



# 形の科学会誌

第 34 卷 第 2 号 2019

Journal of the Society for Science on Form

```
a = 2.8; xmax = 0.75; xmin = 0.7; dd = 500; kmax = 99999;  
Do[x[0] = xmin + (xmax - xmin) / dd kk; y[0] = 0;  
flag[kk] = 0; pa[kk] = x[0];  
Do[y[k + 1] = y[k] + a (x[k] - x[k]^2);  
x[k + 1] = x[k] + y[k + 1];  
If[x[k + 1] < 0, {flag[kk] = 1, Break[]}], {k, 0, kmax}], {kk, 0, dd}];  
plist = Table[{pa[k], flag[k]}, {k, 0, dd}];  
ListPlot[plist, PlotRange -> {{0.7, 0.75}, {-0.25, 1.25}},  
PlotStyle -> Black, Axes -> False, Frame -> True]
```

形の科学会

<http://katachi-jp.com/>



目次

【論文】

- 異常回転分岐への長い道 - 何をもって“異常”というのか -  
山口 喜博 ..... 56

【追悼】

- 高橋 徹先生を偲んで  
千場 良司 ..... 78

【交流】

- FORMA 学術情報の新しい公開のしくみについて  
高田 宗樹・松浦 執 ..... 80

【シンポジウム】

- 第87回 形の科学シンポジウム 「生物と医学にまつわる形と物理法則」  
討論記録 ..... 82

【会告など】

- 会告 ..... 89  
原稿募集 ..... 91



# 異常回転分岐への長い道

## – 何をもって“異常”というのか –

山口喜博 (元帝京平成大学)

〒290-0073 千葉県市原市国分寺台中央 2-4-14

chaosfractal@iCloud.com

Long Way to the Anomalous Rotation Bifurcation

- With what as for “anomalous”? -

Yoshihiro Yamaguchi

(2019年6月17日受付, 2020年1月19日受理)

**Abstract:** Consider the reversible two-dimensional area preserving map with one parameter  $a$  ( $\geq 0$ ). Suppose that the system is integrable at  $a = 0$ , there exist a saddle fixed point  $P$  and an elliptic fixed point  $Q$  at  $a > 0$ , and the period-doubling bifurcation of  $Q$  occurs at  $a_c(1/2)$ . At  $a = a_c(p/q)$  ( $0 < a_c(p/q) < a_c(1/2)$ ), the rotation bifurcation of  $Q$  occurs and a saddle periodic orbit ( $p/q$ -BS) and an elliptic one ( $p/q$ -BE) with the rotation number  $p/q$  (an irreducible fraction,  $0 < p/q < 1/2$ ) appear. There exists the map satisfying the conditions that the saddle-node bifurcation happens at  $a = a_c^{sn}(p/q)$  ( $< a_c(p/q)$ ) for the restricted rotation number  $p/q$ ,  $p/q$ -BS and  $p/q$ -BE appear, the orbital points of  $p/q$ -BS collide with  $Q$  at  $a = a_c(p/q)$  and those of  $p/q$ -BS appear again from  $Q$  at  $a > a_c(p/q)$ . These bifurcation processes are named the anomalous rotation bifurcation (ARB). The anomalous parameter interval (API)  $a = [a_c^{sn}(p/q), a_c(p/q))$  is defined. The ordinal rotation bifurcation (ORB) does not have API. The origin of ARB is investigated. It is proved that ARB of  $Q$  occurs if there exists the symmetry axis whose curvature is positive at  $Q$ , and ORB of  $Q$  does not occur in API. Finally, we show that the movement of  $1/3$ -BS appeared through ARB causes the disintegration-reproduction of the outer most invariant curve around  $Q$ .

**Keywords:** Reversible area preserving map, Ordinal rotation bifurcation, Anomalous rotation bifurcation, Outermost invariant curve

## 1. 本論文の目的

最初に可逆面積保存方向保存写像で生じる回転分岐について説明する。議論を簡単にするために楕円型不動点 $Q$ を利用する。楕円型不動点 $Q$ の周りで、軌道点は一回の写像で平均として角度 $\theta$ だけ回転したとする。比 $\theta/(2\pi)$ が有理比であるとしよう。回転数 $p/q$ を既約分数として $\theta/(2\pi) = p/q$ が成り立つならば、不動点 $Q$ より回転数 $p/q$ をもつサドル型周期軌道

( $p/q$ -BS) と楕円型周期軌道 ( $p/q$ -BE) が対として生じる. この現象を, 「 $Q$ が回転分岐を起こした」と表現する.

例として回転数 $1/4$ の楕円型周期軌道とサドル型周期軌道が生じた直後では, 楕円型不動点 $Q$ の近傍の回転の仕方は $1/4$ より速くなっている. 回転数 $1/4$ の周期軌道点が存在している場所から更に $Q$ より遠ざかると, 回転の仕方は $1/4$ より遅くなる. このように $Q$ の周りの回転の仕方は $Q$ から遠ざかるにつれて減少している. このような性質を満たす回転分岐を本論文では正常回転分岐 (Ordinal rotation bifurcation) と呼ぶ. このような楕円型不動点 $Q$ の周りの回転の仕方は, 太陽系の周りの惑星の回転に似ている. 太陽が $Q$ に相当する. 太陽に最も近い水星は速く回転し約 87 日で 1 回転する. 遠ざかるにつれて遅くなり, 地球の場合は約 365 日で太陽の周りを一周する.

回転数 $1/3$ の楕円型周期軌道とサドル型周期軌道は,  $Q$ より生じるのではなく  $Q$ より離れた場所に生じることがある. この場合,  $Q$ の近傍の回転の仕方は  $1/3$  より遅い.  $Q$ の近傍から遠ざかると回転数は増加して  $1/3$  になり, 更に遠ざかると回転の仕方は $1/3$ より遅くなる. つまり,  $Q$ の近傍における軌道点の回転の仕方より速く回転をする領域が,  $Q$ より離れた場所に生じたことがわかる. このような性質を満たす回転分岐を異常回転分岐 (Anomalous rotation bifurcation) と名付ける. 異常回転分岐の場合は, 先に述べた太陽系モデルに喩えられない.

回転数の違いで正常回転分岐または異常回転分岐が生じることがある. 本論文ではこの問題を検討するために条件 1.1 を満たす可逆面積保存方向保存写像 $T$ を導入する.

**条件 1.1.** 可逆面積保存方向保存写像 $T$ は条件(i), (ii)と(iii)を満たす.

- (i) パラメータは一つで $a$ とする.
- (ii)  $a > 0$ で, サドル型不動点 $P$ と楕円型不動点 $Q$ が存在する.
- (iii) 系は $a = 0$ で可積分で,  $a = a_c(1/2)$ で楕円型不動点 $Q$ は周期倍分岐を起こす.

本論文で使用する可逆面積保存方向保存写像 $T$ を紹介する.

$$T : y_{n+1} = y_n + f(x_n), \quad x_{n+1} = x_n + y_{n+1}. \quad (1)$$

写像関数 $f(x)$ が $f(x) = a(x - x^2)$  ( $a \geq 0$ )の場合, 写像を接続写像と呼ぶ[1]. この写像は条件 1.1 を満たす. 因みに接続写像はエノン写像族に含まれる[2]. 写像の定義面は平面である.

接続写像において,  $a > 0$ では二つの不動点が存在する. 不動点 $P = (0,0)$ はサドル型不動点である. もう一つの不動点 $Q = (1,0)$ は,  $0 < a < 4$ では楕円型不動点である. 不動点 $Q$ は,  $a = 4$ で周期倍分岐を起こし,  $a > 4$ では反転を伴うサドル型不動点となる. よって, 本論文で検討するパラメータ $a$ に関する区間は $a \in (0,4]$ である.

写像系における異常回転分岐は, 回転数が  $1/3$  ならびに回転数が  $1/3$  より少し小さな回転数で生じることが知られている[1,3]. 本論文の主目的は, 楕円型不動点 $Q$ が起こす異常回転分岐の原因を明らかにすることである. 次に本論文の第 2 節以降の内容を紹介する.

第 2 節. 使用する写像の性質, 対合表現, 対称線等について紹介する.

第 3 節. 正常回転分岐と異常回転分岐の違いを議論する. 結果として異常回転分岐が生じるかどうかを判定する方法を与える. これをもとに異常回転分岐が生じる原因を明らか

にする。

第4節. 異常回転分岐で生じる異常回転パラメータ区間の性質を議論する。

第5節. 異常回転分岐が生じるかどうかを判定するアルゴリズムを与え, 全異常回転パラメータ区間を数値計算で決定する。

第6節. 最遠不変曲線の崩壊再生現象と異常回転分岐で生じた周期軌道点との関係を議論する。

第7節. 本論文で得られた結果をまとめる。

## 2. 準備

### 2.1. 対合, 対称線, 対称周期軌道

写像  $T$  は対合  $g$  と  $h$  の積で  $T = h \circ g$  と書ける. 記号  $\circ$  は単なる分離記号である. 対合  $g$  と  $h$  を次に示す.

$$g\left(\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}\right) = \begin{pmatrix} -y - f(x) \\ x \end{pmatrix}, \quad h\left(\begin{matrix} y \\ x \end{matrix}\right) = \begin{pmatrix} -y \\ x - y \end{pmatrix}. \quad (2)$$

ここで  $g \circ g = h \circ h = id.$ . 式(2)の意味を説明する. 対合  $g$  を縦ベクトル  $(y, x)$  に作用すると, 新しい  $y$  座標が  $-y - f(x)$  と決まる.  $x$  座標は変化しない. 対合  $h$  についても同様に理解できる. 対合は面積保存であるが方向反転写像である.

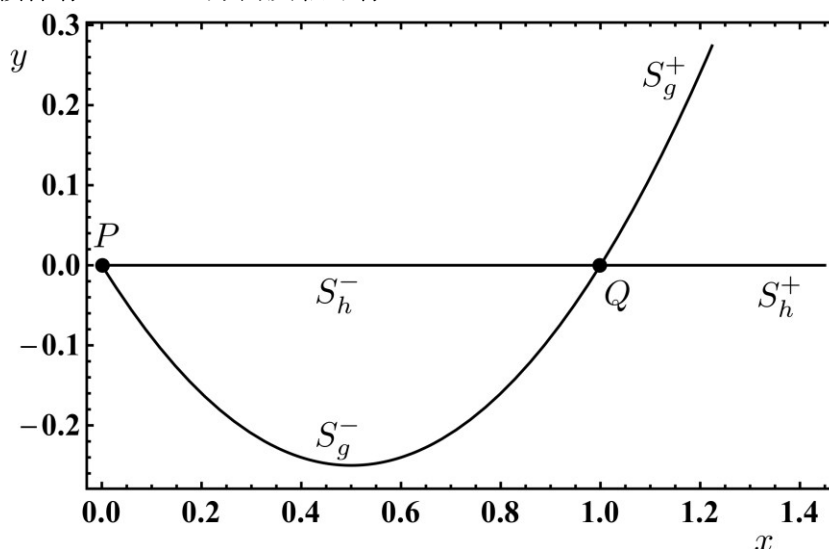


図1: 接続写像の対称線.  $a = 2$ .

対合の不動点の集合が対称線である. 接続写像における対称線を次に示す(図1).

$$S_g \quad : \quad y = -f(x)/2, \quad (3)$$

$$S_h \quad : \quad y = 0. \quad (4)$$

今後の議論で, 対称線  $S_g$  と  $S_h$  を二つのブランチに分ける. 不動点  $Q$  は対称線  $S_g^+$  と  $S_g^-$  の両方に含まれるとした. 対称線  $S_h^+$  と  $S_h^-$  においても同様である.

$$S_g^+ : y = -f(x)/2 \quad (x \geq 1), \quad (5)$$

$$S_g^- : y = -f(x)/2 \quad (0 \leq x \leq 1), \quad (6)$$

$$S_h^+ : x = 0, \quad (x \geq 1), \quad (7)$$

$$S_h^- : y = 0, \quad (0 \leq x \leq 1). \quad (8)$$

対称周期軌道は対称線上に軌道点を二点持つ。ただし、本論文では不動点 $P$ と $Q$ は不動点として扱い対称周期軌道に含めない。

## 2.2. 回転分岐で生じる対称周期軌道

力学系を研究する際に、議論が複雑化することを避けるために力学系を制限する基本的要請を置く。これらを要請 2.1 としてまとめておく。

### 要請 2.1.

[I] パラメータ $a$ を0から大きくすると、楕円型周期軌道点の近傍における軌道点の回転の仕方が速くなる（パラメータに関する単調増大性）。

[II] パラメータ $a$ を固定した場合、楕円型周期軌道点の近傍から遠ざかるにつれて軌道点の回転の仕方が遅くなる（単調ねじれ性）。

パラメータ $a$ を0から大きくすると、楕円型不動点 $Q$ 近傍における軌道点の回転の仕方が速くなる。回転の方向は時計回りである。この回転の仕方の指標として、既約分数である回転数 $p/q$ を導入する。ここで $q$ は周期。周期軌道が1周期の間に $Q$ の周りを回転する回数が $p$ である。回転数 $p/q$ は一回の写像で軌道点が平均角度 $2\pi \times p/q$ だけ $Q$ の周りを回転することを意味する。

パラメータ $a$ が

$$a_c(p/q) = 4\sin^2(\pi p/q) \quad (0 < p/q \leq 1/2) \quad (9)$$

を満たすと、対称線上に軌道点を持つ回転数 $p/q$ の周期軌道が $Q$ より生じる。回転数が $0 < p/q < 1/2$ を満たす場合、この分岐を回転分岐と呼ぶ。式(9)は要請 2.1 [I] を満たしている。特に $p/q = 1/2$ の場合が周期倍分岐である。回転分岐で生じたサドル型対称周期軌道を $p/q$ -BS とし、楕円型対称周期軌道を $p/q$ -BE とする。これらをまとめて $p/q$ -B と書く。 $p/q = 1/2$ の対称周期軌道は1/2-BE と書く。1/2-BE は周期倍分岐で生じた周期軌道である。ただしサドル型周期軌道1/2-BE は存在しない。ここで B は Birkhoff (バーコフ) を、S は Saddle (サドル) を、E は Elliptic (楕円) を表している。これらの表現は参考文献[1]に従っている。

