x_n) + 1. \quad (13)$$

点 $z_n = (x_n, y_n)$ が曲線 $y = F(x)$ 上にあるとする．点 z_n における曲線の傾きを表す変数 $\xi_n = dF(x_n)/dx_n = dy_n/dx_n$ を導入する．式(13)より, 傾き ξ_n が従う写像が得られる．

$$\xi_{n+1} = \frac{\xi_n + f'(x_n)}{\xi_n + f'(x_n) + 1}. \quad (14)$$

傾きの写像の両辺を x_n で微分すると, 曲線 $y = F(x)$ の点 z_n における二階微分係数 $\eta_n = d\xi_n/dx_n$ が従う写像が得られる．

$$\eta_{n+1} = \frac{\eta_n + f''(x_n)}{(\xi_n + f'(x_n) + 1)^3}. \quad (15)$$

ここで $d\xi_{n+1}/dx_n = (dx_{n+1}/dx_n)(d\xi_{n+1}/dx_{n+1}) = \eta_{n+1}(dx_{n+1}/dx_n)$ を利用した．

次に二階微分係数の写像の両辺を x_n で微分すると, 曲線 $y = F(x)$ の点 z_n における三階微分係数 $\zeta_n = d\eta_n/dx_n$ が従う写像が得られる．

$$\zeta_{n+1} = \frac{\zeta_n + f'''(x_n)}{(\xi_n + f'(x_n) + 1)^4} - \frac{3(\eta_n + f''(x_n))^2}{(\xi_n + f'(x_n) + 1)^5}. \quad (16)$$

ここで $d\eta_{n+1}/dx_n = (dx_{n+1}/dx_n)(d\eta_{n+1}/dx_{n+1}) = \zeta_{n+1}(dx_{n+1}/dx_n)$ を利用した．

以上の式で, $f'(x_n) = a \cos x_n$, $f''(x_n) = -a \sin x_n = -f'(x_n)$, $f'''(x_n) = -f''(x_n)$. ここで得られた写像を利用するためには軌道点 z_n の情報と傾き等の初期値の情報が必要である．

2.3. 異常回転分岐が生じるための必要条件

楕円型不動点 Q が異常回転分岐が生じるための必要条件を提示しよう。写像 T で Q の周りを回転する周期軌道の回転方向は、図 4(a)では時計回りで、図 4(b)では反時計回りである。

図 4(a)に描かれた対称線の像は対称線の左側にある。パラメータの増大にともない Q における対称線の像の傾きが対称線の傾きに近づく。対称線と対称線の像の曲率は共に正である。正常回転分岐では Q から周期軌道点が生じることに注意しよう。もし、対称線の曲率がゼロであったり負であると対称線の像の傾きが対称線の傾きが一致した後、対称線と対称線の像の交差点は Q より生じ Q より離れていく。対称線と対称線の像の交差点が回転分岐で生じた周期軌道の軌道点の一つである。これより異常回転分岐が生じるためには、対称線の曲率も正であることが必要であることが導かれる。つまり図 4(a)が出現するならば、異常回転分岐が生じる可能性がある。異常回転分岐では、 Q から離れた位置でサドルノード分岐でサドル型周期軌道と楕円型周期軌道が出現することを再度注意しておく。

図 4(b)に描かれた対称線の像は対称線の右側にある。パラメータの増大にともない Q における対称線の像の傾きが対称線の傾きに近づき回転分岐が生じる。この場合では対称線と対称線の像の曲率は共に負である。このような場合にも異常回転分岐が生じる可能性がある。

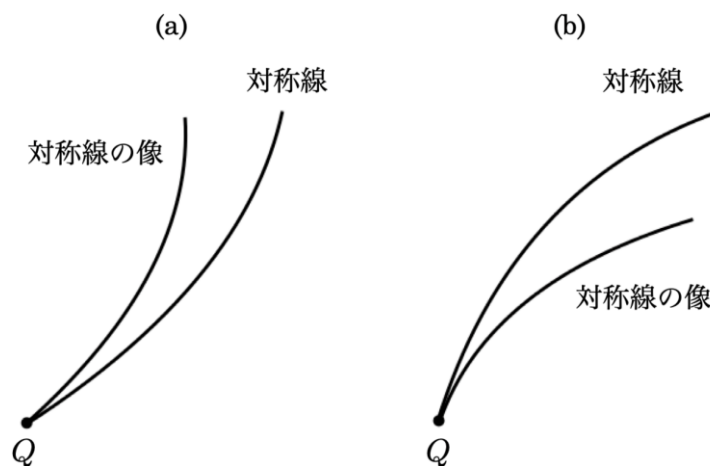


図 4：異常回転分岐が生じる可能性がある配置。(a) 写像による Q の周りの回転方向が時計回りの場合。楕円型不動点 Q における対称線と対称線の像の曲率が共に正。(b) 写像による Q の周りの回転方向が反時計回りの場合。楕円型不動点 Q における対称線と対称線の像の曲率が共に負。

楕円型不動点 Q を一般の楕円型軌道点 z とした場合における異常回転分岐を起こすために必要な条件を条件 2.1 としてまとめておく [3]。

条件 2.1. 異常回転分岐を起こすために必要な条件は、楕円型軌道点 z の周りの回転の仕方が(反)時計回りの場合の場合、曲率が正(負)の対称線と曲率が正(負)の対称線の像が軌道点 z を通過していることである。

エノン写像族に含まれる写像では、楕円型不動点 Q の周りの回転の仕方は時計回りである。図 4(a)の場合が該当し、回転数 $1/3$ の対称周期軌道が異常回転分岐で Q より生じることが示されている [3]。標準写像でも、楕円型不動点 Q の周りの回転の仕方は時計回りである。標準写

像では Q を通過する対称線で Q における曲率が正の対称線は存在しない。よって、標準写像では条件 2.1 が満たされないため、 Q は異常回転分岐を起こさない。これは重要な結果であるので命題 2.2 とする。

命題 2.2. 標準写像 T において、楕円型不動点 Q は異常回転分岐を起こさない。

3. 数値計算結果

二重対称周期軌道 $1/2$ -BE は楕円型不動点 Q の周期倍分岐で生じる。ここでは $1/2$ -BE の回転分岐を調べる。手順を説明する。パラメータ a を決め、最初に $1/2$ -BE の軌道点を求める。次に軌道点の情報より安定性係数 $r(a)$ を決定する。これらは全て数値計算で実施する。

既に述べたように、楕円型不動点 Q の(一次の)回転分岐により p/q -BE が生じる。そして p/q -BE の回転分岐は二次の回転分岐と呼ばれる。二次の回転分岐で回転数 r/s が生じた場合、この周期軌道を回転数 $p/q:r/s$ の周期軌道と呼び、 $p/q:r/s$ -B と書く。ここで回転数 r/s は T^q を単位として測った回転数である。回転数 $p/q:r/s$ の周期軌道の実際の周期は qs である。 $p/q:r/s$ -B は、楕円型周期軌道 $p/q:r/s$ -BE とサドル型周期軌道 $p/q:r/s$ -BS の総称である。楕円型不動点 Q を太陽に喩え、 $1/2$ -BE を地球に喩えるならば、 $p/q:r/s$ -B は地球の衛星である月に喩えられる。

$1/2$ -BE の安定性係数 $r(a)$ の a 依存性を図 5 に示した。 $1/2$ -BE は $a > 4$ において存在する。よって、 a を 4 より増加すると安定性係数 $r(a)$ は $r(a) = -2$ まで減少する。その後、増加する。 $1/2$ -BE は二重対称周期軌道であるため、 $r(a) = -2$ を満たす a の値で周期倍分岐を起こさない [5]。

$1/2$ -BE の回転分岐を調べるため T^2 を単位として周期と回転数を測る。回転数 $1/3$ と $2/3$ の周期軌道が回転分岐で $1/2$ -BE より生じる。 $1/2:1/3$ -B (図 5 における $1/2:1/3$) は正常回転分岐で生じ、臨界値は $a_c(1/2:1/3) = 4.5185$ であることが数値計算で得られた。一方、 $1/2:2/3$ -B は異常回転分岐で生じる。臨界値は $a_c(1/2:2/3) = 5.6620$ である(図 5 における $1/2:2/3$)。この周期軌道は $a_c(1/2:2/3)$ より少し小さな a の値でサドルノード分岐で生じることを注意しておく。

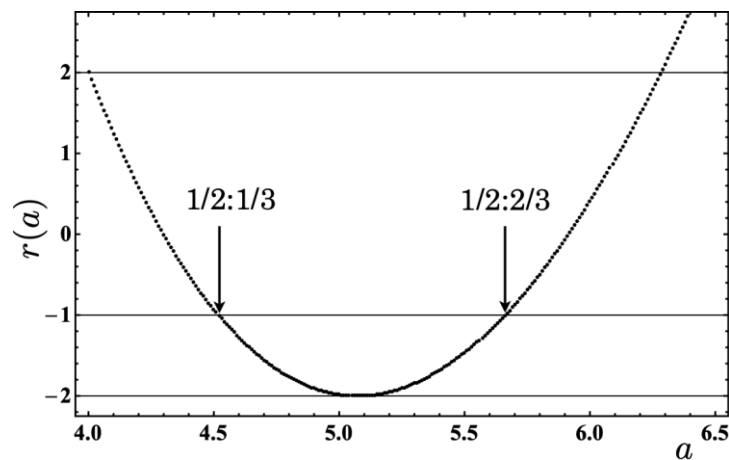


図 5 : $1/2$ -BE の安定性係数 $r(a)$ の a 依存性。 $1/2:1/3$ と $1/2:2/3$ の意味は本文を見よ。

最初に1/2:1/3-B について調べるために，一重対称周期軌道に対する T^6 の下記の対合表現を利用する．

$$T^6 = H \circ GT^5. \quad (17)$$

右対合 GT^5 に関して不変な集合は $T^{-3}S_H$ である．

$$GT^5(T^{-3}S_H) = GT^2S_H = T^{-2}GS_H = T^{-2}GHS_H = T^{-3}S_H. \quad (18)$$

これより，1/2:2/3-B は $S_H \cap T^{-3}S_H \neq \emptyset$ に軌道点を持つ．これは $T^3S_H \cap S_H \neq \emptyset$ とも書ける．

対合による分解として

$$T^6 = T^5h \circ g \quad (19)$$

も可能である．対合 T^5h について不変な集合は T^3S_g である．よって， $T^3S_g \cap S_g \neq \emptyset$ が得られる．

周期軌道1/2:1/3-BS が正常回転分岐で生じる様子を図6に示した．対称線の像 $T^3S_H^-$ と対称線 S_H^+ の交点に1/2-BEと1/2:1/3-BSの軌道点はある．ここで， S_H^+ は $y = 2(x - \pi)$ ($y > 0$)であり， S_H^- は $y = 2(x - \pi)$ ($y < 0$)である．図6(a)では，像 $T^3S_H^-$ の1/2-BEの軌道点における傾きは対称線 S_H^+ の傾きより小さい． a を増加すると像 $T^3S_H^-$ の傾きは増加し(図6(b))，対称線 S_H^+ と接触するようになる(図6(c))．接触の仕方は三次関数的である．三次関数的接触とは，像 $T^3S_H^-$ と対称線 S_H^+ の両者の傾きと二階微分係数が等しく，三階微分係数が異なる接触を意味する．図6(c)において，像 $T^3S_H^-$ の三階微分係数は負で，対称線 S_H^+ の三階微分係数はゼロである．1/2-BEの軌道点における対称線の像 $T^3S_H^-$ の傾きと，対称線 S_H^+ の傾きが等しくなる場合(図6(c))が正常回転分岐の臨界値を与える．図6(d)では，像 $T^3S_H^-$ と対称線 S_H^+ と三点で交差する．1/2-BEの軌道点から生じた二点の安定性を調べて，これらがともにサドル型であることが分かったので，これらを1/2:1/3-BS と書く．

1/2-BEの軌道点から対称線 S_g^+ 上には楕円型軌道点が二つ生じることを注意しておく(図7)．これらを1/2:1/3-BE と書く．

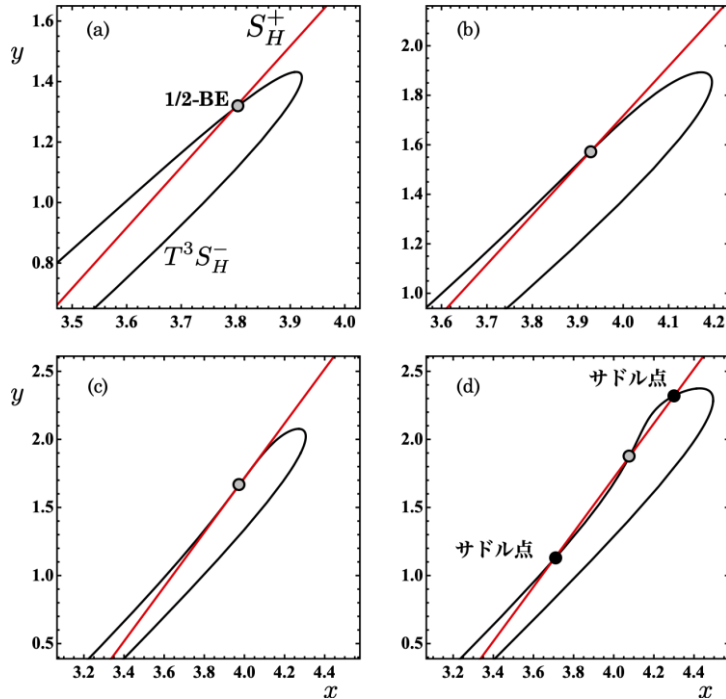


図6：1/2:1/3-BS は正常回転分岐で生じる．(a) $a = 4.3$ ，(b) $a = 4.45$ ，(c) $a = 4.5185$ ，(d) $a = 4.65$ ．

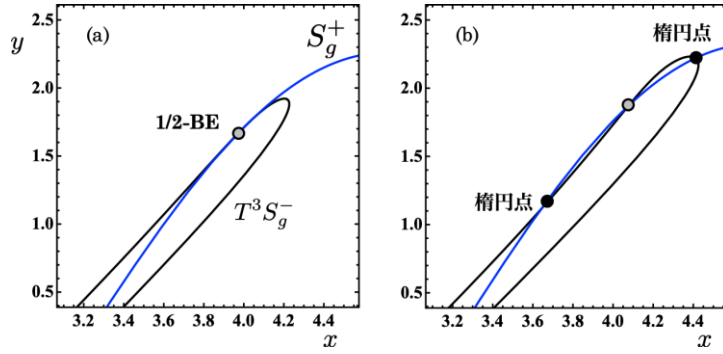


図 7 : 1/2:1/3-BO は正常回転分岐で生じる. (a) $a = 4.5185$, (b) $a = 4.65$.