パラメータ $a$ が小さいと回転数の小さな周期軌道点が $Q$ から生じ、パラメータの増加にもない回転数の大きな周期軌道点が $Q$ から生じる。不動点 $Q$ からこの様子を見ると、回転数の大きな周期軌道点が $Q$ の近くにあり、回転数の小さな周期軌道点が $Q$ より遠くにある。こ



これは要請 2.1[II]を満たしている．式(9)を見る限り要請 2.1 は満たされている．

臨界値を与える式(9)を導く．不動点 $Q$ の周りで線形解析を行うと，線形化行列 $M$ が下記のように得られる．

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 1 & 1-a \end{pmatrix}. \quad (10)$$

二つの固有値 $\lambda_{\pm}$ は， $0 < a < 4$ では複素数となる．

$$\lambda_{\pm} = \frac{(2-a) \pm i\sqrt{4a-a^2}}{2} \equiv \cos(2\pi p/q) \pm i \sin(2\pi p/q). \quad (11)$$

回転数 $p/q$ を決めて式(11)を $a$ について解けば 臨界値 $a_c(p/q)$ が求まる．

本論文で扱う対称周期軌道は性質 2.2 と分類 2.3 を満たす．これらの性質の詳細については参考文献[1]を参考にしてほしい．

**性質 2.2.** 回転分岐（異常回転分岐）で生じた対称周期軌道 $p/q$ -BEは対称線 $S_g^+$ に軌道点をもつ．

性質 2.2 は主軸性と呼ばれている．これをもとにして分類 2.3 が得られる．以下の記法で，例として $z_0 \in S_h$ は初期軌道点 $z_0$ が対称線 $S_h$ 上にあることを意味している．

**分類 2.3.**  $a > a_c(p/q)$ において $p/q$ -B は下記のように分類される．ただし， $0 < p/q < 1/2$ ．

[I]  $p/q$ -BE.

- (a)  $z_0 \in S_g^-, z_k \in S_g^+$  (偶数周期  $q = 2k, k \geq 1$ . 回転回数 $p$ は奇数).
- (b1)  $z_0 \in S_h^-, z_k \in S_g^+$  (奇数周期  $q = 2k + 1, k \geq 1$ . 回転回数 $p$ は奇数).
- (b2)  $z_0 \in S_h^+, z_k \in S_g^+$  (奇数周期  $q = 2k + 1, k \geq 2$ . 回転回数 $p$ は偶数).

[II]  $p/q$ -BS.

- (a)  $z_0 \in S_h^-, z_k \in S_h^+$  (偶数周期  $q = 2k, k \geq 2$ . 回転回数 $p$ は奇数).
- (b1)  $z_0 \in S_h^+, z_k \in S_g^-$  (奇数周期  $q = 2k + 1, k \geq 1$ . 回転回数 $p$ は奇数).
- (b2)  $z_0 \in S_h^-, z_k \in S_g^-$  (奇数周期  $q = 2k + 1, k \geq 2$ . 回転回数 $p$ は偶数).

### 2.3. 傾き等に関する写像

楕円型不動点 $Q = (1,0)$ を通過する対称線を $y = F(x)$ と書く．楕円型不動点 $Q$ における対称線の傾きを $\xi_0 = dF(1)/dx$ とする．二階微分係数を $\eta_0 = d^2F(1)/dx^2$ とし，三階微分係数を $\rho_0 = d^3F(1)/dx^3$ とする．

最初に，傾き $\xi_1, \xi_2, \dots$ を決める写像を導く．写像 $T$ の両辺を $x_n$ で微分する．

$$\frac{dy_{n+1}}{dx_n} = \frac{dx_{n+1}}{dx_n} \frac{dy_{n+1}}{dx_{n+1}} = \frac{dy_n}{dx_n} + f'(x_n), \quad (12)$$

$$\frac{dx_{n+1}}{dx_n} = 1 + \frac{dy_n}{dx_n} + f'(x_n). \quad (13)$$

ここで， $f'(x_n) = a(1 - 2x_n)$ ．式(13)を式(12)に代入し，更に $\xi_n = dy_n/dx_n$ を利用すると式(14)が導かれる．

$$\xi_{n+1} = \frac{\xi_n + f'(x_n)}{\xi_n + f'(x_n) + 1}. \quad (14)$$

$f'(1) = -a$ を代入すると、傾きを決める一次元写像が得られる。

$$\xi_{n+1} = \frac{\xi_n - a}{\xi_n - a + 1}. \quad (15)$$

式(14)の両辺を $x_n$ で微分して、 $f'(1) = -a$ と $f''(1) = -2a$ を利用すると、二階微分係数 $\eta_n$ に関する写像が得られる。

$$\eta_{n+1} = \frac{(\eta_n - 2a)}{(\xi_n - a + 1)^3}. \quad (16)$$

ここで下記の関係を利用した。

$$\frac{d\xi_{n+1}}{dx_n} = \frac{dx_{n+1}}{dx_n} \frac{d\xi_{n+1}}{dx_{n+1}} = (\xi_n - a + 1)\eta_{n+1}. \quad (17)$$

式(14)の両辺を $x_n$ で二回微分して、 $f'(1) = -a$ 、 $f''(1) = -2a$ と $f^{(3)}(1) = 0$ を代入すると、三階微分係数 $\rho_n$ に関する写像が得られる。ただし、 $f^{(3)}(1)$ は $x = 1$ における三階微分係数である。

$$\rho_{n+1} = \frac{\rho_n}{(\xi_n - a + 1)^4} - \frac{3(\eta_n - 2a)^2}{(\xi_n - a + 1)^5}. \quad (18)$$

回転数 $p/q$ を決めると式(9)より $a$ が決まる。次に不動点 $Q$ を通過する対称線を決める。接続写像 $T$ で、対称線 $S_h$ を選ぶと初期条件は $\xi_0 = \eta_0 = \rho_0 = 0$ で、 $S_g$ を選ぶと初期条件は $\xi_0 = a/2$ 、 $\eta_0 = a$ 、 $\rho_0 = 0$ である。三つの写像を利用すると、 $\xi_1$ 、 $\eta_1$ 、 $\rho_1$ 等が順次決まる。

## 2.4. 既約分数の木表現

本論文ではスターン-ブロコ樹 (Stern-Brocot 樹) を利用する。これを簡単にSB樹と書く。図2を用いてSB樹について説明する。

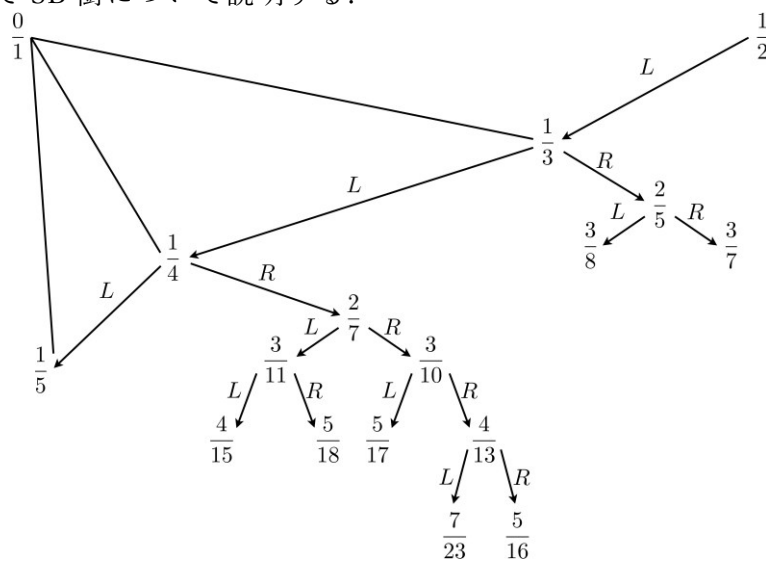


図2：本論文で利用するスターン-ブロコ樹の一部。

木構造の最上部に  $0/1$  と  $1/2$  を置く．これらの分子同士を加算して  $1$  が得られ，分母同士を加算して  $3$  が得られる．木構造として  $0/1$  と  $1/2$  より少し下がった位置に  $1/3$  を配置する． $1/3$  から二つのブランチが出ている．左のブランチを進むと分子は  $(0+1)$  で，分母は  $(1+3)$  で， $1/4$  に着く．右のブランチを進むと分子は  $(1+1)$  で，分母は  $(3+2)$  で， $2/5$  に着く． $1/3$  のように左右にブランチがある分数は木構造におけるノードと呼ばれる．ノードより左に進む場合を  $L$  とし，右に進む場合を  $R$  とする． $1/2$  から出発し  $5/17$  に至る径路は  $[1/2]LLRRL$  と書ける． $[1/2]$  は出発点を表現している．SB 樹の性質については，ホームページ “Cut The Knot” [4] が参考になる．

ノード  $p/q$  の左上にある分数を左親と呼び  $p_l/q_l$  とする．右上にある分数を右親と呼び  $p_r/q_r$  とする．ノード  $p/q$  の左下にある分数を左子と呼び  $m_l/n_l$  とする．右下にある分数を右子と呼び  $m_r/n_r$  とする．これらの分数について 下記の関係が成り立つ．

$$\frac{p_l}{q_l} < \frac{m_l}{n_l} = \frac{p_l+p}{q_l+q} < \frac{p}{q} = \frac{p_l+p_r}{q_l+q_r} < \frac{m_r}{n_r} = \frac{p+p_r}{q+q_r} < \frac{p_r}{q_r}. \quad (19)$$

式(19)より，次の関係が導かれる．ノード  $p/q$  から一度左に進み，その後どのような径路を経ても到達した既約分数はノード  $p/q$  より小さくかつ左親  $p_l/q_l$  より大きい．ノード  $p/q$  から一度右に進み，その後どのような径路を経ても到達した既約分数はノード  $p/q$  より大きくかつ右親  $p_r/q_r$  より小さい．

SB 樹に現れる区間  $(0/1, 1/2)$  にある全ての分数を，楕円型不動点  $Q$  が正常(異常)回転分岐を起こして生じた対称周期軌道の回転数とする．これからは簡単に回転数と呼ぶ．「回転数  $p/q$  の対称周期軌道  $p/q$ -B が正常(異常)回転分岐で生じる」ことを「回転数  $p/q$  が正常(異常)回転分岐で生じる」と簡単に表現する．

### 3. 正常回転分岐と異常回転分岐

#### 3.1. 正常回転分岐: 例 1. $p/q = 1/4$ .

回転数  $1/4$  の回転分岐について調べる．対称周期軌道  $1/4$ -BE は， $z_0 \in S_g^-$  と  $z_2 \in S_g^+$  を満たす (性質 2.2, 分類 2.3[i](a))．そのため，像  $T^2 S_g^-$  と対称線  $S_g^+$  の位置関係を調べる必要がある．回転数  $1/4$  の回転分岐の臨界値は  $a_c(1/4) = 2$  であるから， $a = 2$  として議論を進める．回転数  $1/4$  の楕円型周期軌道の初期点  $z_0 = (x_0, y_0)$  は対称線  $S_g^-$  にあるから， $x_0 = t$  とすると  $y_0 = -(t - t^2)$  である．軌道点  $z_2 = (x_2, y_2)$  の座標は変数  $t$  を用いて記述される．

$$y_2 = t(5 - 11t + 8t^2 - 2t^3), \quad (20)$$

$$x_2 = t(7 - 12t + 8t^2 - 2t^3). \quad (21)$$

対称線  $S_g^-$  上に初期点があるから， $t = 1 - \epsilon$  ( $\epsilon \geq 0$ ) と書くと

$$y_2 = \epsilon + \epsilon^2 - 2\epsilon^4, \quad (22)$$

$$x_2 = 1 + \epsilon - 2\epsilon^4. \quad (23)$$

$0 < \epsilon \ll 1$  ならば， $x_2 > 1$  が満たされる．次に点  $u = (x_2, y_u)$  は対称線  $S_g^+$  上にあるとする．つまり， $y_u = -(x_2 - x_2^2)$  である．ここで  $x_2$  における  $y$  座標の差  $\delta_y = y_2 - y_u$  を求める．

$$\delta_y = 4\epsilon^5(1 - \epsilon^3). \quad (24)$$

不動点 $Q$ の近傍を考える.  $0 < \epsilon \ll 1$ であるから, 差 $\delta_y$ は正である.  $Q$ より $x$ 軸上を右方向に移動すると対称線の像は $S_g^+$ の上方に離れて行く. これは $Q$ より遠ざかると回転の仕方が $1/4$ より減少していることを意味する. 以上で回転数 $1/4$ の周期軌道は正常回転分岐で生じることが示された.

図 3 (a)-(d)を用いて,  $a = 2$ の前後で 像 $T^2S_g^-$ と対称線 $S_g^+$ の関係がどのように変化するかについて説明しよう. 図(a)は, 像 $T^2S_g^-$ と対称線 $S_g^+$ が $Q$ で接触する前の状況である. 図(b)は, 像 $T^2S_g^-$ と対称線 $S_g^+$ が $Q$ で接触した状況である. 像 $T^2S_g^-$ と対称線 $S_g^+$ の $Q$ の近傍における分離のオーダーは $O(\epsilon^5)$  (式(24)) である. よって両者はほとんど重なっているように見える. 図(c)と(d)では, 像 $T^2S_g^-$ と対称線 $S_g^+$ が交差し  $1/4$ -BE の周期軌道点が見れる. 軌道点 $z_0$ が対称線 $S_g^-$ 上にあり, 軌道点 $z_2$ が対称線 $S_g^+$ 上にある.

像 $T^2S_g^-$ は二つの不動点 $P$ と $Q$ を繋ぐ弧である. 差 $\delta_y$ が負ならば, 像 $T^2S_g^-$ は対称線 $S_g^+$ と交差している. つまり,  $a_c(1/4)$ より 小さな値で $T^2S_g^-$ と対称線 $S_g^+$ が接触し交差したことを意味する. これを異常回転分岐が生じるかどうかを判断する判定方法 3.1 とする.

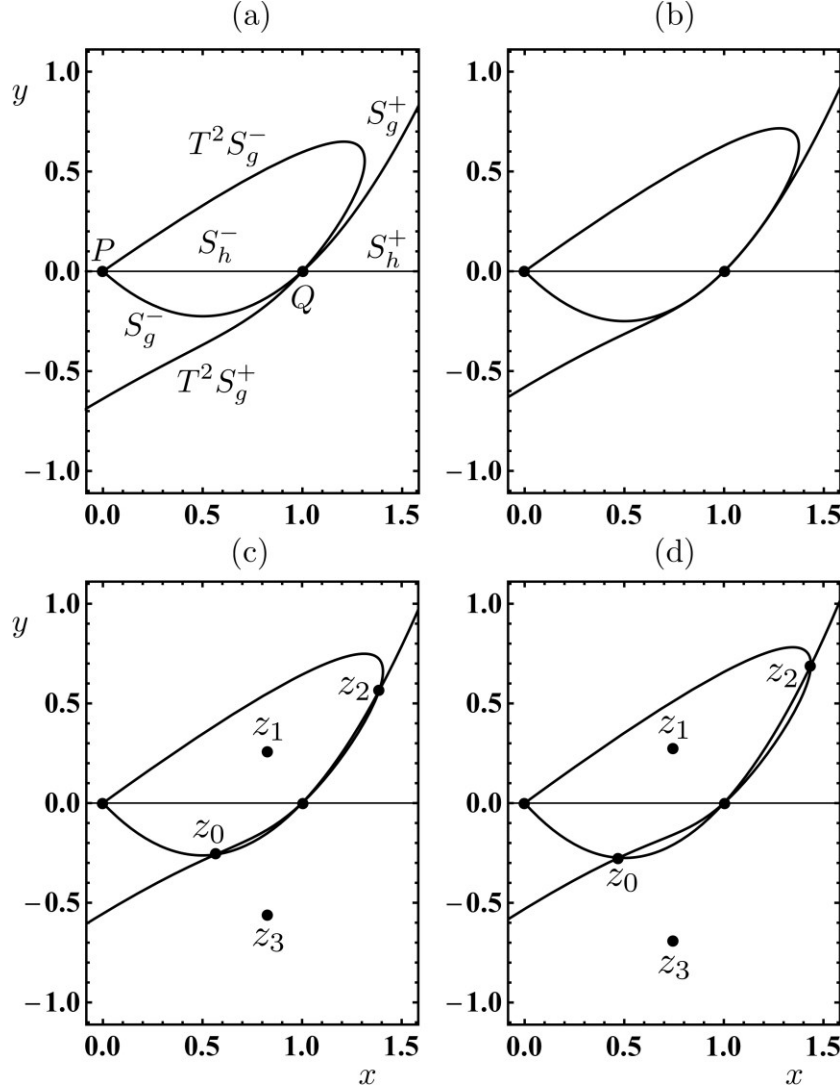


図 3 : 回転数 $1/4$ の周期軌道点の生じ方. (a)  $a = a_c(1/4) - 0.1$ . (b)  $a = a_c(1/4) = 2$ . (c)  $a = a_c(1/4) + 0.1$ . (d)  $a = a_c(1/4) + 0.2$ .

**判定方法 3.1.**  $a = a_c(p/q)$ において, 対称線の像が不動点 $Q$ の近傍で $y = F_i(x)$ と書けるとする. また, 対称線 $S_g$ は $y = F_g(x)$ と記述される. ここで $F_g(1) = F_i(1) = 0$ ,  $F'_g(1) = F'_i(1) = a_c(p/q)/2$ .  $x = 1 + \delta$  ( $0 < \delta \ll 1$ )で, 条件

$$F_i(1 + \delta) < F_g(1 + \delta) \quad (25)$$

が成立すれば,  $p/q$ -B は異常回転分岐で生じる.

### 3.2. 正常回転分岐: 例 2. $p/q = 2/7$ .

回転数  $2/7$  の回転分岐について調べる. 対称周期軌道  $2/7$ -BE は,  $z_0 \in S_h^+$  と  $z_3 \in S_g^+$  を満たす(分類 2.3[i](b2)). 像  $T^3 S_h^+$  と対称線  $S_g^+$  の関係を調べる. 回転数  $2/7$  の回転分岐の臨界値は  $a_c(2/7) = 4\sin^2(2\pi/7) = 2.445041$ . 最初に式(15)を利用して  $\xi_3$  を求める.

$$\xi_3 = \frac{a(a-1)(a-3)}{(-1+6a-5a^2+a^3)} \quad (26)$$

$\xi_3$  の表式に  $a = a_c(2/7)$  を代入すると,  $\xi_3 = a_c(2/7)/2$  が得られる. ここで,  $a_c(2/7)/2$  は対称線  $S_g$  の  $Q$  における傾きである.

次に式(16)を利用して  $\eta_3$  を求める.

$$\eta_3 = \frac{2a(3-12a+32a^2-46a^3+30a^4-9a^5+a^6)}{(-1+6a-5a^2+a^3)^3} \quad (27)$$

この式に  $a = a_c(2/7)$  を代入すると,  $\eta_3$  が対称線の二階微分係数である  $a_c(2/7)$  に等しいことが導かれる. 二階微分係数を利用して異常回転分岐が生じるかどうかの判断ができないので, 式(18) を用いて  $\rho_3$  を求める.

$$\rho_3 = \frac{AB}{C} \quad (28)$$

$$A = 12a^2, \quad (29)$$

$$B = 14 - 70a + 215a^2 - 490a^3 + 823a^4 - 944a^5 + 704a^6 - 332a^7 + 95a^8 - 15a^9 + a^{10}, \quad (30)$$

$$C = (-1 + 6a - 5a^2 + a^3)^5. \quad (31)$$

これらの式に  $a = a_c(2/7)$  を代入し, 数値計算を行うと  $\rho_3 = 2.542420$  が求まる. 対称線  $S_g$  の  $x = 1$  における三階微分係数がゼロであるから  $\rho_3 > 0$  が得られ, 正常回転分岐が生じることが導かれる. ここで得られた事実をもとに異常回転分岐が生じるかどうかを判断する判定方法 3.2 を与える. 第 2.3 節で 傾き等を決める写像が得られているから, 判定方法 3.1 より判定方法 3.2 が利用しやすい.

**判定方法 3.2.** 偶数周期の場合, 周期  $q$  を  $q = 2k$  ( $k \geq 3$ ) とし, 奇数周期の場合,  $q = 2k + 1$  ( $k \geq 1$ ) とする. パラメータ  $a$  は  $a = a_c(p/q)$  に固定する. 対称線  $S_g$  の  $x = 1$  における二階微分係数は  $F''_g(1) = a_c(p/q)$  で, 三階微分係数は  $F_g^{(3)}(1) = 0$ .

異常回転分岐が生じるかどうかの判定は以下のように行う.

- (i)  $\eta_k < F''_g(1)$  ならば, 回転数  $p/q$  は異常回転分岐で生じる.
- (ii)  $\eta_k = F''_g(1)$  の場合,  $\rho_k < 0$  ならば回転数  $p/q$  は異常回転分岐で生じる.

### 3.3. 異常回転分岐: 例 1. $p/q = 1/3$ .

異常回転分岐の例として 1/3-B が生じる過程を紹介する. 1/3-BE は,  $z_0 \in S_h^-$  と  $z_1 \in S_g^+$  を満たすことより, 像  $TS_h^-$  と対称線  $S_g^+$  の関係を調べる (分類 2.3[i](b1)).  $a_c(1/3) = 3$  であるから,  $a = 3$  とする. 式(15) と (16) を利用すると, 像  $TS_h^-$  の  $Q$  における傾き  $\xi_1$  と  $\eta_1$  は以下のように得られる.

$$\xi_1 = \frac{-a}{1-a} = 3/2, \quad (32)$$

$$\eta_1 = \frac{-2a}{(1-a)^3} = 3/4. \quad (33)$$

傾き  $\xi_1$  は対称線  $S_g$  の  $x = 1$  における傾き  $3/2$  に等しい. 対称線  $S_g$  の  $x = 1$  における二階微分係数は 3 である. よって  $\eta_1 < 3$ . 判定方法 3.2(i) より, 1/3-BE は異常回転分岐で生じることが導かれた. 1/3-BS も異常回転分岐で生じる.

次に異常回転分岐が生じる臨界値を求める. ここで  $z_0 = (t, 0)$  とする. 写像を利用すると  $z_1 = (x_1, y_1)$  が決まる.

$$y_1 = a(t - t^2), \quad (34)$$

$$x_1 = (a + 1)t - at^2. \quad (35)$$

軌道点  $z_1$  が  $S_g^+$  上にあるという条件  $y_1 = -(3/2)(x_1 - x_1^2)$  を利用すると下記の関係式が得られる.

$$(a/2)(t - 1)t(a^2t^2 - a(a + 2)t + (a + 3)) = 0. \quad (36)$$

変数  $t$  に関する二次方程式  $a^2t^2 - a(a + 2)t + (a + 3) = 0$  の判別式を  $D$  とする.  $D = a^2 - 8 = 0$  より, サドルノード分岐の臨界値つまり異常回転分岐が生じる臨界値  $a_c^{\text{sn}}(1/3)$  が決まる.

$$a_c^{\text{sn}}(1/3) = 2\sqrt{2}. \quad (37)$$

ここで得られた結果をもとに異常回転分岐における異常回転パラメータ区間を定義しよう.

**定義 3.3.** 回転数  $p/q$  が異常回転分岐を起こすとしよう. 回転数  $p/q$  に関する 異常回転パラメータ区間を  $I_{p/q} = [a_c^{\text{sn}}(p/q), a_c(p/q))$  と定義する.

回転数 1/3 の場合,  $I_{1/3} = [2\sqrt{2}, 3)$  である. 正常回転分岐では異常回転パラメータ区間は存在しないことに注意しよう.

図 4 (a)-(d) を利用して異常回転分岐が生じる様子を説明しよう. 図(a)はサドルノード分岐が生じる前の  $TS_h^+$  と  $S_g$  の配置を示している. サドルノード分岐の臨界点で, 像  $TS_h^-$  が対称線  $S_g^+$  と点  $z_1$  で接する状況を 図(b)で示した. 点  $z_1$  は 1/3-BE の軌道点である. 図(b)の解像度では, 像  $TS_h^-$  と 対称線  $S_g^+$  の分離を確認することはできない. パラメータ  $a$  を  $a_c(1/3) = 3$  に向けて増加すると, 軌道点  $z_1$  は楕円型不動点  $Q$  より遠ざかる. サドルノード分岐で生じたもう一つの点  $w_1$  は 1/3-BS の軌道点で,  $a$  の増加にともない  $Q$  に向けて移動する (模式図

5 を参照). 図(c)が $a = 3$ の状況である.  $a = 3$ で軌道点 $w_1$ は $Q$ と一致する. 更に $a$ を増加すると軌道点 $w_1$ は $Q$ から放出されたように見える. 図(d)が $a > 3$ の状況である.

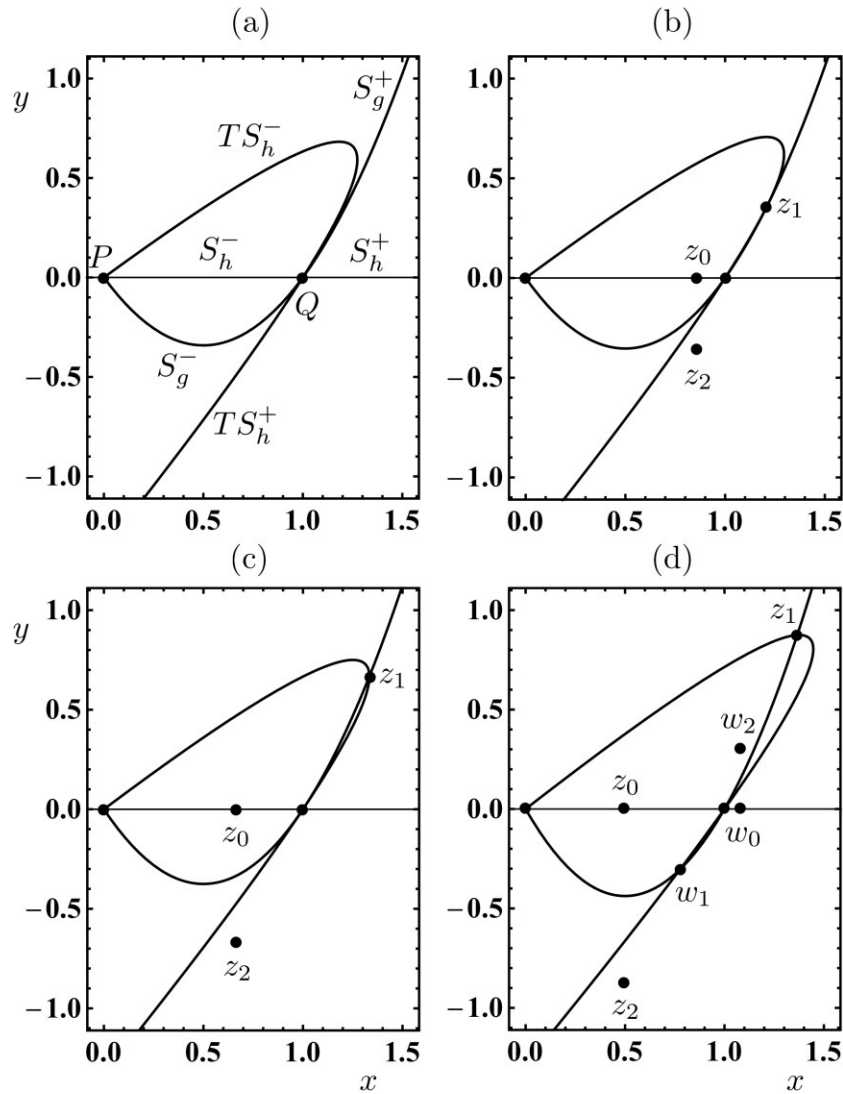


図 4 : 回転数 $1/3$ の周期軌道点の生じ方. (a)  $a = a_c^{sn}(1/3) - 0.1$ . (b)  $a = a_c^{sn}(1/3) = 2\sqrt{2}$ . (c)  $a = a_c(1/3) = 3$ . 点 $z_k$  ( $k = 0, 1, 2$ )は楕円型周期軌道点. (d)  $a = a_c(1/3) + 0.5$ . 点 $w_k$  ( $k = 0, 1, 2$ )はサドル型周期軌道点.