正常回転分岐の前後におけるポアンカレ指数[1]を調べる. ここでは写像として T^4 を利用する. T^2 に関して楕円型である1/2-BO は, T^4 に関して楕円型である. 分岐前では, 1/2-BO の軌道点のみであるからポアンカレ指数は(+1)である. 分岐後では, サドル型軌道点(1/2:1/3-BS)と楕円型軌道点(1/2:1/3-BO)がともに 2 個生じる. これらのポアンカレ指数は T^4 に関して, $2 \times (-1)$ と $2 \times (+1)$ である. これらの和は(0)である. ポアンカレ指数は分岐の前後で保存されるから, 1/2-BO の軌道点のポアンカレ指数は(+1)である. 正常回転分岐が生じても, 1/2-BO の軌道点の安定性は楕円型で変化しないことが導かれた.

ここで行なった議論を1/2:1/2-BS と1/2:1/2-BO が生じる場合についても行える. 結果として1/2:1/2-BO が生じても1/2-BO の軌道点の安定性は楕円型で変化しないことが示せる. これより, 図 5 で安定性係数 $r(a)$ が(-2)より小さくならないことが導かれる.

図 6(c)より, 正常回転分岐が生じるための条件が得られる. 1/2-BO の軌道点 z_0 における対称線 S_H の傾きを $\xi_g (= 2)$ とし, 二階微分係数を $\eta_g (= 0)$ とし, 三階微分係数を $\zeta_g (= 0)$ とする. 同様に対称線の像の傾きを ξ とし, 二階微分係数を η とし, 三階微分係数を ζ とする. 図 6(c)から $\xi = \xi_g$, $\eta = \eta_g$ が得られる. 三階微分係数については $\zeta < 0 (= \zeta_g)$ が成り立つ. このような条件が成り立つ場合, 正常回転分岐が生じる. 言い換えると三次関数的接触状況の出現が正常回転分岐が生じるための条件である.

次に周期軌道1/2:2/3-B は異常回転分岐で生じることを説明する. 図 8 に描いた周期軌道は1/2:2/3-BO で二重対称周期軌道である. 周期 $q = 2 \times 3$ が二重対称周期軌道であることを考慮して対合表現を与える[5].

$$T^6 = T^2 H \circ G T^2 h \circ g. \quad (20)$$

左対合 $T^2 H$ に関して不変な集合が TS_H である ($T^2 H(TS_H) = T^2 T^{-1} H S_H = TS_H$).

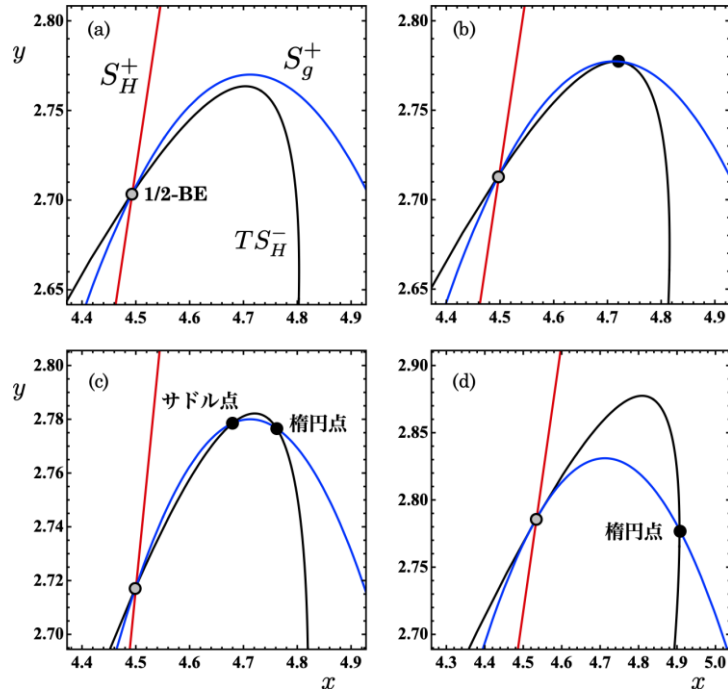


図 8 : 1/2:2/3-B は異常回転分岐で生じる . (a) $a = 5.54$, (b) $a = 5.5547$, (c) $a = 5.56$, (d) $a = 5.6620$.

図 8(a)では, 対称線の像 TS_H^- は対称線 S_g^+ と交差している. この点は1/2-BEの軌道点である. 像 TS_H^- の交点での傾きは対称線 S_g^+ の傾きより小さい. 図 8(b)では, 対称線の像 TS_H^- が対称線 S_g^+ と接触している. 接触点は1/2-BEの軌道点より離れていることに注意しよう. この状況が異常回転分岐の臨界点で生じる. 臨界値を $a_c^{sn}(1/2:2/3)$ とする. 接触点より楕円点とサドル点が生じる. パラメータ a の増加に伴いサドル点は1/2-BEの軌道点に向けて移動する(図 8(c)). 楕円点は右側に離れていく. サドル点と1/2-BEの軌道点と一致した状況が正常回転分岐の臨界点である(図 8(d)). 臨界値を $a_c(1/2:2/3)$ とする. 図 8(c)から図 8(d)までの区間を異常回転パラメータ区間 $[a_c^{sn}(1/2:2/3), a_c(1/2:2/3)]$ とする. ポアンカレ指数を利用すると, 異常回転分岐が生じても1/2-BEの軌道点の安定性は楕円型で変化しないことが導ける. 詳細は省く. 1/2-BEの軌道点(z_0 と z_1)と, 1/2:2/3-BEの軌道点($w_k, 0 \leq k \leq 5$)を図 9に描いたので参考にして欲しい.

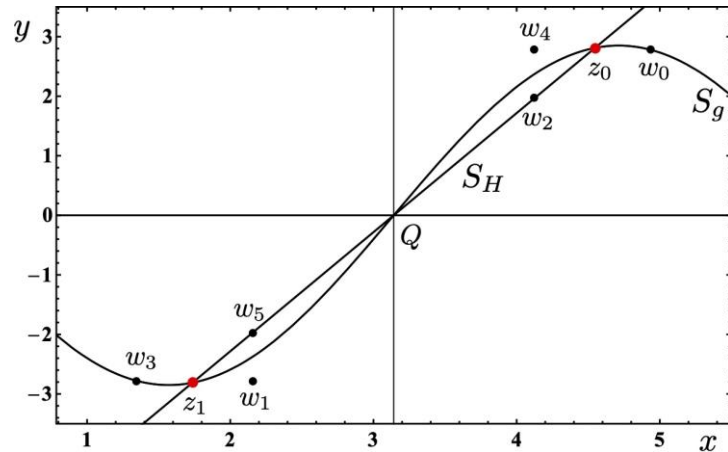


図 9 : 1/2-BE の軌道点(z_0, z_1)と, 1/2:2/3-BE の軌道点($w_k, 0 \leq k \leq 5$). $a = 5.7$.

図 8(d)より, 異常回転分岐が生じるための条件が得られる. 正常回転分岐が生じるための条件を導いたさいに使用した記号を再度利用する. 図 8(d)から $\xi = \xi_g$ が得られる. 軌道点 z_0 より右上方に二つの曲線を追うと, 対称線が対称線の像より速く右に曲がるから, $\eta_g < \eta < 0$ が得られる. このような条件を満たすと $1/2$ -BE の軌道点より離れた位置で二次関数的接触が生じる. 所謂, サドルノード分岐が生じる.

ここまでで得られた判定条件を判定条件 3.1 とする.

判定条件 3.1. 対称線と対称線の像の交点 z_k は楕円型周期軌道の軌道点であるとする.

- (a) 正常回転分岐が生じる条件: 軌道点 z_k で, $\xi = \xi_g$, $\eta = \eta_g = 0$ と $\zeta < \zeta_g = 0$ が成り立つ.
- (b) 異常回転分岐が生じる条件: 軌道点 z_k で, $\xi = \xi_g$ と $\eta_g < \eta < 0$ が成り立つ.

対称線と対称線の像の幾何学的な配置をもとに異常回転分岐が生じる条件を条件 2.1 とした. 条件 2.1 で対称線と対称線の像の $1/2$ -BE の軌道点における曲率が負の場合において, 条件 2.1 をさらに精密化した条件が判定条件 3.1 である.

判定条件 3.1 を利用して, $p/q:1/3$ -B と $p/q:2/3$ -B の生じ方を数値計算で調べた. いくつかの p/q について得られた結果を表 1 と表 2 に示す. 表 1 には正常回転分岐が生じる場合を示し, 表 2 には異常回転分岐が生じる場合を示した. 表における一重は, 生じた周期軌道が一重対称周期軌道であることを意味している. 二重についても同様の意味である.

表 1 : 正常回転分岐の例

1/2:1/3-B (一重)	1/8:1/3-B (一重)	3/10:1/3-B (一重)
1/4:1/3-B (一重)	3/8:1/3-B (一重)	1/12:1/3-B (一重)
1/6:1/3-B (一重)	1/10:1/3-B (一重)	5/12:1/3-B (一重)

表 2 : 異常回転分岐の例

1/2:2/3-B (二重)	1/6:2/3-B (二重)	3/8:2/3-B (二重)
1/3:1/3-B (一重)	1/7:1/3-B (一重)	1/9:1/3-B (一重)
1/4:2/3-B (二重)	2/7:1/3-B (一重)	4/9:1/3-B (一重)
1/5:1/3-B (一重)	3/7:1/3-B (一重)	1/10:2/3-B (二重)
2/5:1/3-B (一重)	1/8:2/3-B (二重)	3/10:2/3-B (二重)

表 1 と表 2 をもとに予想 3.2 が得られる.

予想 3.2.

[i] 周期 q が偶数の場合: 一重対称周期軌道 $p/q:1/3$ -B は正常回転分岐で生じ, 二重対称周期軌道 $p/q:2/3$ -B は異常回転分岐で生じる.

[ii] 周期 q が奇数の場合: 一重対称周期軌道 $p/q:1/3$ -B は異常回転分岐で生じる.

4. 定理の証明

予想 3.2 における $p/q = 1/2$ の場合に関する定理 4.1 を証明することが本節の主目的である.

定理 4.1.

- [1] 二重対称周期軌道 $1/2:2/3$ -B は, $1/2$ -BE の異常回転分岐で生じる.
- [2] 一重対称周期軌道 $1/2:1/3$ -B は, $1/2$ -BE の正常回転分岐で生じる.

最初に, 定理 4.1 の証明で必要となる性質 4.2 と 4.3 を紹介する. 次に命題 4.4 と命題 4.5 を紹介し証明を与える. 性質 4.2 については参考文献 [1, 2] を, 性質 4.3 については参考文献 [5] を見られたい.

性質 4.2. 楕円型不動点 Q が回転分岐を起こして生じた p/q -B が Q の周りを時計回りに回転するならば, p/q -B から回転分岐で生じた $p/q:r/s$ -B は p/q -BE の軌道点の周りを反時計回りに回転する.

標準写像において, p/q -B は楕円型不動点 Q の周りを時計回りに回転するので, $p/q:r/s$ -B は p/q -BE の軌道点の周りを反時計回りに回転する.

性質 4.3. 標準写像において, 楕円型不動点 Q の回転分岐で生じた p/q -B は下記の (i) と (ii) を満たす.

(i) q が奇数. p/q -B は一重対称周期軌道. p/q -BE の回転分岐の回転数区間は $(0, 1/2)$ である. 回転分岐で生じた周期軌道を $p/q:r/s$ -B を書くと, $0 < r/s < 1/2$ が成り立つ. p/q -BE は周期倍分岐を起こす

(ii) q が偶数. p/q -B は二重対称周期軌道. p/q -BE の回転分岐の回転数区間は $(0, 1)$ である. 回転分岐で生じた周期軌道を $p/q:r/s$ -B を書くと, $0 < r/s < 1$ が成り立つ. p/q -BE は同周期分岐を起こす.

命題 4.4. q を奇数とし, p/q -BE が回転分岐を起こして周期 $q \times 3$ の周期軌道が生じたとする. 周期 $q \times 3$ の周期軌道は, 一重対称周期軌道で $p/q:1/3$ -B である.

証明. 周期 q が奇数の場合, p/q -BE は一重対称周期軌道であるから回転分岐の回転数区間は性質 4.3(i) より $(0, 1/2)$ である. よって, 回転数は必ず $p/q:1/3$ になる.

次に, 一重対称周期軌道から回転分岐で生じる周期軌道は一重対称周期軌道であることを証明する. 軌道点 z_0 を一重対称周期軌道の軌道点とし, 軌道点 z_0 を初期点とする周期軌道を $O(z_0)$ と書く.

ここでは $T^q = H \circ GT^{q-1}$ と分割する. $\hat{G} = GT^{q-1}$ とする. 対合 H について不変な集合である対称線として $y = 2(x - \pi)$ を選ぶ. これを $S_H(\pi)$ と書く. 対合 \hat{G} について不変な集合である対称線を $S_{\hat{G}}$ と書く. 軌道点 z_0 はこれらの交点である. この交点には上下の対称線は通過していない. よって軌道点 z_0 から回転分岐で生じた周期軌道が二重対称周期軌道になることはない.

次に対称線上にある周期軌道点 z_0 から回転分岐で生じた周期軌道が非対称周期軌道であるとして矛盾を導く. 軌道点 z_0 から図 10(a) で示した様に周期 $3(T^q$ を単位として測った周期) の非対称サドル型周期軌道点 $\{s_0, s_1, s_2\}$ が生じたとする. 対称性より非対称サドル型周期軌道

点 $\{t_0, t_1, t_2\}$ も生じるが, $O(s_0) \neq O(t_0)$ である. 図 10(a)では以下の関係が成り立つ.

$$t_0 = Hs_0, \quad t_2 = Hs_1, \quad t_1 = Hs_2, \quad (21)$$

$$t_1 = \widehat{G}s_0, \quad t_0 = \widehat{G}s_1, \quad t_2 = \widehat{G}s_2. \quad (22)$$

図 10(a)において, 実線の矢印記号は対合 H による点の移動を表し, 点線の矢印記号は対合 \widehat{G} に点の動きを表している. 図 10(a)で点線で囲んだ辺りを拡大し, 非対称サドル型軌道点 s_0 と t_0 の不安定多様体と安定多様体を図 10(b)に描いた. 不安定多様体の弧と安定多様体の弧とを利用して領域 $Z(s_0, t_0)$ (図 10(b)における灰色領域)を構成できる. 記号 $Z(s_0, t_0)$ は隣り合った非対称サドル型軌道点 s_0 と t_0 の不安定多様体と安定多様体を利用して構成した共鳴領域[1]を表している. 同様にして隣り合った非対称サドル型軌道点の不安定多様体と安定多様体を利用して合計6個の共鳴領域が構成される. $Z(s_0, t_0)$ の中には z_0 より生じた非対称楕円型周期軌道点 α_0 が存在しているはずである. 対称性から $\beta_0 = H\alpha_0$ も存在している. 軌道点 α_0 と β_0 がともに非対称周期軌道点であるから $\alpha_0 \neq \beta_0$ が成り立つ. 結果として, 一つの共鳴領域に二つの楕円型周期軌道が含まれる. 楕円型周期軌道の個数がサドル型周期軌道の個数の二倍となり, ポアンカレ指数の保存則に反し矛盾である. 以上で命題 4.4 の主張が示された.

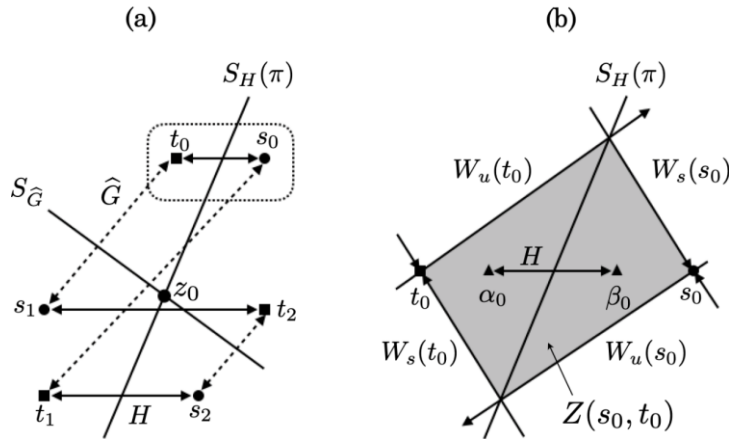


図 10 : (a) 対称線 $S_H(\pi)$ 上にある周期軌道点 z_0 から生じた非対称サドル型周期軌道点. (b) 共鳴領域 $Z(s_0, t_0)$ の構成.

命題 4.5. q を偶数とし, p/q -BE が回転分岐を起こして周期 $q \times 3$ の周期軌道が生じたとする. 周期 $q \times 3$ の周期軌道は, 二重対称周期軌道で $p/q:2/3$ -Bである.

証明の方針. q が偶数であるから, p/q -BE は二重対称周期軌道である. p/q -BE が, 対称線 S_g 上に軌道点を持つ場合(ケース 1)と, 対称線 S_h 上に軌道点を持つ場合(ケース 2)に分けて証明する. それぞれの場合を更に $q = 4n$ の場合([i])と $q = 4n - 2$ の場合([ii])に分ける.

ケース 1 の証明. p/q -BE が対称線 S_g 上に軌道点を持つ場合.

[i] $q = 4n$ ($n \geq 1$)の場合(対称線 $S_G(x = \pi)$ 上に軌道点を持つ場合).

T^q の対合表現を示す[5].

$$T^{4n} = T^{2n-1}H \circ GT^{2n-1}h \circ g. \quad (23)$$

左対合 $T^{2n-1}H$ について不変な集合は $T^n S_G$ である. p/q -BE の軌道点は $T^n S_G$ と S_g の交点にある. これを z_n とする. 初期点 z_0 は S_G 上にある. z_n より T^q を単位として周期 3 が生じる. 対称線 S_g 上に生じた軌道点を w_n とする. 軌道点 z_n より, S_g 上にはない軌道点 $\alpha = T^{2n-1}Hw_n$ と $\beta = g\alpha$ が生じる. 軌道点 w_n, α, β で周期 3 が構成されるから, 図 11(a)の配置では β が $T^n S_G$ 上にある.

$\alpha = T^{8n}w_n$ と $\beta = T^{4n}w_n$ が成り立つことを導く．ここで、 $\alpha = T^{4n}w_n$ と仮定し矛盾を導く．

$$\alpha = T^{4n}w_n = T^{4n-1}h \circ HT^{-(2n-1)} \circ T^{(2n-1)}H \circ gw_n. \quad (24)$$

最初に関係式 $gw_n = w_n$ と $\alpha = T^{2n-1}Hw_n$ を利用し、次に $R = hH$ と $RT^{-(2n-1)} = T^{-(2n-1)}R$ を利用すると

$$\alpha = T^{4n-1}h \circ HT^{-(2n-1)} \circ \alpha = T^{2n}R\alpha. \quad (25)$$

R は180度回転作用である．ここで考えている軌道点 w_n の周期軌道の周期は $12n$ である．よって、 $R = T^{\pm 6n}$ ． $R = T^{-6n}$ を採用すると、 $\alpha = T^{-4n}\alpha$ が得られる．周期軌道 $O(\alpha)$ の周期は、 $O(z_n)$ の周期と同じになり、矛盾である．よって、 $\beta = T^{4n}w_n$ と $\alpha = T^{8n}w_n$ が成り立つ．

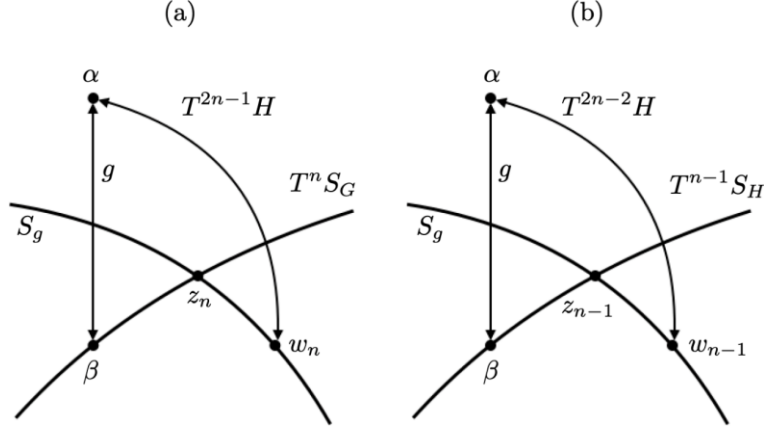


図 11 : (a) $q = 4n$ ($n \geq 1$) の場合の配置 ($S_G: x = \pi$). (b) $q = 4n - 2$ ($n \geq 1$) の場合の配置 ($S_H: y = 2(x - \pi)$).

ここで性質 4.2 を利用する．軌道点 w_n から出発し z_n の周りを反時計回りに回転し、最初に β に達し、次に α に到着し、最後に w_n に戻る．この間に、この周期軌道は軌道点 z_n の周りを2回転していることが導かれる．つまり、この周期軌道の回転数は $2/3$ である．

次に回転分岐で生じた周期軌道が $p/q:2/3$ -B と記述されるならば、この周期軌道が二重対称周期軌道であることを示す．回転数が $2/3$ であることから $\beta = T^{4n}w_n$ と $\alpha = T^{4n}\beta$ が成り立つ．また、 $\beta = gT^{2n-1}Hw_n$ ($\beta = g\alpha$, $\alpha = T^{2n-1}Hw_n$)も成り立つ． $\beta = T^{4n}w_n$ の両辺に $T^{2n-1}H$ を作用する．右辺を下記のように書き換える．

$$\begin{aligned} T^{2n-1}HT^{4n}w_n &= T^{2n-1}T^{-4n}Hw_n = T^{-2n-1} \circ T^{-(2n-1)}g \circ gT^{2n-1}Hw_n \\ &= T^{-4n}g\beta = T^{-4n}\alpha = \beta. \end{aligned} \quad (26)$$

以上で $\beta = T^{2n-1}H\beta$ が示された．これは β が対称線 $T^n S_G$ 上にあることを意味する．つまり二重対称周期軌道であることが示された．

[ii] $q = 4n - 2$ ($n \geq 1$) の場合(対称線 S_H ($y = 2(x - \pi)$)上に軌道点を持つ場合)．

T^q の対合表現を示す．

$$T^{4n-2} = T^{2n-2}H \circ GT^{2n-2}h \circ g. \quad (27)$$

左対合 $T^{2n-2}H$ について不変な集合は $T^{n-1}S_H$ である． p/q -BE の軌道点は $T^{n-1}S_H$ と S_g の交点にある．これを z_{n-1} とする．初期点 z_0 は S_H 上にある．軌道点 z_{n-1} より T^q を単位として周期3が生じる．対称線 S_g 上に生じた軌道点を w_{n-1} とする．軌道点 z_{n-1} より、 S_g 上にない軌道点 $\alpha = T^{2n-1}Hw_{n-1}$ と $\beta = g\alpha$ が生じる．軌道点 β は、図 11(b)の配置では $T^{n-1}S_H$ 上にある．

ここで、 $\alpha = T^{4n-2}w_n$ と仮定し矛盾を導く．

$$\alpha = T^{4n-2}w_{n-1} = T^{4n-3}h \circ HT^{-(2n-2)} \circ T^{(2n-2)}H \circ gw_n. \quad (28)$$

関係式 $gw_n = w_n$, $\alpha = T^{2n-2}Hw_n$, $R = hH$ を利用すると

$$\alpha = T^{4n-3}h \circ HT^{-(2n-2)} \circ \alpha = T^{2n-1}R\alpha. \quad (29)$$

ここで考えている w_n の周期軌道の周期は $12n - 6$ である．よって， $R = T^{\pm(6n-3)}$ ． $R = T^{-6n+3}$ を採用すると， $\alpha = T^{-4n+2}\alpha$ が得られる．周期軌道 $O(\alpha)$ の周期は， $O(z_{n-1})$ の周期と同じになり，矛盾である．よって， $\beta = T^{4n-2}w_n$ と $\alpha = T^{8n-4}w_n$ が成り立つ．

軌道点 w_{n-1} から出発し w_{n-1} に戻る間にこの周期軌道は軌道点 z_{n-1} の周りを反時計回りに 2 回転している．この周期軌道の回転数は $2/3$ である．以上で異常回転分岐で生じた周期軌道が二重対称周期軌道で $p/q:2/3$ -B と記述されることが示された．

次に回転分岐で生じた周期軌道が $p/q:2/3$ -B と記述されるならば，この周期軌道が二重対称周期軌道であることを示す．ここで $\beta = T^{4n-2}w_{n-1}$ と $\alpha = T^{4n-2}\beta$ が成り立つ．また， $\beta = gT^{2n-2}Hw_{n-1}$ も成り立つ． $\beta = T^{4n-2}w_{n-1}$ の両辺に $T^{2n-2}H$ を作用する．右辺を下記のように書き換える．

$$\begin{aligned} T^{2n-2}HT^{4n-2}w_{n-1} &= T^{2n-2}T^{-4n+2}Hw_{n-1} = T^{-(4n-2)}g \circ gT^{2n-2}Hw_{n-1} \\ &= T^{-(4n-2)}g\beta = T^{-(4n-2)}\alpha = \beta. \end{aligned} \quad (30)$$

以上で $\beta = T^{2n-2}H\beta$ が示された．これは β が対称線 $T^{n-1}S_H$ 上にあることを意味する．ケース 1 の証明を終える．

因みに上記の証明に使用した w_{n-1} (図 11(b)) は，図 9 では w_0 に相当する．また， $\alpha = w_4$ で $\beta = w_2$ である．

ケース 2 の証明． p/q -BE が対称線 S_h 上に軌道点を持つ場合．

[i] $q = 4n$ ($n \geq 1$) の場合 (対称線 S_H ($y = 2(x - \pi)$) 上に軌道点を持つ場合)．

T^q の対合表現を示す．

$$T^{4n} = h \circ gT^{2n-1}H \circ GT^{2n-1}. \quad (31)$$

左対合 GT^{2n-1} について不変な集合は $T^{-n}S_H$ である． p/q -BE の軌道点は $T^{-n}S_H$ と S_h の交点にある．これを z_0 とする．初期点 z_0 は S_h 上にある． z_0 より T^q を単位として周期 3 が生じる．対称線 S_h 上に生じた軌道点を w_0 とする．軌道点 z_0 より， S_h 上にない軌道点 $\alpha = GT^{2n-1}w_0$ と $\beta = h\alpha$ が生じる．軌道点 β は，図 12(a) の配置では $T^{-n}S_H$ 上にある．

$\beta = T^{4n}w_0$ を仮定し矛盾を導く．

$$\beta = T^{4n}w_0 = T^{4n} \circ T^{-(2n-1)}Gh \circ hGT^{(2n-1)}w_0 = T^{2n+1}Gh \circ \beta. \quad (32)$$

関係式 $Gh = GH \circ Hh = T^{-1}R$ と $R = T^{-6n}$ を利用すると，次式が得られる．

$$\beta = T^{2n}R\beta = T^{-4n}\beta. \quad (33)$$

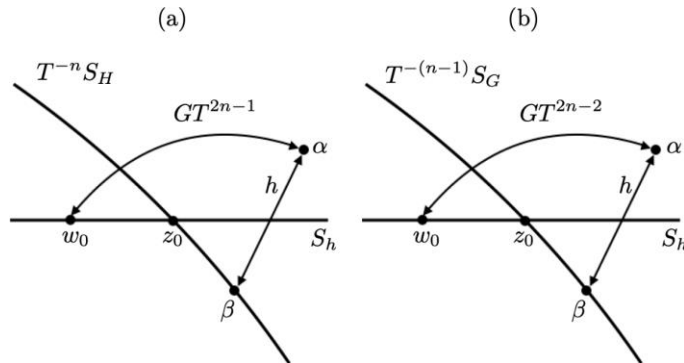


図 12: (a) $q = 4n$ ($n \geq 1$) の場合の配置 ($S_H: y = 2(x - \pi)$). (b) $q = 4n - 2$ ($n \geq 1$) の場合の配置 ($S_G: x = \pi$).