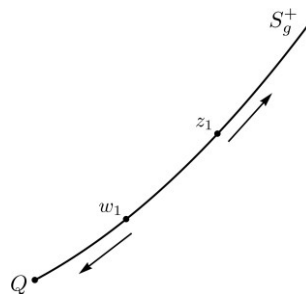


図 5 : パラメータの増加にともなう, 二つの軌道点 $z_1$ と $w_1$ の移動の仕方.

### 3.4. 異常回転分岐: 例 2. $p/q = 3/10$ .

異常回転分岐の二つ目の例として 3/10-B を紹介する. 3/10-BE は,  $z_0 \in S_g^-$  と  $z_5 \in S_g^+$  を満たす(分類 2.3[i](a)). よって, 像  $T^5 S_g^-$  と対称線  $S_g^+$  の関係を調べる. 臨界値は  $a_c(3/10) = 4\sin^2(3\pi/10) = 2.618033$  である. この値に  $a$  を固定して二階微分係数を求める. 初期値は,  $\xi_0 = -a_c(3/10)/2$  ならびに  $\eta_0 = a_c(3/10)$  とした.  $\eta_5 = 2.618033$  が得られるが, これは対称線の二階微分係数  $a_c(3/10)$  に等しい. 次に  $\rho_0 = 0$  として,  $\rho_5$  を求める.

$$\rho_5 = -12.1353 < 0. \quad (38)$$

判定方法 3.2(ii) より, 3/10-BE は異常回転分岐で生じることがわかる. つまり, 3/10-BS も異常回転分岐で生じる. 異常回転区間は  $I_{3/10} = [2.612572, 2.618033]$  である [1].

### 3.5. 異常回転分岐の原因

ここでは一般の写像関数を利用して議論を行う. 最初に写像関数を定義する.

**定義 3.4.**  $C^2$ 級写像関数  $f(x)$  ( $-\infty < x < \infty$ ) のパラメータは一つで  $a (\geq 0)$  とする.  $a > 0$  において写像関数  $f(x)$  は下記の性質を満たすとする.

- (i)  $f(0) = f(1) = 0$ .
- (ii)  $f'(0) > 0$ .  $f'(1) < 0$ .
- (iii)  $f''(x) < 0$  ( $x > 0$ ).

定義 3.4 より, 写像関数  $f(x)$  は区間  $[0, 1]$  で単峰である. 領域  $x > 1$  では,  $f(x) < 0$  が成り立つ. 接続写像の写像関数は定義 3.4 で定義された写像関数に含まれる.

写像関数  $f(x)$  を用いて第 3.3 節で行なった手順を繰り返す. 傾きに関する写像より傾き  $\xi_1$  が決まる.

$$\xi_1 = \frac{f'(1)}{(f'(1) + 1)}. \quad (39)$$

傾き  $\xi_1$  が,  $x = 1$  における対称線  $S_g$  の傾き  $-(1/2)f'(1)$  に等しいとして,  $f'(1)$  が  $f'(1) = -3$  と決まる. 次に二階微分係数  $\eta_1$  を求める.

$$\eta_1 = \frac{f''(1)}{(f'(1) + 1)^3} = -\frac{f''(1)}{8}. \quad (40)$$

$x = 1$  における対称線  $S_g$  の二階微分係数  $F''_g(1)$  は  $F''_g(1) = -f''(1)/2 (> 0)$  である. よって, 下記の関係が成り立つことは明らかである.

$$\eta_1 < F''_g(1). \quad (41)$$

判定方法 3.2(i) より, 回転数  $1/3$  は異常回転分岐で生じることが示された.

$F''_g(1) > 0$  は, 対称線  $S_g$  の楕円型不動点  $Q$  における曲率が正であることを意味している. この事実によって式(41)が成立する. ここで得られた結果をまとめ定理 3.5 とする.

**定理 3.5.** 定義 3.4 を満たす写像関数  $f(x)$  の場合, 対称線  $S_g$  は  $y = -(1/2)f(x)$  と書ける. 対称線  $S_g$  の楕円型不動点  $Q$  での曲率が正であることが,  $Q$  が異常回転分岐を起こす原因である.



写像関数  $f_m(x) = a(x - x^m)$  ( $a \geq 0, m = 2, 3, \dots$ ) は定義 3.4 を満たす. よって  $f_m(x)$  で定義された写像では回転数  $1/3$  は必ず異常回転分岐で生じる. つまり, これらの系では正常回転分岐と異常回転分岐が共に可能であり, 異常回転分岐の存在は異常ではない.

異常回転分岐が生じることは, 楕円型不動点  $Q$  の近傍における回転仕方より速く回転する領域が  $Q$  より離れた所に存在することを意味する. これは要請 2.1[II] が破れていることになる. つまり, 定義 3.4 を満たす写像では楕円点の周りの単調ねじれ性が自然に破れることを意味している.

## 4. 異常回転パラメータ区間の性質

ここでは異常回転パラメータ区間に関する性質を紹介する.

**定理 4.1.** 異常回転パラメータ区間内では正常回転分岐は生じない.

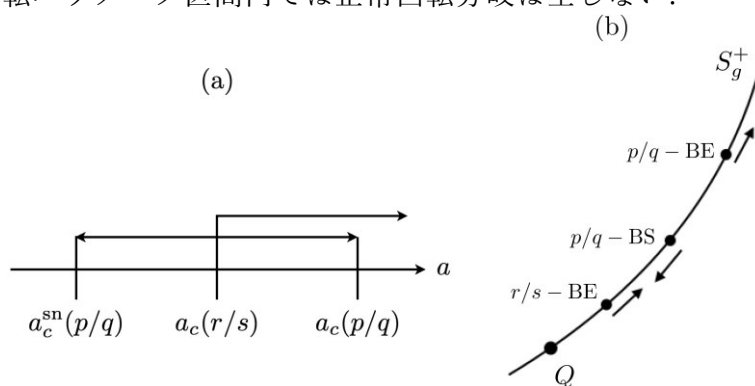


図 6: (a) 関係  $a_c^{sn}(p/q) \leq a_c(r/s) < a_c(p/q)$  が成り立つと仮定した場合. (b). パラメータを増加すると  $r/s$ -BE の軌道点と  $p/q$ -BS の軌道点が衝突する.

**証明.** 関係  $r/s < p/q$  が成り立つとする. よって,  $a_c(r/s) < a_c(p/q)$  が成り立つ. 異常回転パラメータ区間  $I_{p/q} = [a_c^{sn}(p/q), a_c(p/q)]$  が存在すると仮定する. 回転数  $r/s$  が正常回転分岐を起こしたとし,  $a_c^{sn}(p/q) \leq a_c(r/s)$  が成り立つとしよう (図 6 (a)). ここで  $a$  を  $a_c(r/s)$  より増加すると,  $Q$  より生じた  $r/s$ -BE の軌道点が  $Q$  より  $S_g^+$  上を右上方へ向かって移動する (図 6 (b)). 一方,  $p/q$ -BS の軌道点は  $Q$  に向けて  $S_g^+$  上を下方へ向かって移動する. 結果として,  $r/s$ -BE の軌道点と  $p/q$ -BS の軌道点が衝突する. これは矛盾である. 以上で定理 4.1 は証明された.

**命題 4.2.** 異常回転パラメータ区間  $I_{p/q} = [a_c^{sn}(p/q), a_c(p/q)]$  が存在すると仮定する. 回転数に関して  $r/s < p/q$  が成り立つとする.  $a_c^{sn}(p/q) \leq a_c(r/s) < a_c(p/q)$  が成り立つならば, 回転数  $r/s$  も 異常回転分岐を起こし, 下記の関係が成立する.

$$a_c^{sn}(r/s) < a_c^{sn}(p/q) \quad (42)$$

**証明.** 定理 4.1 より, 回転数  $r/s$  が 異常回転分岐を起こすことが導かれる. 次に  $a_c^{sn}(r/s) \geq a_c^{sn}(p/q)$  が成り立つとして矛盾を導く.

最初に  $a_c^{sn}(r/s) = a_c^{sn}(p/q)$  が成り立つ場合,  $p/q$ -B と  $r/s$ -B がサドルノード分岐で同時に生じる. この場合を調べる.

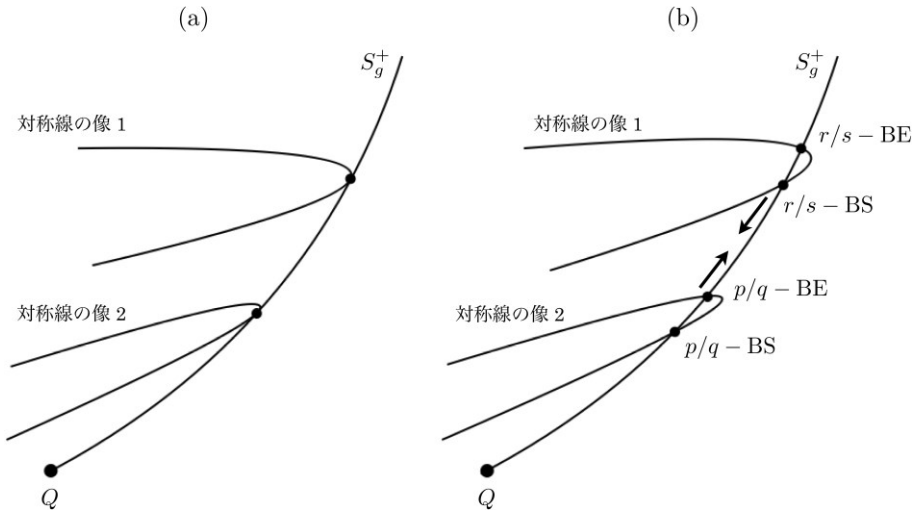


図 7: (a)  $p/q-B$  と  $r/s-B$  がサドルノード分岐で同時に生じた状況. (b) パラメータを増加した場合の軌道点の移動の仕方.

図 7 (a)のように  $p/q-B$  と  $r/s-B$  がサドルノード分岐で同時に生じたとする. パラメータを少し増加した場合における  $p/q-BE$ ,  $p/q-BS$ ,  $r/s-BE$  ならびに  $r/s-BS$  の軌道点を図 7 (b)に示した.  $a > a_c(p/q)$  を満たすパラメータ領域では, 回転数の小さな  $r/s-BE$  の軌道点の位置が,  $p/q-BE$  の軌道点の位置と比べて,  $Q$  より見てより遠くにあるはずである. このことを考慮して図 (b)における軌道点の配置を描いた. パラメータを  $a_c(r/s)$  へと増加すると,  $r/s-BS$  の軌道点が  $Q$  に向けて移動し,  $p/q-BE$  の軌道点は  $Q$  から遠ざかる. 結果としてこれらの軌道点が衝突する. これは矛盾である.

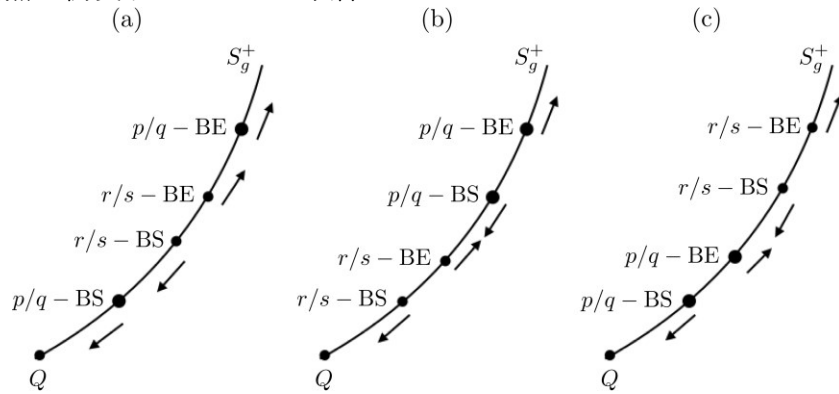


図 8:  $p/q-B$  の軌道点と  $r/s-B$  の軌道点の三つの配置.

次に  $a_c^{sn}(r/s) > a_c^{sn}(p/q)$  の場合を調べる. この場合,  $p/q-B$  が先に生じ,  $r/s-B$  が後から生じる. 図 8 (a)は既に存在している  $p/q-BE$  と  $p/q-BS$  の間に,  $r/s-BE$  と  $r/s-BS$  が生じた場合である.  $r/s < p/q$  であるから,  $r/s-BE$  の軌道点は  $p/q-BE$  の軌道点を追い越す必要がある. これは  $r/s-BE$  の軌道点と  $p/q-BE$  の軌道点が衝突することを意味し, 図 (a)の配置は矛盾である.