周期軌道 $O(\beta)$ の周期は $O(z_0)$ の周期と同じになる．これは矛盾である． $\alpha = T^{4n}w_0$ と $\beta = T^{4n}\alpha$ が得られ，軌道点 w_0 から出発し w_0 に戻る間にこの周期軌道は軌道点 z_0 の周りを反時計回りに2回転していることが示された．

回転分岐で生じた周期軌道が $p/q:2/3$ -B と記述されるならば，この周期軌道が二重対称周期軌道であることの証明は省く．次の[ii]の場合も同様である．

[ii] $q = 4n - 2$ ($n \geq 1$)の場合(対称線 $S_G(x = \pi)$ 上に軌道点を持つ場合)． T^q の対合表現を示す．

$$T^{4n-2} = h \circ gT^{2n-2}H \circ GT^{2n-2}. \quad (34)$$

左対合 GT^{2n-2} について不変な集合は $T^{-(n-1)}S_G$ である． p/q -BE の軌道点は $T^{-(n-1)}S_G$ と S_h の交点にある．これを z_0 とする．初期点 z_0 は S_h 上にある． z_0 より T^q を単位として周期3が生じる．対称線 S_h 上に生じた軌道点を w_0 とする．軌道点 z_0 より， S_h 上にない軌道点 $\alpha = GT^{2n-2}w_0$ と $\beta = h\alpha$ が生じる．軌道点 β は，図12(b)の配置では $T^{-(n-1)}S_G$ 上にある．

$\beta = T^{4n-2}w_0$ と仮定し矛盾を導く．

$$\beta = T^{4n-2}w_0 = T^{4n-2} \circ T^{-(2n-2)}Gh \circ hGT^{(2n-2)}w_0 = T^{2n}Gh \circ \beta. \quad (35)$$

関係式 $Gh = GH \circ Hh = T^{-1}R$ と $R = T^{-6n+3}$ を利用すると次式が得られる．

$$\beta = T^{2n-1}R\beta = T^{-(4n-2)}\beta. \quad (36)$$

周期軌道 $O(\beta)$ の周期は， $O(z_0)$ の周期と同じになる．これは矛盾である． $\alpha = T^{4n-2}w_0$ と $\beta = T^{4n-2}\alpha$ が得られた．これより軌道点 w_0 から出発し w_0 に戻る間にこの周期軌道は軌道点 z_0 の周りを反時計回りに2回転していることが示された．ケース2の証明を終える．

定理4.1の証明を行う前に準備を行う．周期2の軌道点を $z_0 = (x_0, y_0) = (\pi - t, -2t)$ と $z_1 = (x_1, y_1) = (\pi + t, 2t)$ とする．ここで， $t > 0$ ．

周期2の軌道点は

$$2(x - \pi) = -(a/2)\sin x \quad (37)$$

の解である($x \neq \pi$)． $x = \pi + t$ ($t > 0$)を利用すると式(37)は

$$2t = (a/2)\sin t \quad (38)$$

となる． $a > 4$ で，式(38)は $t > 0$ の解をもつので以下の議論では $a > 4$ とする．

これより第2.2節で導出した傾き ξ_n に関する写像，二階微分係数 η_n に関する写像と三階微分係数 ζ_n に関する写像を利用する．表現を簡潔にするために変数 s (> 0)と d (> 0)を導入する．

$$f'(x_0) = f'(x_1) = -f'''(x_0) = -f'''(x_1) \equiv -s, \quad (39)$$

$$f''(x_0) = -f''(x_1) \equiv -d. \quad (40)$$

定理4.1[1]の証明．命題4.5で $p/q = 1/2$ とすると二重対称周期軌道 $1/2:2/3$ -Bが生じることが導かれる．ここでは生じ方が異常回転分岐であることを証明する．

周期6の軌道点を $u_k = (x_k, y_k)$ ($0 \leq k \leq 5$)と書く．初期点 u_0 は対称線 S_H 上にあるとする．初期点 u_0 が対称線 S_H 上にあることより，傾き ξ_n と二階微分係数 η_n を求めるための初期値は， $\xi_0 = 2$ ， $\eta_0 = 0$ である．周期6の二重対称周期軌道が周期2の軌道点 u_1 から回転分岐で分岐する条件は， ξ_1 が u_1 における S_g の傾きに等しいことである．これより，

$$\xi_1 = -(1/2)f'(x_1) \quad (41)$$

が得られる．式(14)より，この条件は下記のように書ける．

$$\xi_1 = \frac{\xi_0 + f'(x_0)}{\xi_0 + f'(x_0) + 1} = -\frac{f'(x_1)}{2}. \quad (42)$$

ここで変数 s を利用し, 更に $\xi_0 = 2$ を代入すると次式が得られる.

$$\frac{2-s}{3-s} = \frac{s}{2}. \quad (43)$$

これより下記の二次方程式が得られる.

$$(s-1)(s-4) = 0. \quad (44)$$

二次方程式の解として $s=1$ と $s=4$ が得られる. $s=4$ とすると, $a\cos x_0 = -4$ が成り立つ. $a \geq 4$ で, この条件を満たす x_0 が存在する. $a=4$ は, 楕円型不動点 Q が周期倍分岐を起こす臨界値である. よって, ここでは $s=1$ を採用する.

$$a\cos t = 1. \quad (45)$$

式(38)と式(45)より,

$$(4t)^2 + 1 = a^2 \quad (46)$$

が得られる. $t > 0$ より,

$$4t = \sqrt{a^2 - 1}. \quad (47)$$

式(38)と式(47)より下記の関係が得られる.

$$a\sin t = \sqrt{a^2 - 1}. \quad (48)$$

次に二階微分係数 η_1 を調べる. 式(15)において $\eta_0 = 0$ として η_1 が得られる.

$$\eta_1 = \frac{f''(x_0)}{(3 + f'(x_0))^3} = \frac{-a\sin(x_0)}{(3-s)^3} = \frac{-a\sin t}{8} = -\frac{\sqrt{a^2 - 1}}{8}. \quad (49)$$

軌道点 u_1 における対称線 S_g の二階微分係数 $\eta_g(x_1)$ は

$$\eta_g(x_1) = -(1/2)f''(x_1) = (a/2)\sin x_1 = -(a/2)\sin t = -\frac{\sqrt{a^2 - 1}}{2}. \quad (50)$$

以上で

$$\eta_g(x_1) < \eta_1 < 0 \quad (51)$$

が示された. 判定条件 3.1(b)より, 回転数 $2/3$ の二重対称周期軌道が周期 2 の二重対称周期軌道より 異常回転分岐で生じたことを意味する. 以上で定理 4.1[1]が証明された.

定理 4.1[2]の証明. ここでは対称線 S_H 上に生じる周期 6 について調べる. 周期 6 の軌道点を v_k ($0 \leq k \leq 5$)と書く. 初期点 v_0 が対称線 S_H 上にあるとすると, 初期点 v_3 も対称線 S_H 上にある. 軌道点 v_0 と v_3 が対称線 S_H 上にある条件より, $1/2:1/3$ -B は一重対称周期軌道である.

軌道点 $v_0 \in S_H$ における対称線の傾きは $\xi_0 = 2$ である. 順次 ξ_1, ξ_2, ξ_3 を決め, $\xi_3 = 2$ とする.

$$\xi_3 = \frac{s^3 - 6s^2 + 9s - 2}{s^3 - 7s^2 + 14s - 7} = 2. \quad (52)$$

これより

$$(s-1)(s-3)(s-4) = 0 \quad (53)$$

が得られる. $s=4$ は楕円型不動点 Q が周期倍分岐を起こす場合に対応し, $s=1$ は[1]の証明の場合に対応する. よって, ここでは $s=3$ を利用する.

二階微分係数を調べる. $\eta_0 = 0$ として, 順次 η_1, η_2, η_3 を決めると η_3 が得られる.

$$\eta_3 = \frac{d(s-3)(s^5 - 12s^4 + 54s^3 - 112s^2 + 105s - 33)}{(s^3 - 7s^2 + 14s - 7)^3}. \quad (54)$$

この式に $s=3$ を代入して, $\eta_3 = 0$ が得られる.

次に三階微分係数を調べる． $\zeta_0 = 0$ として，順次 $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$ を決め，最後に $s = 3$ を代入すると下記の ζ_3 が得られる．

$$\zeta_3 = 6 - 3d^2 = 6 - 3(a^2 - 9) = 33 - 3a^2. \quad (55)$$

ここで $d^2 = (asint)^2$ と $3^2 = (acost)^2$ より， $d^2 = a^2 - 9$ が成り立つことを利用した．この式の a として， $1/2:1/3$ -B が生じる臨界値を代入する必要がある．臨界値は4より大きいので $\zeta_3 < 0$ が得られる．判定条件 3.1(a)より，対称線の像と対称線 $S_H(\pi)$ の接触の仕方は三次関数的接触であることが導かれた．以上で定理 4.1[2]が証明された．

式(48)の左辺に式(47)を代入し変数 t を消去すると臨界値を決める式が得られる．

$$a \sin(\sqrt{a^2 - 1}/4) = \sqrt{a^2 - 1}. \quad (56)$$

これを数値計算で解くと回転分岐が生じる臨界値 $a_c(1/2:2/3) = 5.6620$ が得られる(図 5 では $1/2:2/3$ で示されている)．異常回転分岐が生じる臨界値の数値計算結果は5.5547である．つまり， $1/2:2/3$ -B の異常回転パラメータ区間は $[5.5547, 5.6620)$ である．

最後に $1/2:1/3$ -B が生じる臨界値を求める．式(56)の $\sqrt{a^2 - 1}$ を $\sqrt{a^2 - 9}$ に置き換えることで臨界値を決める式が得られる．

$$a \sin(\sqrt{a^2 - 9}/4) = \sqrt{a^2 - 9}. \quad (57)$$

これを数値計算で解くと正常回転分岐が生じる臨界値 $a_c(1/2:1/3) = 4.5185$ が得られる(図 5 では $1/2:1/3$ で示されている)．

5. 結語

本論文で得られた結果をまとめる．

(1) $1/2$ -BE が異常回転分岐を起こして $1/2:2/3$ -B が生じることと， $1/2$ -BE が正常回転分岐を起こして $1/2:1/3$ -B が生じることを証明した(定理 4.1)．

(2) $p/q:2/3$ -B を， p/q -BE (q は偶数)が回転分岐を起こして生じた周期軌道とする． $p/q:2/3$ -B が二重対称周期軌道であることを証明した(命題 4.5)．

最後に筆者の考えを述べたい．写像回数を増やせば周期軌道点で条件 2.1 が成立するようになると思われる．このことは異常回転分岐が多く写像で潜在していることを示唆している．異常回転分岐の原因である単調ねじれ性の破れがカオス現象にどのような寄与をしているのか．この問題については今後の検討課題としたい．

謝辞

本論文に対して査読者より貴重なコメントをいただきました．心より感謝申し上げます．

参考文献

- [1] 山口喜博, 谷川清隆, 馬蹄への道 (共立出版, 2016)．
- [2] Dullin, H. R., Meiss, J. D. and Sterling, D., Symbolic codes for rotational orbits. SIAM J. Appl. Dyn. Sys. 4 (2005), 515-562. <https://doi.org/10.1137/040612877>
- [3] 山口喜博, 異常回転分岐への長い道, 形の科学会誌, 第 34 巻, 第 2 号 (2019), 56-77. https://katachi-jp.com/paper/34_2_web.pdf

- [4] 標準写像については WolframMathWorld の解説が参考になる.
<http://mathworld.wolfram.com/StandardMap.html>
- [5] 山口喜博, 二重可逆面積保存写像における二重対称周期軌道, 形の科学会誌, 第 34 巻,
第 1 号 (2019), 13-42. https://katachi-jp.com/paper/34_1_web.pdf

Python を始めて 10 日でゲームを作れるようになるのか？ - 61 歳からの挑戦：0 から始める Python Programming -

平田隆幸

福井大学 大学院工学研究科 知能システム工学専攻

〒910-8507 福井市文京 3 丁目 9-1

hirata@u-fukui.ac.jp

Can a Beginner Create Computer Games by Python in Ten Days Through Self-Study?

- A Challenge to Learn a New Programming Language by the Person Who Is
Over 61 Years Old -

Takayuki Hirata

Department of Human & Artificial Intelligent Systems, Faculty of Engineering,
University of Fukui, 3-9-1 Bunkyo, Fukui 910-8507, Japan.

(2020 年 8 月 3 日受付, 2020 年 10 月 7 日受理)

Abstract: Python is one of the most popular programming languages and is employed in various fields. In particular, applications associated with machine learning and deep learning are often developed by the Python programming language. Additionally, a lot of Python libraries are available for studying artificial intelligence. Based on this context, it would be interesting to survey whether or not an elderly person can learn a new programming language such as Python within a short period. In this paper, the proposed case study was conducted for analyzing whether a beginner, who is older than sixty years, can develop a game after self-studying for ten days. Furthermore, a questionnaire survey regarding programming languages was also conducted.

Keywords: Python, Elderly Person, Beginner, Ten Days Learning, Game Programming, Self-Study.

1. はじめに

日本は、急速な高齢化社会を迎えている。そして、安倍政権による 1 億総活躍時代では、高齢者の活躍が求められている。一般的には、社会的な経験値は歳をとるとともに増える。それゆえに、高齢者のもつ経験値を有効に生かすことは、社会の発展にとって非常に重要である。しかし、現実的には、人間の知能は 25 歳ぐらいで完成され、以降 40 歳ぐらいまで維持されたのちは、徐々に衰えていく（人間の知能というカテゴリーでは範囲が広すぎるため、具体的な一例として顔認識能力と年齢に関する論文[1]を挙げておく）。脳医学の立場からも CT や MRI などの画像診断の普及に伴い、無症候性脳梗塞が 60 歳から急増す

ること [2] が分かってきている。このように、脳科学的にも経験的にも、年齢を重ねるにつれて若い人と比べると、新しいことを学ぶことが苦手になってくる。

特に、言語の学習においては、年齢が若いほうが有利である。幼児は努力せずに言葉を覚えていくが、大人になって新しい言葉を覚えるのには大変な努力が必要である。プログラミング言語も、言語の一種であることから、若い世代の方が習得に有利だと考えられる。10代のプログラマー、例えば11歳のハッカーや14歳の人工知能プログラマーの記事が注目を集めている。若い人の可能性は、素晴らしいものであることが分かる。一方、高齢者は、新しいことに取り組むのにハードルを感じていることが多い。それゆえ、世界開発者会議「WWDC2017」で、82歳のアプリ開発者が耳目をアツめたのは、高齢者に勇気を与えるものであった [3]。一般的に、還暦を越えても新しい言語を学べるのだろうか？ 60歳を越えて、短期間で新しいプログラミング言語を習得できるのだろうか？

また、新しく習得するプログラミング言語としては、何が相応しいだろうか。4つの観点から考えよう。1)メジャーな言語である、2)初心者でも楽しめる言語である(ゲームをつくれるなどの動機付けができる)、3)初心者に優しい言語である、4)コストがかからないことである。これらの観点から、新しく習得するプログラミング言語として Python を選んだ。Python は、習得が容易な言語と言われており、標準的な教科書も多くある(例えば、[4]など)。

さて、Python の特徴を4つの観点から詳しくみてみよう。1)メジャーな言語である。例えば、Google では企業内で Python が推奨されている。Google は、Google for Education ⇒ Python で Google's Python Class [5] を準備しており、YouTube で見ることができる。さらに、Amazon の量子コンピュータ (AWS) の Amazon Braket のプログラミング言語として、Python が採用されているなど、今後の発展性も期待できる。2)初心者でも楽しめる言語か？ Python でゲームを作ろうという書籍などが多く出版されている [6]。3)初心者にやさしい言語である。多くの大学で教育用のプログラミング言語に採用されている。4)コストがかからない。Python は無料であり、Free の開発環境が準備されている。また、Web 上に、無料の学習コースがある。例えば、Krishna が設立した Guru99 [7] は、教育の機会均等を目指すものであり、分かりやすい Python のチュートリアルが準備されている。

本論文では、60歳を超えて Python に初めて触れて、10日間の独習でゲームを作れるようになるのかの事例研究をおこなったので報告する。同時に、初心者が10日間の読書でどのように Python の教本を理解しているかの事例を示す。また、プログラミング言語の学習において、若年者と高齢者の間に差があるかどうかを知るため、アンケート調査をおこなったので報告する。

2. Python プログラミングに挑戦

2.1. Python とは

Python は、1991年にオランダ人のガイド・ヴァンロッサムによって開発されたプログラミング言語である(ガイド・ヴァンロッサムが Python 0.90 のソースコードを公開した)。Google が主要言語としているなど、現在もっとも注目されている言語である [8]-[12][IEEE 2015-2019] (図1参照)。また、日経によると、日本におけるプログラミン

グ言語の人気でも Python は上位である[13]。ここでは、C 言語と C++ 言語をまとめて、取り扱っているので、Python が 2 位になっているが、単体では IEEE の結果と同じく、Python が 1 位になると思われる。

Python について詳しくみていこう。Python は、インタプリタ型言語である。一般にインタプリタ型言語は、C 言語などのコンパイラ型言語と比較して、速度の点で劣る。しかし、コンピュータの高速化とともに、Python のようなインタプリタ型言語でも汎用プログラム言語になれるようになってきた。さて、Python には、インプレメンテーションによって、CPython、Jython、PyPy などがある。現時点で、もっとも多く使われており、メンテナンスされているのが C 言語で記述された CPython である。CPython は、C 言語との親和性もよく、C 拡張のインターフェイスを有している。高速で処理したい部分を C 言語で記述したサブルーチンに実行させることで、インタプリタ型言語の弱点を補い、高速処理が可能となっている。

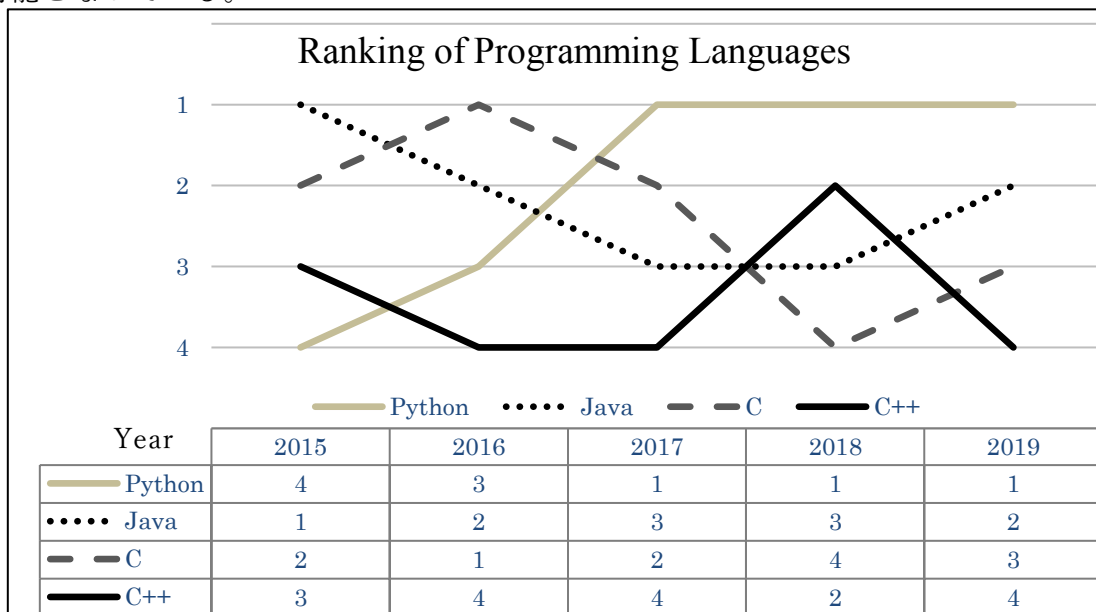


図 1：プログラミング言語の人気ランキング。元データ [8]-[12]からの引用。

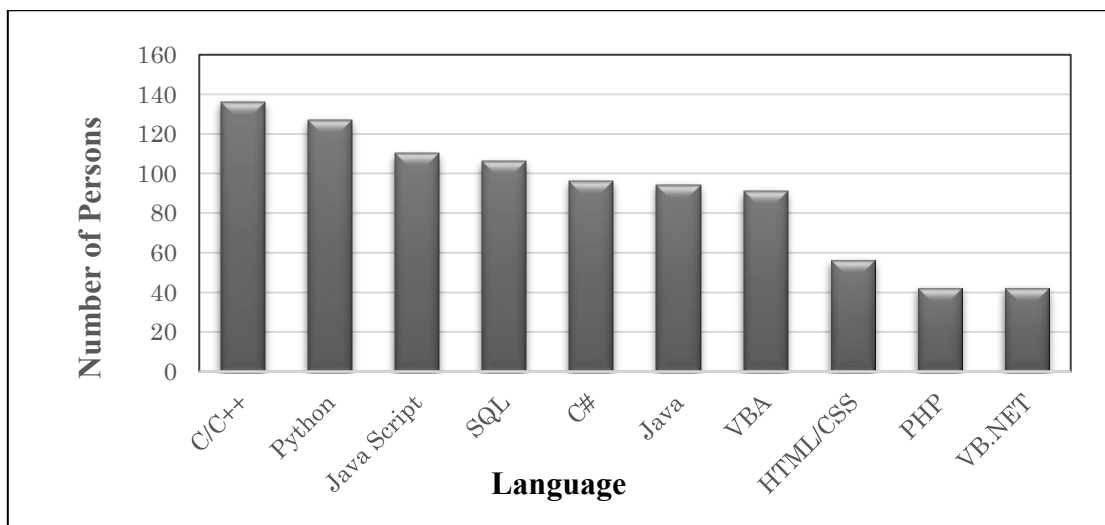


図 2：日本におけるプログラミング言語人気ランキング。元データ [13]から上位 10 位までをプロットした (440 人回答)。

さらに、Python の特徴の一つとして、オープンソースのソフトウェアであることも挙げられる。ユーザーを含めた皆で育ててきたプログラミング言語であり、Python Software Foundation [14]が管理しており、ソフトウェアを無料でダウンロードできる。ここで、Python に関する文書化もおこなっている Python Software Foundation の PEP についてもふれておく。ここに、python.org から PEP について冒頭の部分を引用しよう。

What is a PEP?

PEP 1 PEP Purpose and Guidelines

(PEP stands for Python Enhancement Proposal. A PEP is a design document providing information to the Python community. ….)

Python に関して基本的なことは、python.org でほとんど解決する。

Google は Python を主要言語として採用しており、Google for Education で Google's Python Class を提供している [5]。Google Python Class は YouTube にアップされており、Google による講習をビデオで見よう。Google Python Class Day 1 YouTube (Part 1 約 52 分 2,867,000 以上の視聴、Part2 約 35 分 644,000 以上の視聴、Part3 約 29 分 467,000 以上の視聴) と Google Python Class Day 2 YouTube (Part 1 約 42 分 470,000 以上の視聴、Part2 約 20 分 284,000 以上の視聴、Part 3 約 26 分 270,000 以上の視聴) である (2020 年 2 月 14 日現在)。これらは、Google Developers によって制作され、2010 年 3 月 1 日アップロードされたものである。なお、バージョンが Python 2 であることを付記しておく。

ここで、Python と他のプログラミング言語との比較を試みる。具体的には、Python のライバル言語として、Python と誕生した時期が近いプログラム言語である Ruby [15] と比較する。Ruby は、1995 年に公開されたオブジェクト指向スクリプト言語である。日本人のまつもとひろゆき氏が、Python に満足できなくて開発したものである。

さて、ソフトウェアの学習サイト Guru99[7]には、プログラミング言語の比較が掲載されている。以下に、Python と Ruby を比較した記事を和訳して載せておく。

【Ruby と比べて、Python はデータ構造、内部関数、より良い namespace の取り扱い、module や iterator の使い方の豊かなセットを持っている。Ruby にはできないが、Python は多重継承をサポートしている。Ruby はブロックの終わりに、end あるいは } を必要とするが、Python は空白のみで良い。Ruby は Web の開発や functional programming に向いており、Python は Academic and scientific programming に向いている。Ruby には、“少ないことで多くのことをなす”、Python には“一つの正しいやり方でものごとをなす” という哲学がある。】

以上、Python についてみてきた。概要を理解できたのではないだろうか。次に、どのように学ばばよいかをみていこう。

2.2. やさしい入門書

還暦を超えて初めて Python というプログラミング言語に出会い、教師なしに独習するため、もっともやさしい入門書を探した。ここでは、手に入れやすい 3 冊の本を入門書として選んだ (2020 年 2 月 10 日 (月) 福井県福井市内の書店 (勝木書店 新二の宮店) にて購入)。また、入門書が理解しやすいかどうかには大きな影響を与えるだろう、入門書が推奨している開発環境を冒頭に示すこととする。なお、この章の主な目的は、Python の初学

者がどのように入門書を理解したかの事例を示すことであり、本の解説が主目的でなく、また解説に偏りがあるかもしれないことを付記しておく。

2.2.1. 3冊の教本

教師なしの独習のために選んだ教本は、1) Python 超入門[16]、2) いちばんやさしい Python の教本[17]、3) ゼロからやさしくはじめる Python 入門[6]の3冊である。3冊の教本の内容を順にみていこう。

1) Python 超入門 – モンティと学ぶはじめてのプログラミング –

★開発環境は、IDLE を使用している。

Python による描画をデモンストレーションするために、Turtle Graphics (Python の標準ライブラリ) を使っているのが特徴である。中高生にも分かりやすいように、描画を含めたプログラミングを説明している。読者として中高生をメインターゲットにしており、コンピュータの得意な高校生と初心者の中学生の会話によって、入門書としてのスタイルが成立している。ただ、取り組みやすさを重要視しているため、冗長性は否めない印象を受けた。

この本の特徴の一つである初心者にも取り組みやすいグラフィックスである Turtle Graphics について述べる。Turtle Graphics は、1960 年代に教育向けプログラミング言語として開発されたもので、初心者には取り組みやすいものもある。Python を Python.org からインストールすると、標準ライブラリの Turtle Graphics をモジュールとして使えるようになる。なお、Turtle Graphics は、グラフィックスの基礎として tkinter を使っている。それゆえ、tkinter を直接使うほうが使いやすいという人も多いかもしれないが、初心者には、tkinter を使うよりも Turtle Graphics を使った描画の方が良いと思える。Turtle Graphics は、関数とメソッドという側面を持っているが、ここでは、メソッドとして使用している。教本にしたがって学習すれば、プログラムは動作するが、内容を理解しようとすると難しい。また、ステージ 8 までは分かりやすいが、グラフィックのステージ 9 から 12 は、少し説明不足であるように思える。例えば、`t = turtle.Pen()` はメソッドとして使用しているが、`t = turtle` でも動く。`turtle` ⇒ `t` と省略したいだけであれば、`type` を短くできるメリットより、初心者には分かりにくくなるデメリットの方が大きいように思える。

ここで、良い点を挙げる。読み返してみると、翔(中 1)とモンティの会話ですすむよう工夫されているのが分かる。また、以下に挙げる、

- 1) 登場人物の役割分担による会話での説明
- 2) 補うようにある説明(コラム)
- 3) 章末の問題 check と challenge

の構成は、受験参考書に似たスタイルであり、中高生にはなじみやすいだろう。しかし、個々にはこなれていない部分も多いように思える。著者のサービス精神がかえって、読者を混乱させる可能性があるかもしれない。

なお、開発環境として、IDLE に慣れたら、次はより便利な PyCharm を推している。PyCharm は、Guru99.com が提供するコース：「7日で、Python を学ぶ」でも使われている。

2) いちばんやさしい Python の教本 – 人気講師が教える基礎からサーバーサイド開発まで –

★開発環境は、Atom を使用している。

本のタイトルはいちばんやさしい Python の教本となっているが、実はプログラム経験を仮定している部分が結構ある。初学者には、決してやさしくない Python の教本である。また、Python.org から標準的に Python をインストールすると同時にインストールされる IDLE ではなく、テキストエディタとして Atom(<https://atom.io/>から無料でダウンロードできる)を推奨しているのも特徴である。

次に、各章ごとの表題とともに、内容をみていこう。

Chap. 1 「Python を学ぶ準備をしよう」では、インストールの方法、そして対話モード、ファイルでの実行方法が述べられている。

Chap. 2 「コマンドプロンプトになれよう」では、Python そのものではなく、Python を学ぶ上で必要になる OS のコマンドの説明がなされている。

Chap. 3 「基礎を学びながらプログラムを作成しよう」では、簡単な例題をもとに初学者に、Python によるプログラムの導入をおこなっている。また、関数とメソッド役割の違いを完結に説明している。関数とメソッドは、Python を学ぶときに、躓きやすいと思われる要素であり、独立した章を設けているのは親切である。

Chap. 4 「繰り返しと条件分岐」では、Python に限らず、プログラムで少し複雑な処理をさせる場合に必要なる繰り返しと条件分岐を解説している。

Chap. 5 「辞書とファイルの扱い方」では、Python を使った応用に踏み込んでいる。Python は文章など text 処理にもよく用いられており、Python の得意な分野である。C 言語などが苦手とする分野が、Python を使うと簡単にできることが実感できるようになっている。

Chap. 6 「会話 bot を作ろう」では、現代的で興味深いテーマを題材に前章までに学習した内容を深めるようになっている。ただ、急ぎ足になっており、初学者はついていけない可能性があることは否めない。例えば、プログラムを示しながら実行させていないのは、初学者には不親切と思われる。

Chap. 7 「ライブラリを使いこなそう」では、ライブラリを使ったプログラムに踏み込んでいる。Python の強みは、豊富なライブラリにある。その意味で、独立した章を設けたのは、良い点である。また、lesson 44~47 で、プログラムのエラーに対応する方法をとりあげ、構文エラーと例外の 2 種類をとりあげているのは実用的なプログラムを考慮している。しかし、初心者には難しいかもしれない。

Chap. 8 「サードパーティ製パッケージを使いこなそう」では、Python の強みである豊富に存在するのサードパーティ製パッケージをとりあげている。また、Lesson 50 では、仮想環境をとりあげており、これにより複数のサードパーティ製パッケージをコンフリクトなしに安全に使えるようになることを説明しているのは親切に思える。

Chap. 9 「Web アプリケーションを作成しよう」は、アプリケーションを作りたいと思う読者には興味を惹かれる章である。しかし、細部は丸投げしている傾向があり(例、詳しくは…を見て下さい [ワンポイントのコラムで特に])、不十分な内容である印象を与える。

Chap. 10 「さらに知識を身に付けるための学び方」は、おまけのような章である。さらなる学習のための Web サイト、書籍、コミュニティについて言及されている。

全体を通して、C 言語などの本と異なり、Web アプリなどに重き、理科系の数値計算などはあまり取り扱っていないのが特徴である。

3) ゼロからやさしくはじめる Python 入門 – 基礎からスタートして、ゲームづくり、機械学習まで学ぼう! –

★開発環境は、IDLE を使用している。

ここでとり上げた 3 冊の教本の中では、最もボリュームがあり、かつバランスのとれた教本である。副題が、「基本からスタートして、ゲームづくり、機械学習まで学ぼう!」とあるように、初歩から Python がよくつかわれている機械学習まで取り扱っている。次に、各章ごとの表題とともに、内容をみていこう。

Chap. 1 「プログラミングってなんだろう」では、コンピュータも Python を使わずにプログラミングの体験をさせる工夫がなされている。また、Python のインストールの仕方を説明しているのは、親切に思える。

Chap. 2 「プログラミングをはじめよう」では、IDLE の使い方がメインである。IDLE のテキストエディタ使って、変数や文字列を理解できるような工夫がなされている。

Chap. 3 「制御構文使ってみよう」では、制御構文の基本である「条件分岐」「繰り返し処理」が取り扱われている。if 文と while 文の理解がこの章のメインである。さらに、ゲームプログラムの初歩として、乱数を用いたグラフィックスを使わない text によるじゃんけんゲームをとりあげている。簡単なゲームを導入に使う、初心者やる気を高めていると思う。