図 8 (b)は既に存在している  $p/q-BS$  と  $Q$  との間に  $r/s-BE$  と  $r/s-BS$  が生じた場合である. この場合でも  $r/s-BE$  の軌道点と  $p/q-BS$  の軌道点の衝突が生じるので矛盾である.

図 8 (c)は既に存在している  $p/q-BE$  と  $p/q-BS$  の上方に  $r/s-BE$  と  $r/s-BS$  が生じた場合である. パラメータを  $a_c(r/s)$  へと増加すると,  $r/s-BS$  の軌道点と  $p/q-BE$  の軌道点が衝突する. よって, 図 (c)の配置も矛盾である. 以上で命題 4.2 の証明を終える.

定理 4.1 と命題 4.2 より性質 4.3 が得られる.

**性質 4.3.** 回転数に関して  $r/s < p/q$  が成り立つとする. 異常回転パラメータ区間  $I_{r/s}$  と 異常回転パラメータ区間  $I_{p/q}$  が存在すると仮定する. 二つの異常回転パラメータ区間は, 図 9 (a) と (b) で描かれた関係を満たす.

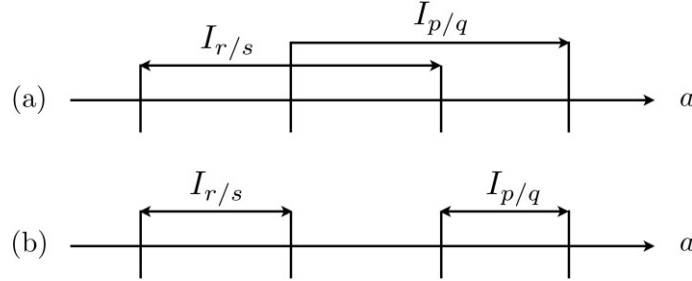


図 9: 二つの異常回転区間  $I_{p/q}$  と区間  $I_{r/s}$  の可能な配置.

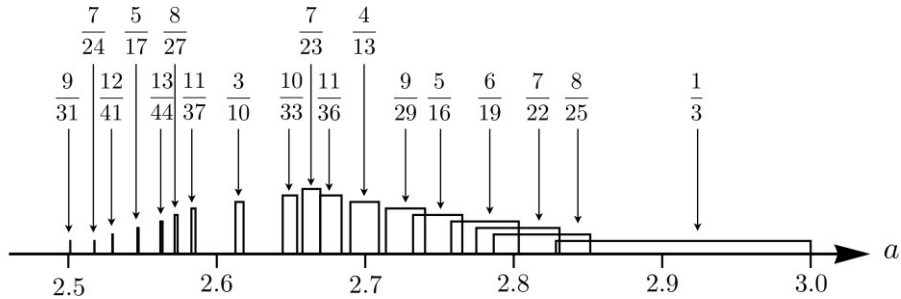


図 10: 異常回転パラメータ区間. 例として  $1/3$  は異常回転パラメータ区間  $I_{1/3}$  を表している.

参考文献[1]で得られた異常回転パラメータ区間を図 10 に示した. これより性質 4.3 の関係が理解できるであろう.

## 5. 全異常回転パラメータ区間の数値計算による決定

判定方法 3.2 をもとに正常回転分岐を起こすのか異常回転分岐を起こすかを判定するアルゴリズムを与える.

### 判定アルゴリズム 5.1.

[p1] 回転数  $p/q$  を与える ( $q \geq 5$ ). パラメータ  $a$  を,  $a = 4\sin^2(\pi p/q)$  に固定する. 偶数周期の場合は  $q = 2k$  とし, 奇数周期の場合は  $q = 2k + 1$  とする. これで写像回数  $k$  が決まる.

[p2] 下記の初期値をもとに  $\rho_k$  を求める.

(i) 偶数周期.  $\xi_0 = a/2$ ,  $\eta_0 = a$ ,  $\rho_0 = 0$ .

(ii) 奇数周期.  $\xi_0 = \eta_0 = \rho_0 = 0$ .

[p3] 判定.  $\rho_k > 0$  ならば正常回転分岐が生じ,  $\rho_k < 0$  ならば異常回転分岐が生じる.

偶数周期の場合, 判定アルゴリズム 5.1 を実行途中で傾き  $\xi_n (1 \leq n \leq k-1)$  が発散することある. この場合は代替アルゴリズム 5.2 を実行する.

**代替アルゴリズム 5.2.** 判定アルゴリズム 5.1 の[P2]を[P2A]に置き換える.

[P2A] 偶数周期. 初期値を $\xi_0 = \eta_0 = \rho_0 = 0$ として,  $\rho_k$ を求める.

代替アルゴリズム 5.2 について説明する. 偶数周期の場合, 異常回転分岐で対称線 $S_g$ 上に軌道点が生じたならば, 対称線 $S_h$ 上にも軌道点が生じる. つまり, 対称線 $S_g^\pm$ に軌道点をもつ偶数周期と, 対称線 $S_h^\pm$ に軌道点をもつ偶数周期がある. 前者は判定アルゴリズム 5.1 で利用した. 代替アルゴリズム 5.2 では後者を利用する. そのため初期値として一階微分係数から三階微分係数までをゼロとして計算を行う. この場合でも判定は三階微分係数の正負で行う.

判定アルゴリズム 5.1 と代替アルゴリズム 5.2 を実施するためのプログラム (付録 A に載せた) を作成した. このプログラムを利用して回転数区間(1/4,1/3)で SB 樹の経路に沿って数値計算を行った. 得られた結果をまとめて数値計算結果 5.3 とする.

**数値計算結果 5.3.** 回転数 $p/q$ は $1/4 < p/q < 1/3$ を満たすとす. SB 樹において, ノード $p/q$ の左親を $p_l/q_l$ とし右親を $p_r/q_r$ とする. また, ノード $p/q$ の左子を $m_l/n_l$ とし右子を $m_r/n_r$ とする (式(19)を参照のこと).

(i) 回転数 $p/q$ と左親 $p_l/q_l$ がともに異常回転分岐を起こすならば, 左子の回転数 $m_l/n_l$ も異常回転分岐を起こす. 回転数 $p/q$ と右親 $p_r/q_r$ がともに異常回転分岐を起こすならば, 右子の回転数 $m_r/n_r$ も異常回転分岐を起こす.

(ii) 回転数 $p/q$ と左親 $p_l/q_l$ がともに正常回転分岐を起こすならば, 左子の回転数 $m_l/n_l$ も正常回転分岐を起こす. 回転数 $p/q$ と右親 $p_r/q_r$ がともに正常回転分岐を起こすならば, 右子の回転数 $m_r/n_r$ も正常回転分岐を起こす.

例を示す. SB 樹の図 2 を参考にしてほしい. ノードとして $2/7$ を考える. 左親 $1/4$ と回転数 $2/7$ は共に正常回転分岐を起こす. (ii)より左子 $3/11$ も正常回転分岐を起こす. 次にノード $3/11$ の場合, 右親 $2/7$ は正常回転分岐を起こす. よって, 右子 $5/18$ も正常回転分岐を起こす. また左子 $4/15$ も正常回転分岐を起こすこと導かれる. このことを繰り返すと $2/7$ 以下の回転数は正常回転分岐を起こすことが導かれる. つまり, ノードが正常回転分岐を起こすならば, SB 樹における経路は回転数が大きくなるように 右(R) に進む. ノード $2/7$ からは右子 $3/10$ へと進む.

次に, ノードとして $p/q = 3/10$ から出発する. ここで,  $p_l/q_l = 2/7$ ,  $p_r/q_r = 1/3$ ,  $m_l/n_l = 5/17$ ,  $m_r/n_r = 4/13$ . この場合,  $p_r/q_r = 1/3$ と $p/q = 3/10$ は異常回転分岐を起こす. よって, 右子の回転数 $4/13$ も異常回転分岐を起こす. 回転数 $4/13$ をノードとすると, 左親は $3/10$ である. 回転数 $3/10$ は異常回転分岐を起こす. よって回転数 $4/13$ の左子  $7/23$ も異常回転分岐を起こす. また, 右子 $5/16$ も異常回転分岐を起こす. ノード $4/13$ からどのような経路をたどっても 到着した回転数は必ず異常回転分岐を起こすことが保証されている. しかし, ノード $3/10$ の左子の回転数 $5/17$ が異常回転分岐を起こすかどうかは分からない. ノード $p/q = 3/10$ から SB 樹における経路は左 (L) へ進む必要がある. つまり, ノード $p/q$ が異常回転分岐を起こすならば SB 樹における経路は回転数が小さくなるように 左 (L) へ進む. 以上を径路選択規則 5.4 としてまとめておく.

**径路選択規則 5.4.** SB 樹における出発点は回転数  $1/3 = [1/2]L$  とする. ノードの回転数を  $p/q$  とする.  $p/q$  の左子の回転数を  $m_l/n_l$  とし, 右子の回転数を  $m_r/n_r$  とする. 異常回転分岐が生じる最小の回転数を見つけるための SB 樹における径路選択は次のように行う.

[P1]

- (i) 回転数  $p/q$  が正常回転分岐を起こした場合. 右 (R) のブランチを選択し  $m_r/n_r$  へと進む.
- (ii) 回転数  $p/q$  が異常回転分岐を起こした場合. 左 (L) のブランチを選択し  $m_l/n_l$  へと進む.

[P2] 進んだ回転数  $m_r/n_r$  または  $m_l/n_l$  を改めて  $p/q$  として, [P1] に戻る.

径路選択規則 5.4 に従って正常回転分岐を生じるか異常回転分岐を生じるかの判定を行った結果の一部を以下に示す. 表現として  $3/10(o)$  は回転数  $3/10$  が異常回転分岐を生じることを意味し,  $11/38(x)$  は正常回転分岐を生じることを意味する. 矢印は SB 樹に沿って進んでいることを記述している.  $o$  が付いた回転数から  $o$  または  $x$  が付いた回転数へは, SB 樹における移動では  $L$  で表現される.  $x$  が付いた回転数から  $o$  または  $x$  が付いた回転数へは, SB 樹における移動では  $R$  で表現される. 回転数  $1/3$  から  $258/889$  までの径路は  $[1/3]LR^2L^4R^9L^2$  である.

$$1/3(o) \rightarrow 1/4(x) \rightarrow 2/7(x) \rightarrow 3/10(o) \rightarrow 5/17(o) \rightarrow 7/24(o) \rightarrow 9/31(o) \rightarrow$$

$$11/38(x) \rightarrow 20/69(x) \rightarrow 29/100(x) \rightarrow 38/131(x) \rightarrow 47/162(x) \rightarrow 56/193(x) \rightarrow$$

$$65/224(x) \rightarrow 74/255(x) \rightarrow 83/286(x) \rightarrow 92/317(o) \rightarrow 175/603(o) \rightarrow 258/889(x). \quad (43)$$

上記の計算を進めることで 回転数  $19113/65858$  が異常回転分岐を起こすことが得られた (付録 B を見よ). この回転数を臨界値の式 (9) に代入すると  $a = 2.500000001$  が得られる. ちなみに回転数  $9/31$  を利用すると  $a = 2.50131$  が, 回転数  $92/317$  を利用すると  $a = 2.50007$  が, 回転数  $175/603$  を利用すると  $a = 2.500003$  が得られる. これらよりサドルノード分岐が生じる臨界値は  $a = 2.5$  に漸近していると考えられる. これより異常回転分岐を起こす最小の回転数は  $(1/\pi)\sin^{-1}(\sqrt{5/8}) = 0.29021531\dots$  に 漸近していることが分かる. 以上の結果をまとめて数値計算結果 5.5 とする.

**数値計算結果 5.5.** 楕円型不動点  $Q$  の異常回転分岐について下記の性質が成り立つ.

- (i) 異常回転パラメータ全区間 :  $(2.5, 3)$ .
- (ii) 異常回転数全区間 :  $((1/\pi)\sin^{-1}(\sqrt{5/8}), 1/3]$ .