Chap. 4 「リストと辞書型を使ってみよう」では、1次元からはじめて2次元のリスト、さらに辞書型のデータの扱い方を説明している。リストをもちいて、文字列をあつかった3択クイズのプログラムがとり上げられている。また、キーによってデータにアクセスする辞書型を取り扱っている。リストや辞書型は、文章処理における Python の長所のひとつであることが分かった。

Chap. 5 「関数を使ってみよう」では、定義方法や関数の使い方を学ぶ。Python では、サブルーチンではなく、関数を定義し、関数を呼び出すというようにプログラムを作成する。さらに、モジュール（ライブラリ）の利用法、グローバル変数・ローカル変数の説明がなされており、読者に Python が使いやすい言語であるという印象を与えてくれる。

Chap. 6 「ゲームを作ってみよう」では、前章までを基礎として、応用にあたる本格的なゲームプログラムに挑戦している。text ベースのゲームではなく、本格的なグラフィックゲームに取り組んでいる。なお、グラフィックには、tkinter を使っている。Chap. 1~5 とは異なり、レベルが急に上がっている。学習者が独力でゲームを作るというより、ゲームが比較的簡単に作れることを紹介している。しかし、初心者にはついていけないのではという不安を与えるかもしれない。

Chap. 7 「機械学習に挑戦しよう」では、Python の人気の要因である機械学習がとり上げられている。Step 1 機械学習の概要、Step 2 機械学習ライブラリを同梱した Anaconda のインストール、Step 3~5 は、本格的な画像データの分類問題がとり上げられている。ライブラリとしては、NumPy、matplotlib が使われている。

全体的には、初歩から応用まで取り扱ったバランスのとれた教本である。しかし、著者にとっては「ゼロから」であるが、読者にとっては「ゼロから」に思えないところ（予備

知識があるものと仮定されている) にミスマッチングがあるような気がする。ゆえに、ちょっとしたところでつまずいてしまうかもしれない。

以上、個々の教本の内容と特徴および初心者が感じた印象をまとめた。次に、3冊の教本の全体的な特徴をみていく。

2.2.2. 3冊に共通する良いと悪い点

前章では、3冊の教本を個々に見てきたが、ここでは初学者用の教本としての3冊に共通する特徴を良いところ・悪いところという観点からみていく。

良いところ：

- 1) 学習内容が章としてまとめられて、進み具合が分かりやすいように工夫されている。
- 2) インストールの段階から解説されている。独立した章がわりふられている。
- 3) 無味乾燥にならないようにゲームが応用として、とりあげられている。
- 4) サンプルプログラムが Web からダウンロードできるようになっている。

悪いところ：

- 1) 説明不足などところがある。なぜが抜けており、天下りの的に書かれている。
- 2) 著者は、初心者ではないので、分かっているものとして書いている。
- 3) 再帰定義などにふれられていない(フラクタルなど、形の科学的には物足りない)。
- 4) Class などの項目がない。少し進んだプログラミングでは困るだろう。

このようにみていくと、初めて Python にふれた初心者がプログラミングを好きになり、ゲームなどのプログラムを自由に作れるようになるには、まだまだ多くの課題が残っているように思える。

2.3. 10日 で 3冊 の入門書を読み終える

前章で紹介した3冊の入門書を10日で読み終えた。なぜ、10日という制限を設定したかについては、3日から1週間で読み終えるのは、短すぎて表面をなぞるだけになる可能性がある。また、1か月もかけて読むのでは、途中で嫌になる可能性があると考えたからである。以下に、10日で3冊の入門書を読んだ記録を、準備期間を含めて、表1および表2にまとめた。

表1：準備期間

日付	行動記録
2020年2月7日(金)	勝木書店(新二の宮店)にて3冊の本購入
2020年2月8日(土)	Pythonista3をapple storeで購入
2020年2月10日(日)	Python3.8.1をPCにインストール

前章で紹介した3冊の入門書を10日で読み終えた。なぜ、10日という制限を設定したかについては、3日から1週間で読み終えるのは、短すぎて表面をなぞるだけになる可能性がある。また、1か月もかけて読むのでは、途中で嫌になる可能性があると考えたからである。以下に、10日で3冊の入門書を読んだ記録を、準備期間を含めて、表1および表2にまとめた。

表 2 : 読書記録*

日程	超入門 ^[1]	いちばんやさしい ^[2]	ゼロからやさしく ^[3]
1 日目	ステージ 1～ステージ 15	—	—
2 日目		Chap. 1～Chap. 4	
3 日目	—	Chap. 5	—
4 日目	—	Chap. 6	—
5 日目	—	Chap. 7～Chap. 8	—
6 日目	—	Chap. 9～Chap. 10	—
7 日目	—	—	Chap. 1～Chap. 2
8 日目	—	—	Chap. 3～Chap. 4
9 日目	—	—	Chap. 5～Chap. 6
10 日目	—	—	Chap. 7

*3冊の本を、1日目に1冊目、2日目から6日目で2冊目、7日目から10日目で3冊目を読みおえた。なお、[1]はPython超入門、[2]はゼロからやさしくはじめるPython入門、[3]はゼロからやさしくはじめるPython入門を略している。1日目：2月12日、2日目：2月14日、3日目：2月15日、4日目：2月17日、5日目：2月19日、6日目：2月20日、7日目：2月22日、8日目：2月23日、9日目：2月24日、10日目：2月25日である。

教本を独習するとともに、オリジナルなゲームプログラミングに挑戦した。PCと携帯端末(iPhone、iPad)でおこなったゲームプログラミング実践の過程を表3にまとめた。なお、初めの段階は、教本にしたがったプログラミングの学習内容とオリジナルなゲームプログラミングがオーバーラップしていた。実践したプログラミングについて、作成したプログラムを示しながら、表3の記録を補っていく。この段階では、プログラミング技術と分かりやすさ(初心者が作りやすさに重点をおいているので、`_main()`というような作り方にしていない。上から順に実行されるプログラムになっている。)に重点をおいている。具体的な日程と内容は、以下の通りである。2月19日：おみくじプログラムをつくる。Python超入門(Day5 Stage17に、「一パイソンでおみくじをつくろう」1日目(2月12日))に似たものがあった(2月27日に気が付く)。乱数をつかったおみくじのプログラムのリストを付録1プログラム1～3に載せておく。プログラム1から3は、プログラムの行数を短く簡潔になるようにしただけで、同じ動作をするプログラムである。なお、初心者は、行数が多くなっても、分かりやすくプログラミングした方が良いとだろうという感想である。

全体として、「やさしい入門書は、初心者に優しくない。」という印象である。また、ここであげた3冊の教本を読み終えた後に、参考となる本について述べておく。入門Python3[4]は、C言語におけるスタンダードであるカーニハン&リッチーの本[18]に対応し、辞書的にもマニュアル的にも使える。また、少し進んだ入門書として、陶山嶺著の本[19]が良いだろう。困ったときインターネットで検索し、非常に役立ったHomePageの内容をまとめて本にしたものである。

表3：プログラミング実践編

日付	PC Python 3.8.1 (Anaconda)	iPad & iPhone Pythonista 3
2月19日	おみくじプログラム	おみくじプログラム
2月20日 ～ 2月28日	グラフィックの練習 TKinter を使ってみる Turtle Graphics を使う	グラフィックの練習 Examples(Game Tutorial)をみる Turtle Graphics を使う
3月1日		クラス 継承の練習
3月2日		再帰定義へ挑戦 階乗
3月4日		コントロール、コッホ集合 フラクタル図形 完成
3月5日	フラクタル図形 完成	
3月3日	スキープログラム開始	スキープログラム開始
3月6日	スキーゲーム (キーボード入力コントロール) 完成	
3月9日		スキーゲーム (加速度センサーコントロール) 完成

3. Python プログラミングに挑戦

10日で教本の学習を終えたのち、教本から一旦離れ、独自に描画プログラムに挑戦した。形の科学会の大きなテーマである「画像」に関連して、Python に内包されている Turtle Graphics 及び tkinter を使ってお絵描きをする。

3.1. 再帰的アルゴリズム

Python を使って、自らを呼び出す構造をもった再帰的アルゴリズムを考えよう。再帰的アルゴリズムは、3冊の教本では取り扱われておらず、初めて聞くと難しそうに聞こえるかもしれない。しかし、再帰的アルゴリズムは、階乗の計算やフラクタル図形の描画に使われる。なお、フラクタル図形は、コッホ曲線やペンローズタイルが形の科学会誌の表紙としても使われている。

最初に、再帰定義を使った簡単でかつ実用的な例として、階乗の計算を考えよう。nの階乗は、 $n! = n \times (n-1)!$ で定義されるように、n! は再帰的に計算される。これを Python で書いてみると、

```

1 def kaijyou(n):
2     total = 1
3     if 1 > n:
4         return total
5     return n * kaijyou(n - 1)

```

たった5行の関数として書ける。関数 kaijyou() の中で、5行目で、kaijyou() を呼び出しているのが分かる。関数の中で自分自身を呼び出しており、再帰的に書くことができた。

次に、再帰関数(recursive function)を使って、自己相似(self-similar)な図形を描いてみ

よう。図3は、再帰関数を使って描いた、カントール集合(Cantor Set)とコッホ曲線(Koch Curve)である。フラクタル幾何学で、よく知られた図形が描けた。カントール集合(Cantor Set)とコッホ曲線(Koch Curve)を描くプログラムを付録1プログラム4に示す。なお、IDLEでPython Shellを立ち上げてHelpのTurtle Demoを選ぶと、Chaos (Logistic 写像をもちいた Chaos)、Fractal、Penrose tilingなどのデモを楽しむことができる。

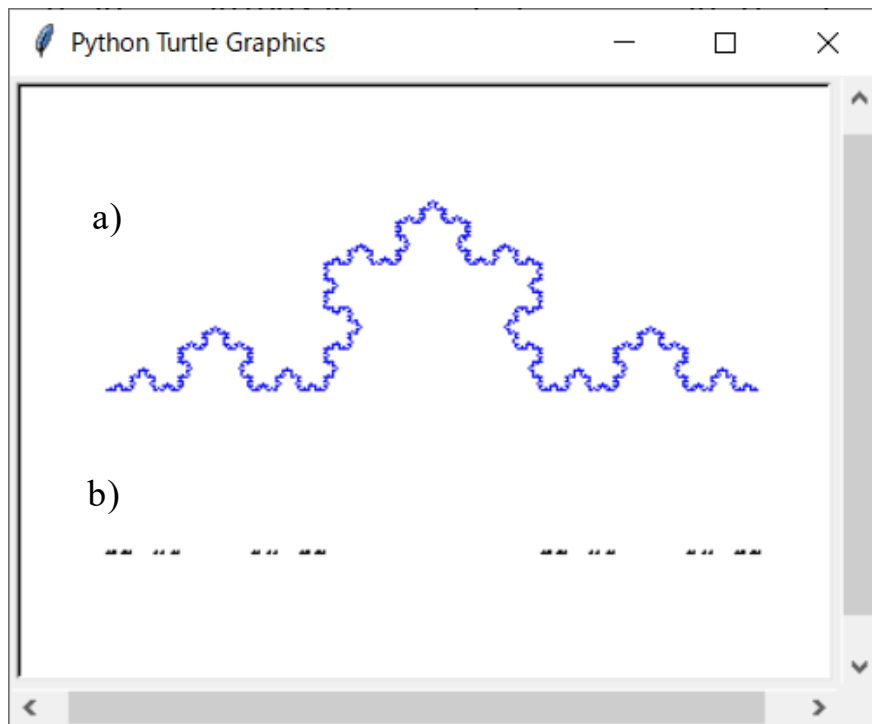


図3：フラクタル図形：a) コッホ曲線(Koch curve)、b) カントール集合(Cantor Set)。

4. Python プログラミングに挑戦

4.1. 再帰的アルゴリズム

Pythonista3を利用して、iPhone & iPadでPythonのプログラミングをおこなった。なお、Pythonista3は、Python 2とPython 3をサポートしているが、ここでは、Python 3 (ver, 3.6)を使った。また、Pythonista3の特徴の一つは、iPhone (iPad)の各種センサーを使えるライブラリをサポートしていることである。この利点を生かすと、多様なプログラムが製作できる。

ここでは、iPhone (iPad)の加速度センサーを使ったゲームを作った。まず、`import motion`でライブラリを読み込むことにより、`motion.get_gravity()`で(x, y, z)の重力を計測できるようになる。注意しなければならないのは、`motion.start_updates()`としておかないと、計測を始められないことである。図4に、スキーゲームが動作している例を示す。まず、レベルを1か2によって選ぶとゲームがスタートする。そして、iPhoneを傾けることによって、スキーヤーを左右に移動させる。スタート地点からゴールラインに至るまでの間に、マークを通ると、ポイントをゲットできるというゲームである。

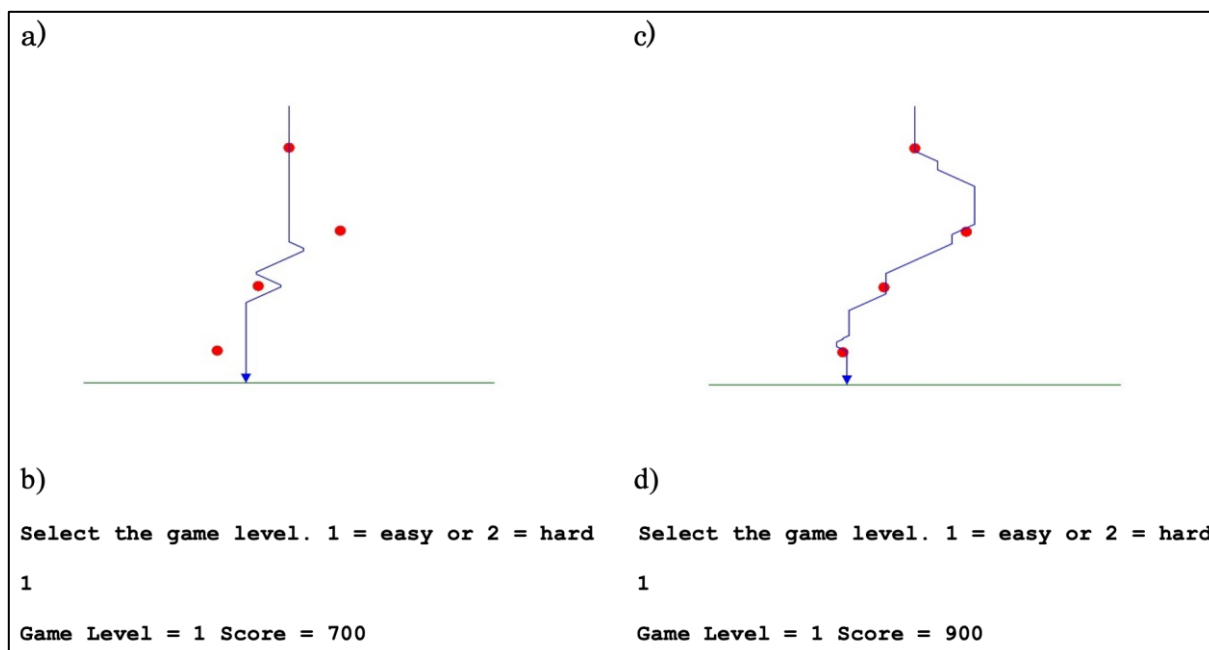


図4：スキーゲームの実行例を2例示す。a)、c)に Turtle Graphics の出力を、b)、d)に Console の出力を示す。

5. おわりに

60 歳を超えて新しいプログラミング言語を学ぶことができるかの事例研究をおこなった。Python に初めて触れて、どのくらいの期間でゲームプログラムが作れるかに挑戦した。さて、若年者と高齢者に大きな差はあるのだろうか？若い学生が Python をどのようにとらえているかを知るため、大学生および大学院生を対象に Python に関するアンケート調査をおこなった。学生の Python に対する学習状況を知ることができ、さらに新しいプログラム言語に取り組むときに、高齢者と若年者の間に差異があるかどうかを明らかにできる可能性がある。