## 6. 最遠不変曲線の崩壊再生現象

不変曲線の崩壊再生現象は 1966 年のエノン (Hénon) の論文 [5] で発見され, モーザー (Moser) も議論している [6]. 本節では, 不変曲線の崩壊再生現象について議論する.  $1/3$ -BS の軌道点が  $a = 2\sqrt{2}$  で生じた後, 楕円型不動点  $Q$  に向けて移動する. 一方  $1/3$ -BE の軌道点は生じた地点から更に  $Q$  より遠ざかる. このような周期軌道点の移動によって  $Q$  の周りを囲っていた不変曲線が崩壊すると考えられる. 次に  $a = 3$  で  $1/3$ -BS の軌道点は  $Q$  よ

り放出される．その結果，不変曲線が再生されることが期待される．不変曲線の崩壊再生現象を検討するにおいて  $Q$  より最も遠くにある不変曲線（最遠不変曲線，Outermost invariant curve）に注目する．

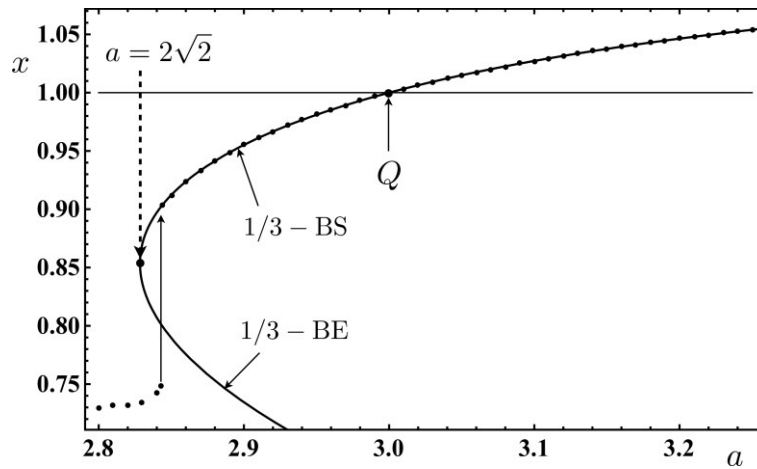


図 11：最遠不変曲線の位置（黒丸で表示）．1/3-BS と 1/3-BE が生じた位置（ $a = 2\sqrt{2}$ ,  $x = 1/2 + 1/\sqrt{8} = 0.85355$ ）は大きな黒丸で示した．太い実線は 1/3-BS と 1/3-BE の位置．

パラメータ  $a$  の値が 3 の近くで生じる最遠不変曲線の崩壊と再生について数値計算で調べた結果を紹介する．不変曲線と  $x$  軸の交点は 2 つある． $x < 1$  の領域にある交点を  $x_l$  とし， $x > 1$  の領域にある交点を  $x_r$  とする．図 11 では， $a < 3$  では  $x_l$  を描き， $a > 3$  では  $x_r$  を描いた．また，サドルノード分岐で  $x$  軸に生じた 1/3-BS と 1/3-BE の軌道点の位置を実線で描いた．最遠不変曲線の位置の決定方法は 付録 C を見てほしい．得られた特徴を述べる．パラメータ  $a$  を 3 に近づけるにつれて最遠不変曲線は不動点  $Q$  に近づき， $a = 3$  で消滅する． $a = 3$  を越すと最遠不変曲線が再生して  $Q$  の近くから遠ざかる．つまり， $a = 3$  では  $Q$  を取り巻く不変曲線は全く存在しない状態が存在する．楕円型不動点の周りには不変曲線がとり囲んでいると言う常識が成り立たない．図 11 から，1/3-BS の移動が最遠不変曲線の存在可能領域を強く制限していることが理解できる．

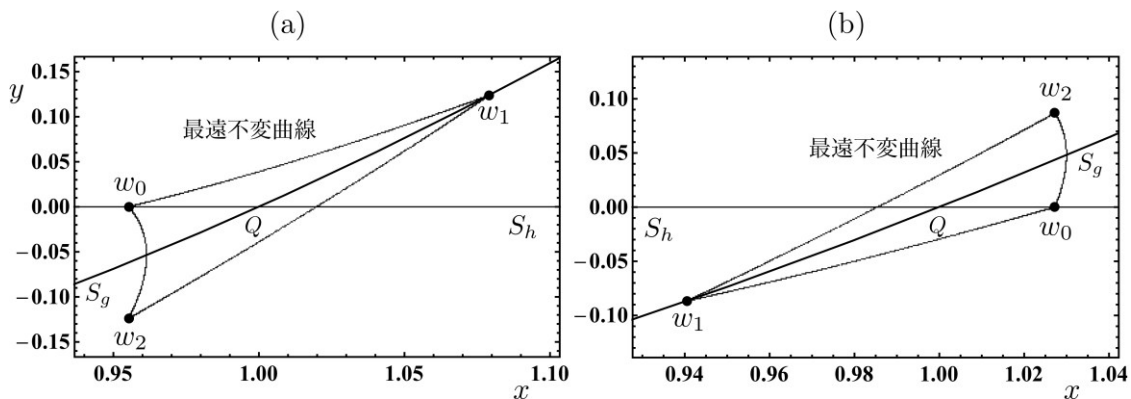


図 12：1/3-BS の軌道点  $w_0, w_1, w_2$  の位置と最遠不変曲線．(a)  $a = 2.9$ . (b)  $a = 3.1$ .  $x$  軸上のサドル軌道点  $w_0$  は， $a$  の増加とともに右に移動し  $Q$  と衝突する．衝突後は更に右へ移動する．

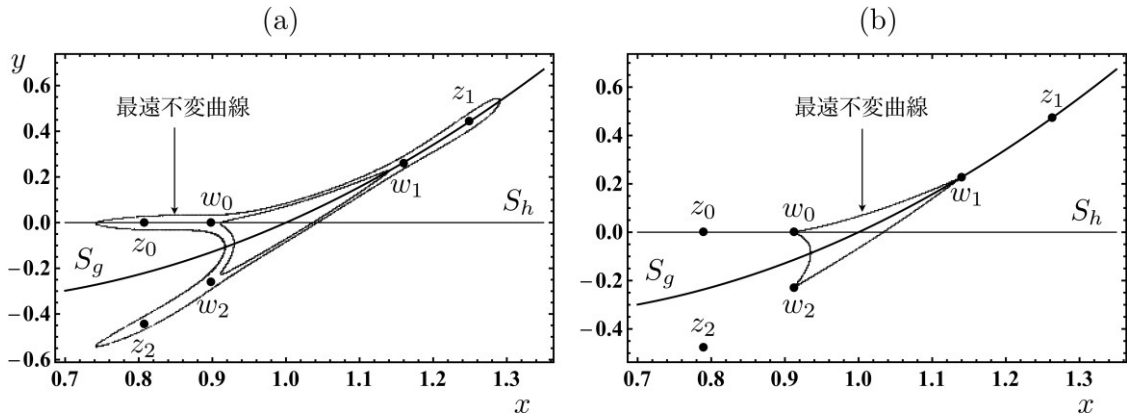


図 13: (a) 1/3-BE の軌道点  $z_0, z_1, z_2$  と 1/3-BE の軌道点  $w_0, w_1, w_2$  は、最遠不変曲線の内側に含まれる。  $a = 2.84$ 。 (b) 1/3-BE と 1/3-BE の軌道点は、最遠不変曲線の外側にある。  $a = 2.85$ 。

1/3-BE の軌道点の位置と最遠不変曲線の位置関係を図 12 に示した。  $a$  の値が 3 より小さい  $a = 2.9$  では、1/3-BE の軌道点と  $Q$  の間に最遠不変曲線が存在している。図 11 では、実線と最遠不変曲線の位置を示す黒丸が重なっているように見えるが、実線の上部に黒丸はある。  $a$  の値が 3 より大きい  $a = 3.1$  では、1/3-BE の軌道点と  $Q$  の間に最遠不変曲線が存在している。この事実は、図 11 では実線の下部に最遠不変曲線の位置を示す黒丸があることを意味している。図 12 (a) と 12 (b) を比較することで、1/3-BE の軌道点の移動によって最遠不変曲線の崩壊と再生が生じることが理解できる。最遠不変曲線は 1/3-BE の軌道点の近接しているために、1/3-BE の軌道点があるあたりで急に折れ曲がったように見える。

最遠不変曲線の位置が突然変わる様子が図 11 で観察される。飛びが生じる  $a$  の値は 2.843 から 2.844 の間にある。この現象について説明する。図 13(a) は  $a = 2.84$  における最遠不変曲線を示し、図 13 (b) は  $a = 2.85$  における最遠不変曲線を示している。これらの図において軌道点  $z_0, z_1, z_2$  が 1/3-BE の軌道点で、軌道点  $w_0, w_1, w_2$  が 1/3-BE の軌道点である。図 (a) では二つの不変曲線が描かれている。不動点  $Q$  より見てより遠くにある不変曲線が最遠不変曲線である。これは 1/3-BE の軌道点と 1/3-BE の軌道点を内部に含む。1/3-BE の軌道点  $z_0$  と最遠不変曲線の  $x_1$  は接近していない。しかし、最遠不変曲線が 1/3-BE の軌道点  $w_0, w_1, w_2$  に接近し、これらのあたりで最遠不変曲線が括れる。最遠不変曲線が崩壊する理由は、最遠不変曲線が 1/3-BE の軌道点に接近するためであると理解できる。最遠不変曲線が崩壊すると、図(b)で描いたように図(a)では最遠不変曲線のより内側にあった不変曲線が最遠不変曲線となる。この現象を  $x$  軸上で観測すると、最遠不変曲線の位置が急にジャンプしたように見えるのである。

## 7. 結語

本論文で得られた結果をまとめる。

- (1) 異常回転分岐の原因は、対称線  $S_g$  の不動点  $Q$  における曲率が正であることを証明した。
- (2) 異常回転パラメータ区間では正常回転分岐が生じないことを証明した。
- (3) 与えられた回転数の周期軌道が正常回転分岐を起こすのか、または異常回転分岐を起こすのかを決める判定アルゴリズムを与えた。

(4) 判定アルゴリズムを実行するプログラムも作成した。このプログラムを利用した数値計算で、異常回転パラメータの全区間と異常回転数の全区間を決定した。

(5) 異常回転分岐で生じたサドル軌道点の移動によって、最遠不変曲線の崩壊再生現象が生じることを数値計算結果をもとに明らかにした。

## 付録 A 判定アルゴリズムを実行するプログラム

判定アルゴリズム 5.1 と代替アルゴリズム 5.2 を MATHEMATICA® で記述したプログラムを紹介する。プログラム (Judgment 1) に回転回数  $p$  と周期  $q$  を入力しプログラムを実行する。傾きの計算途中で傾きが発散しない場合,  $\text{flag}=0$  で判定が行われる。“1st.” は対称線の像の  $x=1$  における傾きで, “Axis 1st.” は  $x=1$  における対称線の傾きである。

傾きが発散した場合,  $\text{flag}=1$  となる。例は, 回転数が  $7/24$  である。この場合は Judgment 2 を実行する必要がある。周期が偶数の場合, 例外的に  $\text{flag}=1$  となることがある。この場合, 初期条件として対称線  $S_h$  を利用する。初期値は  $\xi_0 = \eta_0 = \rho_0 = 0$ 。この場合,  $\rho_n > 0$  ならば正常回転分岐が生じ,  $\rho_n < 0$  ならば異常回転分岐が生じると判定する。

```
Clear["Global`*"]
(*Input rotation number.*)
p = 7; q = 24;
(*Definitions of function*)
a = N[4 Sin[Pi p/q]^2];
f[x_] := a (x - x^2);
df1[x_] = D[f[x], x]; df2[x_] = D[f[x], {x, 2}]; df3[x_] = D[f[x], {x, 3}];
(*Map parameters*)
s1 = df1[1]; s2 = df2[1]; s3 = df3[1];
(*Initial conditions*)
flag = 0;
If[Mod[q, 2] == 1, {n = (q - 1)/2, z1[0] = 0, z2[0] = 0, z3[0] = 0},
  {n = q/2, z1[0] = -s1/2, z2[0] = -s2/2, z3[0] = -s3/2}];
(*Maps*)
Do[If[z1[k] == Infinity, {flag = 1, Break[]}, {d = (1 + z1[k] + s1),
  If[d == 0, z1[k + 1] = Infinity, z1[k + 1] = (d - 1)/d},
  If[d == 0, z2[k + 1] = Infinity, z2[k + 1] = (z2[k] + s2)/d^3},
  If[d == 0, z3[k + 1] = Infinity,
  z3[k + 1] = (z3[k] + s3)/d^4 - 3 (z2[k] + s2)^2/d^5}], {k, 0, n - 1}];
(*Output*)
Print["Rotation number=", p/q];
If[flag == 0, {If[z3[n] < 0, Print["Anomalous RB occurs"],
  Print["Normal RB occurs"]]},
  Print["1st.=", N[z1[n]], " Axis 1st.=", N[-s1/2]],
```



```
Print["2nd.", N[z2[n]], " Axis 2nd.", N[-s2/2]],
Print["3rd.", N[z3[n]], " Axis 3rd.", N[-s3/2]],
Print[" flag=1. Try Judgement 2."];
```

処理結果.

Rotation number=7/24

flag=1. Try Judgement 2.

(\* Judgment 2 \*)

(\* Initial conditions \*)

```
z1[0] = 0; z2[0] = 0; z3[0] = 0;
```

(\* Maps \*)

```
Do[d = (1 + z1[k] + s1);
```

```
z1[k + 1] = (d - 1)/d; z2[k + 1] = (z2[k] + s2)/d^3;
```

```
z3[k + 1] = (z3[k] + s3)/d^4 - 3 (z2[k] + s2)^2/d^5, {k, 0, n - 1}];
```

(\*Output\*)

```
Print["3rd.", N[z3[n]]];
```

```
If[z3[n] < 0, Print["Anomalous RB occurs."], Print["Normal RB occurs."]];
```

処理結果.

3rd.=-24.1316

Anomalous RB occurs.

## 付録 B 式(43)の続き

ここでは回転数 258/889 から 19113/65858 までの判定結果を示す.

$$\begin{aligned}
 &258/889(\times) \rightarrow 433/1492(\times) \rightarrow 608/2095(\times) \rightarrow 783/2698(\times) \rightarrow \\
 &985/3301(\times) \rightarrow 1133/3904(\times) \rightarrow 1308/4507(\times) \rightarrow 1483/5110(\times) \rightarrow \\
 &1658/5713(\times) \rightarrow 1833/6316(o) \rightarrow 3491/12029(o) \rightarrow 5149/17742(\times) \rightarrow \\
 &8640/29771(\times) \rightarrow 12131/41800(\times) \rightarrow 15622/53829(\times) \rightarrow 19113/65858(o).
 \end{aligned}$$

## 付録 C 最遠不変曲線の位置の決定方法

写像関数は  $f(x) = a(x - x^2)$  とする. 初期点  $z_0$  を  $S_h$  上に置き, この点の未来の軌道点を追跡する. 追跡の最大回数は 100,000 回とする. この間に軌道点  $z_n$  が  $x < 0$  の領域に入ったとする. 軌道は  $Q$  を時計回りに回転して領域  $x < 0$  に入るためには, 軌道点  $z_n$  の  $y$  座標が負であることが必要である.  $y_n < 0$  で  $f(x_n) < 0$  ( $x_n < 0$ ) が成り立つから, 次の軌道点  $z_{n+1}$  の  $y$  座標 ( $y_n + f(x_n)$ ) も負である. 軌道点が一度  $x < 0$  の領域に入ったならば, その後の軌道点が  $x > 0$  の領域に戻ることはない. つまり, 初期点  $z_0$  は最遠不変曲線の外にある. プログラムでは flag=1 とする. 軌道点が有限領域に停まれば, flag=0 とする. flag=0 の場合, 軌道点を描いて  $Q$  を囲む不変曲線が得られるかどうかを確認する必要がある. MATHEMATICA の  $\text{P}$

プログラムを紹介する．プログラムでは， $x$ -座標の分割幅を0.05/500とした．よって， $x$ -座標に関する誤差は0.0001である．

```

a = 2.8; xmax = 0.75; xmin = 0.7; dd = 500; kmax=99999;
Do[x[0] = xmin + (xmax - xmin)/dd kk; y[0] = 0;
  flag[kk] = 0; pa[kk] = x[0];
  Do[y[k + 1] = y[k] + a (x[k] - x[k]^2); x[k + 1] = x[k] + y[k + 1];
    If[x[k + 1] < 0, {flag[kk] = 1, Break[]}], {k, 0, kmax}], {kk, 0, dd}];
plist = Table[{pa[k], flag[k]}, {k, 0, dd}]; Print[plist];
ListPlot[plist, PlotRange -> {{0.7, 0.75}, {-0.25, 1.25}},
  PlotStyle -> Black, Axes -> False, Frame -> True]

```

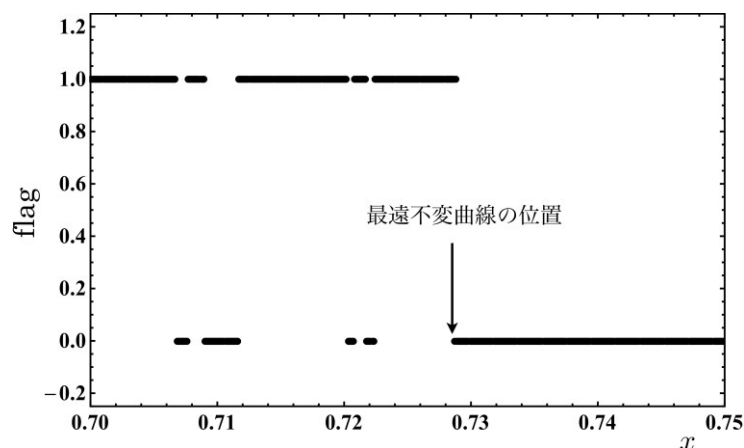


図 14 :  $a = 2.8$ . 調べた区間:  $0.7 \leq x \leq 0.75$ .

得られた結果を図 14 に示した． $a = 2.8$ における 最遠不変曲線の位置は $x_l = 0.7287$ である． $x < x_l$ の領域に， $\text{flag}=0$  を示す初期点があるが，これらはすべて楕円型周期軌道点の周りを回る軌道の初期点であり，最遠不変曲線の位置を表していない．

## 参考文献

- [1] 山口喜博, 谷川清隆, 馬蹄への道 (共立出版, 2016).
- [2] Hénon, M., Numerical Study of Quadratic Area-Preserving Mappings. Quarterly of Applied Mathematics (Brown University) 27 (1969), pp. 291-312.
- [3] Dullin, H. R., Meiss, J. D. and Sterling, D., Symbolic codes for rotational orbits. SIAM J. Appl. Dyn. Sys. 4 (2005), pp.515-562. <https://doi.org/10.1137/040612877>
- [4] Bogomolny, A., ホームページ “Cut The Knot”.  
<http://www.cut-the-knot.org/blue/Stern.shtml>
- [5] Hénon, M., Exploration numérique du problème restreint IV: Masses égales, orbits non périodique, Bulletin Astronomique3, tome 1, fasc. 2 (1966), pp.49-66.
- [6] Moser, J. K., Lectures on Hamiltonian Systems, Memoirs of the American Mathematical Society 81 (1968), 1-60. Hamiltonian Dynamical Systems: A preprint selection (Adam Hilger, Bristol and Philadelphia,1987). pp.77-136. (p.132 の Fig.11 が参考になる).

## 高橋 徹先生を偲んで

千場 良司

岩手県立中央病院 病理診断科

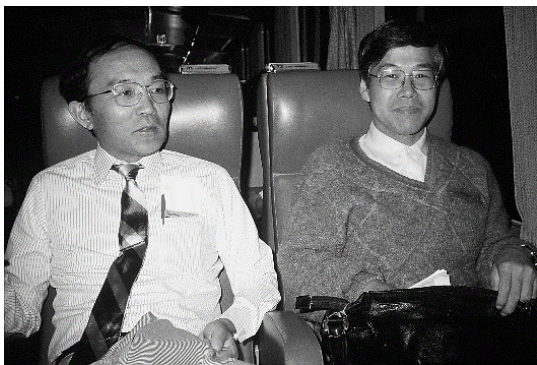
本学会会員で運営委員を務められた東北大学名誉教授 高橋 徹先生は、平成 31 年 1 月 23 日、肺炎のため 84 歳の生涯を閉じられました。先生に教えをいただいた一人としてここに謹んでご冥福をお祈りいたします。

先生は昭和 9 年東京に生まれ、岩手県立盛岡第一高等学校を経て昭和 33 年東北大学医学部をご卒業になりました。昭和 34 年東北大学医学部第一病理学教室に入門し、同年 8 月諏訪 紀夫教授のもとで助手となり病理学者としてのスタートを切られました。諏訪教授の器官病理学の構想を受け継がれ、肺および肝の組織標本から顕微鏡連続切片を作製し、その三次元再構成像に対して組織計測を行い、動脈と静脈の空間における配置の特性という観点からこれらの臓器構築の数理的原則を打ち立てられました。さらに気管支喘息、びまん性細気管支炎、小児心奇形に伴う肺高血圧症および慢性肝疾患の硬変化といったさまざまな疾患の病理発生を自ら確立した構築原理を用いてあるいはそこからの乖離という面から客観化することによって次々と明らかにされました。このほかにも、消化器に発生する腺癌の分化度を位相数学的な指標を用いて定量化する試みや外科手術によって切除された肝のハムスライサーを用いたホールマウント連続切片によって胆管細胞癌の臓器内分布を可視化する試みなど人体病理学の広範な領域に研究を展開されました。また、これらの研究の過程において計算機幾何学を用いた三次元再構成および組織計測ソフトウェアの開発など方法論の面でも先駆的な業績を挙げられました。これらの成果は日本病理学会をはじめ国内の関連医学学会で広く発表されましたが、先生が担任されていた東北大学抗酸菌病研究所(現加齢医学研究所)病理学研究部門に私が大学院生として入学した昭和 62 年秋にはフランスの Caen 大学で行われた国際ステレオロジー学会総会 Congress of International Society for Stereology (ISS)での特別講演という形に結実しました。

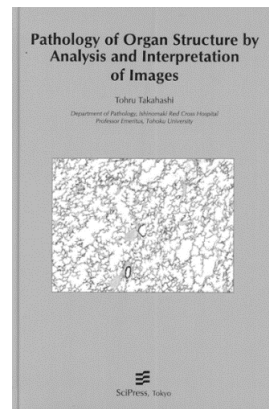


1990 年代になり、先生はそれまでの研究の流れに加え、病理学における病型分類の客観化というテーマに歩を進められました。これは諏訪教授が残された「肝硬変の組織分類は可能か、可能だとすればそれはどんな分類か」という課題に端を発するものでした。この

問題が最初に研究された 1960-70 年代においては肝硬変の形態をステレオロジーを用いて数量化し、複数のパラメータの組み合わせとして表現されましたが、個々のパラメータの統計学的検討では分類可能との根拠は得られないという結論でした。そこで 1980-90 年代になり自然および社会科学の諸分野で盛んに応用されるようになってきたクラスター分析や判別分析といった分類のための多変量解析を用いてパラメータの組み合わせの中に分類の可能性が得られないかという再検討を試みられました。幸い肯定的な結果が得られ、統計学的に最適化された肝硬変の組織分類とは人体病理学の著名な研究者によりそれまでに提唱されてきた主要な分類を包括するものであり、人の視察による判断の限界が示唆されました。この研究は私の博士論文のテーマでもあり、本学会のシンポジウムをもとに出版された「医学・生物学におけるフラクタル」(朝倉書店, 1992 年)にも収載させていただきました。ここで用いられた手法はさらに部門の共同研究者とともに癌とその前駆病変の自然分類の探求に応用され、人の膵管癌における多段階発癌の過程の解明や肺胞上皮由来の腺癌の新しい分類の提唱としてまとめ、現在も AFIP(Armed Forces Institute of Pathology)のモノグラフや呼吸器病理学の欧米の標準的な教科書に引用されています。



1987 年フランス Caen 大学で行われた ISS 総会からの帰路、パリに向かう列車内にて、統計数理研究所 種村正美先生と。



Pathology of Organ Structure by Analysis and Interpretation of Images, Scipress Inc,

平成 9 年、先生は東北大学をご退官され名誉教授の称号を受けられ、同年 6 月本学会論文賞を受賞されました。その後 20 年を超える永きにわたり、本年初頭体調を崩される直前まで宮城県石巻赤十字病院に病理医として勤務され、若い同僚の病理医や病院スタッフの方々と現役を貫かれました。平成 23 年にはご自身の研究の集大成として”Pathology of Organ Structure by Analysis and Interpretation of Images”というご著書を本学会ともゆかりの深い Scipress 社より上梓されました。この本を読み返しますと多少なりとも自分も関与したという感慨もありますが、40 年近い年月一貫して臓器や細胞の形態と疾患におけるその変化の意味を追求された先生の姿にはまさに心打たれるものがあります。そして、これだけ多くの教えを受けた先生と過ごした時間が実質 10 年に満たなかったことに改めて気付かされました。もう一つ先生のお仕事の力になれなかったかといささか悔やまれるところもあります。しかし、今はもう非力はお許してくださいというほかありません。先生、どうか安らかにお眠りください。

## FORMA 学術情報の新しい公開のしくみについて

高田 宗樹 (Forma 編集委員長)

松浦 執 (形の科学会事務局長)

世界中の学術情報は、ほとんど、海外の大手出版社のサーバーに吸収されており、公的図書館等は情報を収録することができず、大手出版社との中継をするだけになってしまいました。また、閲覧者には法外な課金がなされていることも事実で、大学図書館の運営に支障をきたす水準になっております。

この程、本誌編集幹事会及び本学会事務局は、当学会公式の学術雑誌 FORMA の出版を委託している有限会社テラ学術図書出版との間で度重なる折衝を重ねて、雑誌出版に係る費用等の見直しがなされましたのでご報告致します。変更点は図1の通りです。

A member (Japanese) of the Society is entitled to receive regular issues of FORMA in exchange for his or her membership fee. Subscriptions by non-members and institutions should be made directly to SCIPRESS, 804 Gyosai Estate, 5-27-5 Okusawa, Setagaya-ku, Tokyo 158-0083, Japan. The subscription price (not including Supplement issue) per volume (Vol. 20, 4 issues) is US\$150.00 for non-members and institutions and US\$80.00 for members (except Japanese members) of Society for Science on Form, Japan.

### Call for Papers to FORMA

#### INSTRUCTIONS FOR CONTRIBUTORS

9. For papers submitted after May 8, 2019 (GMT), the publication fee for each paper accepted for publication is 50,000 yen and the price for color figs. per page (online) is 25,000 yen.

図1. 投稿料の改定[1]

年会費を納められている会員各位におかれましては、購読料は無料なので、前半部分について改定された点はありません。後半部分につきましては、投稿された論文のうち掲載が決定されたものについて、印刷料 50,000 円が課金される旨の記載があります。ただし、令和元年度第1回運営委員会で、全ての学会会員が投稿した論文については、当学会が印刷料全てを助成して支払うことになっておりますので、実質的には、変更点はありません。以上の措置は、学会の運営に永年貢献されてきた押田恵司氏(第5回形の科学会功労賞受賞者)のご配慮によるところが大きく、当学会負担の出版費用も大幅に抑えられる期待ができるようになりました。当学会を代表しまして、この場を借りて、感謝の意を表したいと思います。

引き続きまして、会員各位の積極的な投稿と特集号の提案をお願いするとともに、もう一点、以下の特別な依頼事項があります。

FORMA

<http://www.scipress.org/journals/forma/index.html>

DVD: Full text (pdf files) Vol. 35, 2020 to Vol. 14, 1999; Abstract (pdf files) Vol. 13, 1998 to Vol.1, 1985

Domestic: 30,000 yen (税別、送料込)

Overseas: US\$300.00 (including seamail postage) Shipping schedule: year 2021

FORMA

Edited by Society for Science on Form, Japan <https://katachi-jp.com>

図 2 本誌バックナンバーが収録された DVD の配布(予定)

冒頭でもご紹介しました出版業界の動向を踏まえて、有限会社テラ学術図書出版は、本学会と有限会社テラ学術図書出版の取り決め(図 1)により、本誌のバックナンバーが収録された DVD を販売することになりました。同社より、丸善、日貿などの国内の取次、および外国の代理店に販売を委託されるそうです。図 2 のように案内されるということです。つきましては、会員各位の所属される機関、特に大学・研究所の図書館での購入促進の依頼をお願いします。注文は、同社(有限会社テラ学術図書出版;〒158-0083 東京都世田谷区奥沢 5-27-5-804; Tel: 03-3718-7500; Fax: 03-3718-4406)もしくは、取次へお願い致します。

この世界初となる試みは、「学術情報が広く free charge で世界中の研究者に共有されるようになれば、学問の発展に少しでも寄与できるのではないか」と考えて取り組んでこられた押田恵司氏の発案です。将来的には、継続的に DVD を購入いただける機関には、機関リポジトリで公開できる権利を譲渡されるようです。そのような形態が実現できれば、FORMA は、多数の国内機関リポジトリで open access になり、世界中の研究者が無料で情報を得ることができるようになります。また、永久的に我々の学術情報が保全されることとなります。もしかすると、革命的な試みになるかも知れません。重ねてご協力をお願い致します。

## 参考文献

[1] <http://www.scipress.org/journals/forma/call.html> (2019.11.6 参照)

## 第 87 回 形の科学シンポジウム 「生物と医学にまつわる形と物理法則」

### 討論記録 (討論記録のあるもののみ掲載)

【主催】形の科学会

【会期】2019年6月7日(金), 8日(土), 9日(日)

【会場】東京慈恵会医科大学 国領校 620 講義室

【代表世話人】植田 毅 〒182-8570 東京都調布市国領町 8-3-1

東京慈恵会医科大学 医学部物理学研究室

TEL : 03-3430-8686 内線 2211 E-mail : tsuyoshi\_ueta@jikei.ac.jp

【参加費】 会員・非会員ともに一般 5,000 円、学生 1,000 円

【懇親会】 2019年6月8日(土) 18:00より 学生食堂 BELLA (ベラ)

【懇親会費】 一般 3,500 円、学生 3,500 円

討論記録は質問者の討論記録シートの記載にもとづいており、講演者の校正がないものもあります。

Q: 質問、A: 回答、C: コメント

### 討論記録

6月7日(金)

#### 生物と医学にまつわる形と物理法則 (第1部)

風と家の立地と生活

岩瀬正幸(東京学芸大学大学院)、筆保弘徳(横浜国立大学)

Q. 植田毅

風の強さ、被害の大きさ等で家の形が決まるとのことだったが、瀬戸内では夏の夕方にはひどく蒸し暑い。そのため家の構造はできるだけ涼しくなるように工夫されている。逆のこともあるのではないかと。

このような話題は学校では地理でしか出てこないが、防災教育などに役立つとよい。

A.