福井大学工学部機械・システム工学科の非線形科学研究室の学部学生と大学院生を対象に 2020 年 5 月 11 日にプログラミングに関するアンケート調査をおこなった。アンケートの内容は、Python を中心に好きなプログラミング言語や何をしたいかに関するものである。実際のアンケートは、付録 2 として掲載している。なお、新型コロナウイルス感染症 (COVID-19) のため、Google Classroom 介してアンケート調査を実施した。アンケート結果は、ネットを利用して PDF ファイルにして添付ファイルとして、メールで送ってもらい、回収した(5 月 11 日 6 人、12 日 1 人、13 日 6 人、14 日 2 人、15 日 1 人)。機械・システム工学科の 4 年生 8 人、知能システム工学専攻の大学院生 1 年生 3 人、2 年生 5 人の 16 人の男子学生から回答を得ることができた。アンケートの集計結果を表 4 に示す。

アンケートから Python に関する興味が非常に高いことが分かる。アンケートに協力してくれた学生全員が Python を勉強したいと答えている。また、ほとんどの学生が Python でプログラムした経験をもっていた。なお、福井大学工学部の機械・システム学科では実験や演習で Python を使っている。一般的に、全国の工学部で、C 言語および Python は授業に組み込まれている。学生の興味に関しては、ひとつに偏っていなかったが「人工知能」「人間の脳」「ゲーム」に半数以上の学生が興味を持っていることが分かる。これらの分野

で、Python がよく使われていることも人気の理由かもしれない。

表 3：プログラミングに関するアンケートの集計*

質問	回答		
1 Python の経験	ある 15(8)	ない 1(0)	—
2 プログラミングは好きですか	はい 13(6)	いいえ 0(0)	どちらともいえない 3(2)
3 好きなプログラミング言語	C 3(1)	JAVA 1(1)	Python 10(4)
	C++ 0(0)	その他 2(2) [内訳: Swift 1, Matlab 1]	
4 勉強したいプログラミング言語	C 0(0)	JAVA 0(0)	Python 16(8)
	C++ 0(0)	その他 0(0)	ない 0(0)
5 携帯端末でプログラミングをしたいか	したい 5(3)	したくない 6(3)	わからない 5(2)
6 興味ある分野 (複数可)	ロボット制御 5(5)	人工知能 15(8)	Web アプリ 6(4)
	人間の脳 8(4)	ゲーム 9(4)	なし 0(0)

*カッコ内は院生の人数

60 Python は、非常に強力な言語処理に関する関数など有している[4][19]。それゆえ、その潜在能力を引き出そうとすると(様々な関数などを使おうとすると)、決して優しいプログラミング言語 と言えない可能性がある。C 言語などのほうが覚えることが少ない。2つの言語のスタンダードな本、カーニハン&リッチーの C 言語の本[18]と Python3[4]の本の厚さを比較すると分かる。逆に、Python は関数やライブラリが充実しているので、一旦、理解すれば楽かもしれない。これは、関数やライブラリを使いこなすのに時間がかかることを意味する。

形の学会において、画像処理、パターン認識は、学会設立当初からの大きな研究テーマである。Python は、画像処理やパターン認識に、膨大なライブラリを有している。無料であるのも大きな特徴であり、初期コストを必要とせず学習を始められる。初歩レベルの入門書でさえ、画像処理を体験できる[6]。次に、Python に少し慣れたら読むと面白い本について述べる。現在、Python が注目されているのは、AI と関連が深いためでもある。AI、特に、Deep Learning の分野においては Python がスタンダードになっている[20][21]。Python と Deep Learning を勉強してみたいと思った方には、斎藤著：ゼロから作る Deep Learning[20]を薦める。最低限の Python の復習から始まり、形の学会の主要なテーマの一つである画像認識に関して、パーセプトロンからニューラルネットワークへと解説している。つまずきやすいところを丁寧に補いながら、分かり易く理解できるように工夫されている。現在、携帯端末さえあれば、PC がなくても Python のプログラミングに挑戦できるのみならず、深層学習などを体験できる。Google Colaboratory [22]や Sony の Neural Network Console[23]は、Python でライブラリを使い Web 上で深層学習を実行できるアプリケーションである。これらによって、Python および機械学習や Deep Learning を学ぶしきいが低くなってきていることは興味深いことである。

以上、60 歳を越えて 10 日で Python でゲームを作れるようになるか、および教本の独

習による学習過程の事例を示すことができた。また、20日余りで、センサーなどを使った本格的なゲームを製作できるようになった事例を示せた。現在、新型コロナウイルス感染症禍の所為で、自宅勤務が推奨されている。一般的に歳をとるとともに新しいことに挑戦することが苦手になってくるが、自宅勤務の利点を生かし、新しいことに挑戦するチャンスかもしれない。最後に、本研究が、新しくプログラミング言語に挑戦しようとする方々のヒントになることを期待する。

謝辞

本研究をおこなう上で有益な議論をしてくださった高田宗樹教授およびアンケートに協力してくれた福井大学工学部非線形科学研究所のメンバーに感謝いたします。最後に、論文を改訂する上で有益なコメントをくださった査読者および編集者の杉浦明弘氏に感謝いたします。

参考文献

- [1] Laura T. Germine, Bradley Duchaine, Ken Nakayama: Where cognitive development and aging meet: Face learning ability peaks after age 30, *Cognition*, Volume 118, Issue 2, 201-210 (2011)
- [2] 徳島県医師会 HomePage: <https://tokushima.med.or.jp/>
- [3] 松村太郎: iPhone「82歳日本人開発者」は何がスゴイのか. 東洋経済 ONLINE, 2017/06/05 <https://toyokeizai.net/articles/-/174799>
- [4] Bill Lubanovic 著、斎藤康毅 監訳、長尾高弘 訳: 入門 Python3、オライリー・ジャパン、pp. 567 (2015)
- [5] Google for Education の Google's Python Class: <https://developers.google.com/edu/python/>
- [6] クジラ飛行機: ゼロからやさしくはじめる Python 入門 —基礎からスタートして、ゲームづくり、機械学習まで学ぼう!—、マイナビ出版、pp. 255 (2018)
- [7] Krishna : Guru99 www.guru99.com
- [8] The 2015 Top Ten Programming Languages <https://spectrum.ieee.org/computing/software/the-2015-top-ten-programming-languages>
- [9] The 2016 Top Programming Languages <https://spectrum.ieee.org/computing/software/the-2016-top-programming-languages>
- [10] The 2017 Top Programming Languages – IEEE Spectrum Ranking <https://spectrum.ieee.org/static/interactive-the-top-programming-languages-2017>
- [11] The 2018 Top Programming Languages – IEEE Spectrum Ranking <https://spectrum.ieee.org/static/interactive-the-top-programming-languages-2018>
- [12] The Top Programming Languages 2019 – IEEE Spectrum Ranking <https://spectrum.ieee.org/computing/software/the-top-programming-languages-2019>
- [13] 安藤正芳: 日経 Xtech (2019年11月18日)

- <https://xtech.nikkei.com/atcl/nxt/column/18/01068/111100001/>
- [14] Python Software Foundation: <https://www.python.org/>
 - [15] Ruby 2.7.0 リファレンスマニュアル:
<https://docs.ruby-lang.org/ja/latest/doc/glossary.html>
 - [16] 及川えり子：Python 超入門 – モンティと学ぶはじめてのプログラミング–、
オーム社、pp.179 (2020)
 - [17] 鈴木たかのり & 杉谷弥月：いちばんやさしい Python の教本 – 人気講師が教える基礎
からサーバーサイド開発まで–、インプレス、pp. 271 (2017)
 - [18] カーニハン、リッチー 石田晴久訳:プログラミング言語 C 第 2 版 ANSI 規格準拠、共
立出版、pp.360 (1989)
 - [19] 陶山嶺：Python 実践入門、技術評論社、pp. 349 (2020)
 - [20] 斎藤 康毅：ゼロから作る Deep Learning – Python で学ぶディープラーニングの理論と
実装–、オライリー・ジャパン、pp.298 (2016)
 - [21] Antonio Gulli (アントニオ・グッリ) & Sujit Pal (サジット・パル)著、大串正矢、久保
隆宏、中山光樹訳：直感 Deep Learning – Python×Keras でアイデアを形にするレシピ–、
オライリー・ジャパン、pp.309 (2018)
 - [22] Google Colaboratory: <https://colab.research.google.com/notebooks/intro.ipynb#>
 - [23] Sony Neural Network Console: <https://dl.sony.com/console/#/dashboard>

付録1 Python プログラムのリスト

【注】何時プログラムが完成したのかが分かるように、プログラム名の右辺に完成日時が記されている。なお、プログラム5のスキューゲームはiPhone(iPad)Pythonista3用である。

プログラム1

```
# おみくじ 2020年2月19日
from random import *
ofuda = ['大吉', '吉', '小吉', '末吉', '凶', '大凶']
print('今日の運勢は', end=' ')
dice = 6 * random()
print(ofuda[int(dice)], end=' ')
print('です。')
```

プログラム2 プログラム1を簡潔に書いたもの

```
from random import *
ofuda = ['大吉', '吉', '小吉', '末吉', '凶', '大凶']
print('今日の運勢は', + choice(ofuda) +'です。')
```

プログラム3 プログラム1を2行で簡潔に書いたもの

```
from random import *
print('今日の運勢は{}です。'.format(choice(['大吉', '吉', '小吉', '末吉', '凶', '大凶'])))
```

プログラム4

```
# カントール集合 コッホ曲線 2020年3月4日
import turtle
```

```
def moveturtle(x, y):
    turtle.penup()
    turtle.goto(x,y)
    turtle.pendown()

def koch(length1, n):
    if n == 0 :
        turtle.forward(length1)
    else:
        koch(length1/3, n - 1)
        turtle.left(60)
        koch(length1/3, n - 1)
        turtle.right(120)
        koch(length1/3, n - 1)
        turtle.left(60)
        koch(length1/3, n - 1)
```

```

def cantor(length2, n):
    if n < 1 :
        turtle.forward(length2)
    else:
        cantor(length2/3, n - 1)
        turtle.penup()
        turtle.forward(length2/3)
        turtle.pendown()
        cantor(length2/3, n - 1)

turtle.setup(400, 300)
turtle.speed(0)
turtle.hideturtle()

turtle.color('blue')
moveturtle(-150, 0)

koch(300, 5)

turtle.width(2)
turtle.color('black')
moveturtle(-150, -75)

cantor(300, 5)

プログラム 5 (iPad 用スキー センサー重力加速度使用)
# スキースラローム 2020 年 3 月 3 日 (改良 3 月 9 日)
import motion
import sound
import turtle
import time

def moveP(x, y):
    turtle.penup()
    turtle.goto(x, y)
    turtle.pendown()

turtle.setup(600, 500) # グラフィックのサイズをきめる
turtle.speed(500)

```

```

# Drawing Goal Line
turtle.color('green')
moveP(-200, -150)
turtle.goto(200, -150)

# Define the position and color of targets
target = {1:(0, 100), 2:(50, 10), 3:(-30, -50), 4:(-70,-120)}
turtle.color('red')

for i in range(4):
    x = target[i+1][0]
    y = target[i+1][1]
    moveP(x,y)
    turtle.begin_fill()
    turtle.circle(5)
    turtle.end_fill()

turtle.color('blue')
turtle.speed(8) # speed(6)か speed(9)くらいが適当   それ以上だと描画が間に合わない
turtle.right(90) # turtle (矢印) を前向きにする

# Starting position (0, 150)
x = 0
y = 150
moveP(x, y)
turtle.dot(1)

# Select game level
gamelevel = 1
print('Select the game level. 1 = easy or 2 = hard')
gamelevelstring = input()
gamelevel = int(gamelevelstring)

if gamelevel != 2: gamelevel = 1

dx = 0
score = 0
motion.start_updates() # このコマンドがないと、motion.get_gravity()が起動しない
sound.play_effect('arcade:Coin_4')

while y > - 150:

```

生

```
time.sleep(0.01) # 時間間隔 秒単位 0.1 秒も動作するようだ 3月7日
command = 's' # ここで、変数 command を定義しておかないと、NameError が発
gravity = 10 * motion.get_gravity() # gravity = (x, y, z) となっている gravity[1]
で x コンポートを使用

if gravity[1] > 0.2 : command = 'l'
if gravity[1] < - 0.2 : command = 'r'

if 's' in command : dx = 0
if 'l' in command : dx = - 2
if 'r' in command : dx = 2

y -= 1
x += dx
turtle.goto(x, y) # Player の移動

for i in range(4): # Checking touch the targets
    xtmp = target[i+1][0]
    ytmp = target[i+1][1]
    rr = (x - xtmp)**2 + (y - ytmp)**2
    if rr < (10 / gamelevel) :
        sound.play_effect('arcade:Coin_4')
        score += 100 * gamelevel

sound.play_effect('arcade:Explosion_3') # End of game.
print('Game Level =', gamelevel, 'Score =', score)
```

プログラミング言語に関して

年 月 日
性別（男・女）
年齢 歳

アンケートに協力をお願いします。（にチェックしてください）

1. Python を使ってプログラミングしたことがありますか？

ある ない

2. プログラミングは好きですか？

はい いいえ どちらともいえない

3. 好きなプログラミング言語を一つ教えてください。

C JAVA Python C++
 その他（ ）

4. 勉強したいプログラミング言語を一つ教えてください。

C JAVA Python C++
 その他（ ）
 ない

5. 携帯端末でプログラミングをしたいですか？

したい したくない わからない

6. 以下に示された分野の中で興味があるものを教えてください（複数可）。

ロボット制御 人工知能 Web アプリケーション 人間の脳
 ゲームプログラミング なし

情報の取り扱いについて：本アンケートで得られた個人情報に関しては、研究活動の目的のみで使用し、ご本人の同意なく第三者に開示・提供することはいたしません。

Colaboratory で形の科学を楽しもう

－ 第 1 回 コッホ曲線を描いてみよう －

平田隆幸

福井大学 大学院工学研究科 知能システム工学専攻

〒910-8507 福井市文京 3 丁目 9-1

hirata@u-fukui.ac.jp

Let's Enjoy Science on Form by Colaboratoy

- Draw a Koch Curve -

Takayuki Hirata

Department of Human & Artificial Intelligent Systems, Faculty of Engineering,
University of Fukui, 3-9-1 Bunkyo, Fukui 910-8507, Japan.

(2020 年 8 月 24 日受付, 2020 年 8 月 30 日受理)

1. はじめに

Python は、現在もっとも人気があるプログラミング言語である。また、プログラミング初心者にも学習が容易なプログラミング言語として知られている。しかし、コンピュータに不慣れな初心者にとっては、学習環境を整える段階でつまづいてしまうかもしれない。そのため、多くの Python の教本は、インストールに 1 つの章を割いている。もし、インストールすることなく、すぐに Python を使えたら、プログラミングのハードルが低くなるだろう。

Google が提供する Colaboratory[1]は、PC などを必要とせず、スマートフォンなどの携帯端末があり Web ページにアクセスさえできれば利用できる。Colaboratory は、Jupyter Notebook をベースにしており、機械学習、AI (Artificial Intelligence) などにも容易に取り組めるようになっている。ここでは、Colaboratory を使って、形の科学の面白さを紹介する。

2. Colaboratory とは

Colaboratory は、Web 上で Python を使える環境である。Google アカウント (xxx@gmail.com) をもっており Colaboratory の HomePage にアクセスさえできれば、すぐに使えるようになる。なお、Google アカウントは簡単に入手できるので、すでに持っておられる方も多いただろう。まだ、Google アカウントをもっていない読者は、まずアカウントを入手しよう。

次に、Colaboratory の HomePage (<https://colab.research.google.com/>) にアクセスしよう。図 1 に示すような「Colaboratory へようこそ」のページが出てくるだろう。



図 1 : 「Colaboratory へようこそ」の Web ページ。

Colaboratory のはじめにしたがって、Colab ノートブックを使ってみる。Colab ノートブックは、Python のコードを記述して実行できる環境である。図 1 のコードセルでは、電卓として Python を使っている。以下にその例を見てみよう。

```
seconds_in_a_day = 24 * 60 * 60
seconds_in_a_day
```

1 行目で変数 `seconds_in_a_day` に数値を代入し、2 行目で変数 `seconds_in_a_day` の値を出力させている。

図 1 の下部にある [] の位置にポインターを移動させると、実行ボタン▶が左上端に現れて▶となるので、クリックすることで実行される。コードセルと計算結果の出力を示す。

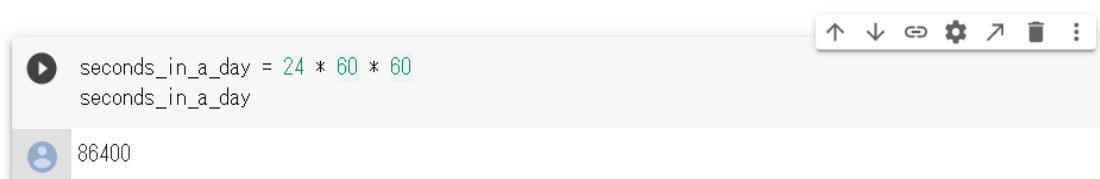


図 2 : 最初に出てくるコードセルと出力例。

Python はライブラリを import することにより、グラフィカルにグラフを描くことができる。もちろん、Colaboratory も画像も取り扱える。Python の数値計算ライブラリである numpy を使って計算した結果を、matplotlib を使って描画したグラフの例も示されている。図 3 に、Python のコードセルと出力の部分抜き出したものを示す。

```
[ ] import numpy as np
    from matplotlib import pyplot as plt

    ys = 200 + np.random.randn(100)
    x = [x for x in range(len(ys))]

    plt.plot(x, ys, '-')
    plt.fill_between(x, ys, 195, where=(ys > 195), facecolor='g', alpha=0.6)

    plt.title("Sample Visualization")
    plt.show()
```

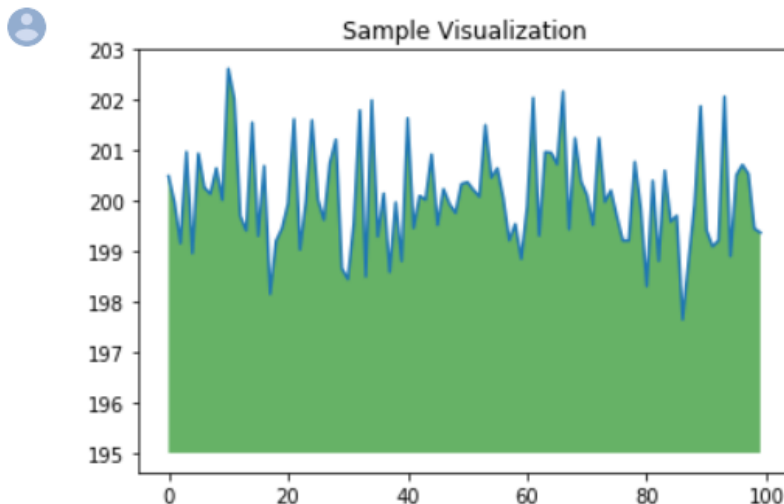


図 3 : Python のコードセルとグラフ出力。

図 3 の下部のグラフは乱数をプロットしたものである。numpy ライブラリの random 関数により 0 から 100 の乱数を生成し、+200 のバイアスを加えたものを 100 個つくりプロットしてある。コードセルの中の数値を編集して、いろいろと変えてみよう。まずはあまりなやまず、やってみることにより慣れよう。プログラミングの学習においては、経験上「習うより慣れよ」の精神で挑戦するのが近道のような気がする。

3. コッホ曲線を描く

さて、Colaboratory を使って「形の科学」を楽しんでみよう。まず、新しいコードセルを準備する（図4参照）。

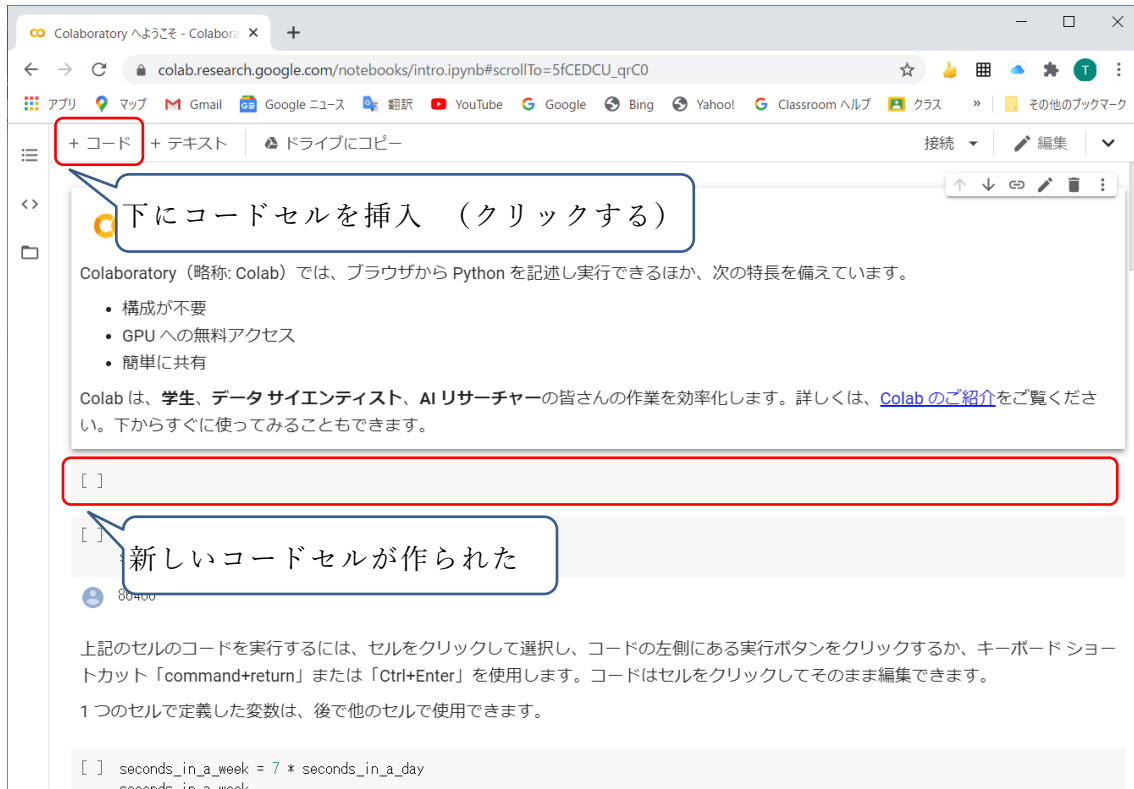


図4：吹き出し(○)でコードセルを挿入する様子を説明している。線で囲まれている部分が操作と Colaboratory の動作である。

コードセルに、次のプログラムを代入しよう。

```
!pip install ColabTurtle
import ColabTurtle.Turtle as turtle
turtle.initializeTurtle()
turtle.penup()
turtle.goto(100,400)
turtle.pendown()
turtle.speed(10) # 1(slow) - 10(fast)
def koch(length1, n):
    if n == 0 :
        turtle.forward(int(length1)) # integer にしないとエラーになる
    else:
        koch(length1/3, n - 1)
        turtle.left(60)
        koch(length1/3, n - 1)
```

```
turtle.right(120)
koch(length1/3, n - 1)
turtle.left(60)
koch(length1/3, n - 1)

turtle.right(90)
koch(600, 4)
```

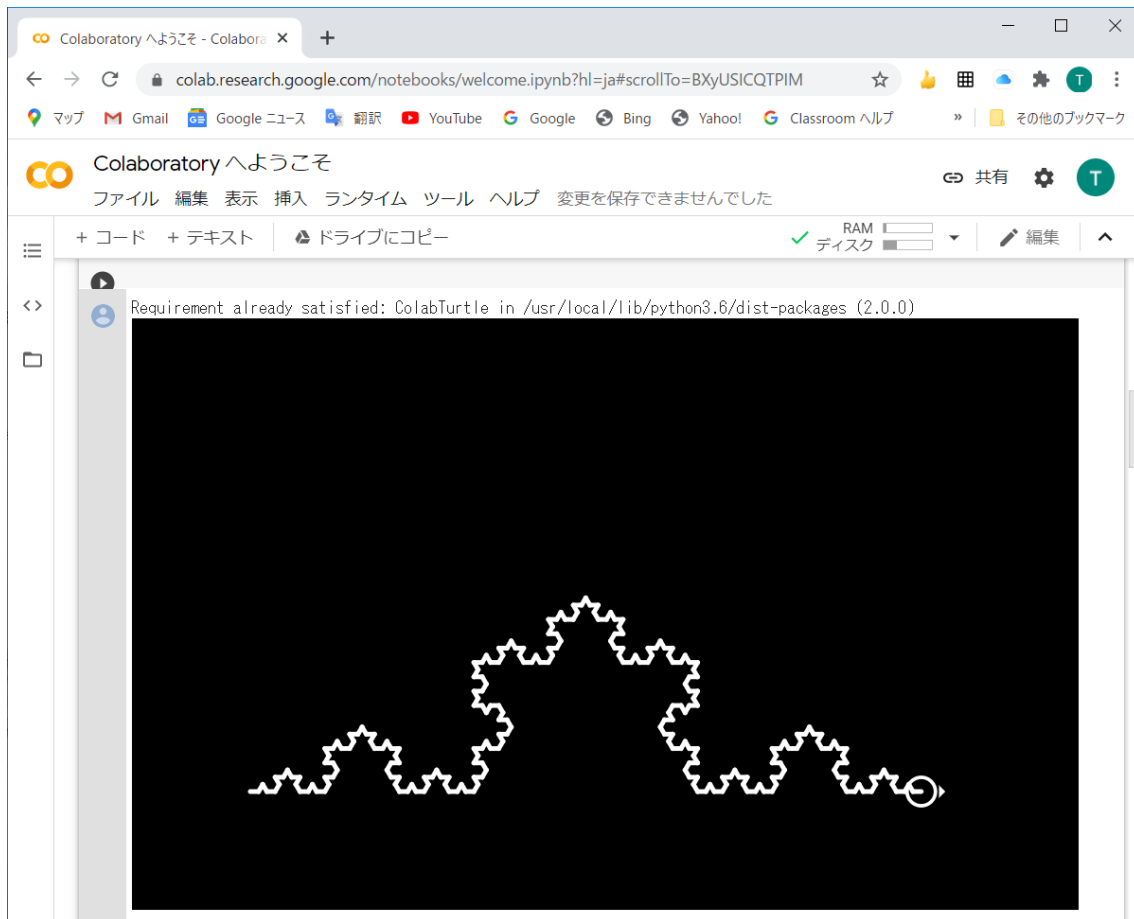


図 5 : コッホ曲線。

図 5 は、Turtle Graphics を使って、コッホ曲線を描画したものである。なお、Colaboratory で Turtle Graphics を使えるようにするために、ColabTurtle を import した。

```
!pip install ColabTurtle
import ColabTurtle.Turtle as turtle
turtle.initializeTurtle()
```

pip コマンドを使い上記の 3 行で、ColabTurtle[2] ライブラリを使えるようにしている。ColabTurtle は、制限はあるものの Colaboratory で Turtle Graphics を使えるようにしたものである [2]。「おまじない」と考えてもらってよいだろう。

形の科学会でおなじみのフラクタル図形（図5参照）が描けた。プログラムを少しだけ解説すると、再帰定義を使って関数 `koch(length1, n)` を定義している。具体的には、第4世代（入れ子構造が4のもの）のコッホ曲線を `koch(600,4)` として描いている。なお、 $n \geq 5$ にすると細くなりすぎてしまう。いろいろと試してみよう。

Python は、学びやすいプログラミング言語であり（例えば、[3]を参照）、Colaboratory を使うとすぐに始められる。ぜひ、スマートフォンなどで楽しんで頂けたら思う。次回からカオス・フラクタルなど様々なものを紹介していく。また、プログラムは形の科学会 HP から download できるようにする予定である。

【(注) Colaboratory の HomePage からキャプチャーした図1～5は、本来カラーであり白黒で印刷すると見にくい場合があります。カラーで鮮明に見たい場合は、Colaboratory の HomePage にアクセスしてください。】

謝辞

原稿を読んで有益なコメントをしてくださった高田宗樹教授、大学院生の高津和紀君をはじめとする福井大学大学院工学研究科知能システム工学専攻非線形科学研究室のメンバーに感謝いたします。

参考文献

- [1] Google Colaboratory <https://colab.research.google.com/notebooks/intro.ipynb#>
- [2] ColabTurtle <https://github.com/tolgaatam/ColabTurtle>
- [3] 平田隆幸：Python を始めて10日でゲームを作れるようになるのか－61歳からの挑戦：0から始める Python Programming－，形の科学会誌（投稿中）