防災教育の観点でも考えているから風と生活における家の形に着目して提案しているので、論文に投稿することを当初から考えている。

C. 高木隆司

防災の研究は重要であるが、それを進めるには何らかの際、スポーツ、あるいはコンテストと結びつけて人々の興味を呼ぶようにするとよいと思う。

A.

そのような発想もありますね。

Q. 八坂青志

私は今春 30 年ぶりに銚子の半島にいったが(銚子は風が強い) 30 年前にはなかった風力発電の風車ができていた。風や自然現象は悪影響だけではなく生活者にとってメリットもある。

科学技術の進歩により自然の力の利用方法も広がってきている。(太陽発電の様に)

今後の住居の形はこの様な事例も影響するのではないかと。

この様なことも研究の対象としてはいかがでしょうか？

A.

形の観点では、広がりを感じるので良い指摘だと感じます。

Q. 森河良太

風を力学(流体力学)的な圧力としてのみとらえるのではなく、風に乗ってくるものをいかに防ぐか、という視点についてお考えを教えてください。

A.

茅ヶ崎の防風林など、塩害に関する対策についても研究対象です。生活をいかに良くするかという観点でこの論文は進めているので重要です。これは、以前から考えていることです。

立体映像の脳内処理における協同性について

山本将太(福井大学大学院)、高田宗樹(同)、條野雄介(同)、高田真澄(中部学院大学)

Q. 植田毅

視野がせまいと脳が活性化することだが、手術のときに開腹するよりも内視鏡で視野が狭い方が活性化してよい結果

になるのか？

逆に脳が活発に働くためよけい疲れるのか？

A.

今後検証してみたい。

Q. 糸賀響

解像度が悪いぼやけた動画をみて酔うという現象は、目が悪い人がメガネをかけていない状況で起きる不快感と同様のメカニズムと考えて良いか？

A.

同じであると考えられる。

肝類洞の形態解析とその数理解析

昌子浩登(関西学院大学)、岩本凌(同)

Q. 植田毅

血液を運ぶエネルギーを最小化する場合に血液量に保つための体積に比例する項の体積をフラクタル性があるからということで  $r^{\gamma}$  に比例するとしているが、それはおかしい。分岐において、考えているのは、単にパイプとしての血管であり、フラクタル性はなく、フラクタル性は、もっと大きなサイズのネットワークから出てくるものではないか？

A.

たしかにそのとおりであるかもしれない。

肝小葉が肝臓の最小ユニットになっているため、1つのネットワークと考えてもいいのではないかと考えてもいる。

考えてみたい。

Q. 種村正美

講義中である計算に AIC を用いたとのことだったが、それは Akaike 情報基準のことか？

A.

その通り。類洞のフラクタル次元をもとめるために、AIC 最小のモデルを選んだ。

Q. 小川直久

血液を維持するエネルギーとは何のことか？

物理的意味は？

A.

よくわからないが、血管を形作る細胞である血管表皮細胞が血流によってうける圧やその圧に耐えるための構造を維持するコストなどを想定している。

Q. 本多久夫

Zones 1、2、3 でのフラクタル次元の違いの解釈をしたいのだけれど、肝実質細胞はいくつか多核であると聞いている。これとの関係はないだろうか。

A.

これから検討してみます。

#### 招待講演・公開講演

トポロジー最適化の基礎と最新展開

藤井雅留太(信州大学 学術研究院(工学系))

Q. 小川直久

電磁波の入射に対して、散乱光を生み出さないようにするには、逆位相の散乱光を放射すればよいと考えられるが、ここではそういう方法をとったわけではないようだ。物質の何をパラメータとして変化させたのか？

A.  
構造変化のみである。

Q. 森河良太

「試行錯誤なく、1度の最適化計算でOK」というところが、にわかには信じられないのですが。

A.  
困難な性質を含む最適化に頑強となるよう、アルゴリズムが設計されているからです。

Q1. 手嶋吉法

CMA-ESに基づくクロックのトポロジー最適化を光、熱、電流、音でやられているが、全て同じ電磁波の枠組みで計算するのか？

A1.  
いいえ、各物理でそれぞれ数値解析をしています。

Q2.

トポロジー最適化の基本事項説明で、穴の配置について説明されていたが、3Dの立体形状については外から見える穴(貫通穴)と外から見えない(孤立穴)の両方を想定しているか。

A2.  
計算の過程で、両方の穴が出てくる可能性があります。

Q. 高木隆司

Optical cloak についての説明において、左端から平面波が来たとき、物体を通過したあと右端で平面波になるとすると、定常に光をあてたときに、中央の物体が見えないことになる。ところで、光の強さが時間的に変化すると、物体を通過した時、光の伝播に時間の差があるので、右から見ると明暗の差が出る。

すると、この場合は中央の物体が見えると理解してよいか。

A.  
非定常な場合は想定していないので、そうかもしれないが、ここでの問題は右側で光量を継続して測った時に差がでないということである。

## 形の科学一般

生体由来ナノ繊維の固有ねじれとメカニクス

上谷幸治郎(大阪大学産業科学研究所)、宇都卓也(宮崎大学)、安藤大将(ウィスコンシン大学マディソン校)、鈴木望(名古屋大学大学院)

Q. 本多久夫

(1) ナノフィラメントの断面を六角形と仮定した時、六角形はひずんでいる(辺に長短がある)が、この非対称で、計算結果は変わらないだろうか。

(2) マクロな形のことだが、種のはいったサヤは2枚があわさっている。これは乾燥した時に2枚それぞれが逆にねじれてはじけタネをとばす。2枚とも同じセルロースでできていると思うが、2枚で逆ねじれになるのは何が効いているのだろうか。(答えは不要です)

A.

(1) 断面の形状によらず、正六角形でも正三角形でも星型でも、計算結果は大きく変わらず同様の傾向を示しています。

(2) 種子袋では、直交した繊維配向層が重なって収縮時の形態に曲率を付与しています。種子放散の現象は、ナノ繊維自身のねじれではなく集積構造によって発現すると思います。

Q. 松本崧生

セルロース分子鎖1方向に伸びきり、配列した独特の結晶構造を有している。その線群(linear group)は何ですか？

A.

<回答の記載なし>

計算機を用いた脂質二重膜ベシクルの形状解析

※賀響(東京薬科大学)

Q. 手嶋吉法

中距離斥力はnのどの範囲ですか。

中距離斥力では、興味深い形状や配置が観察されますか。

A.

均一に粒子が分散している場合について無限遠まで粒子間の斥力を積分したとき、その値が発散するかどうかで、長距離斥力と短距離斥力それぞれを定義しました。

線毛を使って移動する細菌の運動パターンと走化性  
森河良太(東京薬科大学)、玉腰雅忠(同)、宮川毅(同)、高須昌子(同)

Q. 手嶋吉法

線毛の脱着について「着」や「脱」をする判断を細菌はどの様におこなうのか。

A.

実験研究によると、そのメカニズムはまだ全く解明されておりません。

線毛(VI型線毛)はピリン(pilin)というタンパク質が重合してできる、(細菌の種類によって異なりますが)長さ10 $\mu$ m程度、直径7nm程度の繊維です。

その先端の構造についてもよく分かっておらず、細菌の「判断」を促すセンサーが力学的なものなのか、電気的なものなのか、それとも物質輸送によるものなのか、不明です。ただ今回のシミュレーションモデルでは、線毛にかかる張力の大きさから、「脱」を判断しています。「着」については、全くのランダムです。

形の科学一般

Chaplygin-gas と d 次元 相対論的膜の理論

小川直久(北海道科学大学)

Q. 手嶋吉法

「宇宙の膨張が加速し続けている」というのは、現代の宇宙論の定説なのですか。

A.

定説というよりも観測事実として、よく知られている。

Q. 本多久夫

圧力が密度のマイナスに反比例する。マイナスの圧力とはなにをイメージしているのでしょうか。

A.

イメージは難しい。宇宙項を0とした理論では、宇宙膨張が加速するという観測結果を得るためにはこのような場の導入が必要だった。さらに、このようなChaplygin-gasの導入によって、宇宙の初期膨張(暴型膨張)と、指数関数的膨張であるインフレーションを繋ぐ描像が描ける。

また、ダークマターとダークエネルギーの統一といった観点からもこのモデルが用いられている事がある。

6月8日(土)

形の科学一般

回折上昇の一部問題についての再検討

松本崧生(金沢大学・名誉教授)

Q. 根岸利一郎

タンパク質の構造解析に有用な手段としてのフリーデル則についてこの発表の回折対称の上昇はどんな意味をもつか。

A.

実在のタンパク質の解析においても、ここでの回折対称の上昇を考慮しない場合、大きな見落としの可能性はある。

有機化学分野での実例は、岩崎準先生が消滅則に関連して報告されていたように思います。

Q. 手嶋吉法

円環数珠の2色ぬり分けを調査されたが、3色以上を用いたぬり分けも結晶学上、意味があるか。逆に2色の場合は結晶の何をみていることになるか。

A.

2色、3色は、2種、3種の原子とされてもよいでしょう。もっとも、多次元解析が必要かもしれませんが、私はよく理解していません。愛知県立大学、亀井喜久男先生の、多元二進分類図と多元構造図の提案をご参照ください。



藤井聡太の将棋の解析

高津和紀(福井大学大学院)、高田宗樹(同)、平田隆幸(同)

Q. 鳴海孝之

他の棋士と同様の解析は行われていますか？

A.

現在解析中。

Q. 高木隆司

講演にあった「悪手」の定義はなにか？

一般的には、その手が負けにつながるということか？

特定の棋士にとってはそれが勝因になる場合もあるのか？

A.

一般には、AI に判断させて悪手かどうかを決める。実際の勝負とくいちがう場合もある。

Q. 手嶋吉法

(※時間切れで、会場で質問できなかった質問です)

「藤井は考慮時間が非常に短くてもいい手を指す(悪手が少ない、技巧ソフトとの一致率が高い)」という結論だったが、その様な時は、他のプロ棋士でもほぼ同じ結果になると思うのだが、他の棋士のデータは検討したか？

A.

<回答の記載なし>

Q. 植田毅

イロレーティングのグラフで藤井聡太氏と灰色の線の方は急にイロレーティングが大きくなっていく部分がある。

その前後で何がおこっているのか？

将棋のうち方にどのような変化があったのか？

変化の部分に注目すると優秀な棋士をそだてられるのではないのか？

A.

これまで注目したことがないが、興味深いと考えられるので今後検討してみたい。

## 生物と医学にまつわる形と物理法則(第2部)

ミツバチの営巣初期過程に見られる自己組織化

鳴海孝之(山口大学)、上道賢太(関西学院大学)、本多久夫(神戸大学、理研)、大崎浩一(関西学院大学)

Q. 手嶋吉法

六角格子(Hexagonal lattice)の構造は、球(パチンコ玉など)の集合状態や円柱(鉛筆やストロー)を束ねた時にも現れ、生物か非生物に無関係な、全体的な引力と近距離斥力(排除体積効果)があれば出現する普遍的な構造という理解です。ご講演の内容も基本的にはこの理解の上に立って、ミツバチおよびミツロウによる巣の形態形成を詳細に解明したという理解で良いか？

A.

仰る通り六角形構造は広くみられる形状だが、ミツバチのように能力に限界がある生物が共同して作る際のメカニズムは決して自明ではない。

全体的な引力と近距離斥力という理解を念頭に置きながら、ミツロウの付着と掘削を考えて説明しようとしているのが我々の研究。

Q. 平田隆幸

ミツロウをしきつめた状態を初期値とするのは、ムダがあり、不自然ではないでしょうか？

A.

初期値はミツロウの小さな塊が置いてある状況で敷き詰めてはいない。また、仮にミツロウが敷き詰められていても、ミツロウを再利用するのでそれほどムダになっていない。

Q1. 植田毅

ミツバチを考えているが、スズメバチは口でセルロースのダンゴを作り、それを六角形の壁につみ上げていくことにより、同様のハチの巣構造を作るが、ミツバチとスズメバチは基本的に異なるコンセプトで巣を作っているのか？

A1.

スズメバチは、初期は女王バチのみで巣をつくる。一方、ミツバチは初期から多数の働きバチが関与するので作り方は異なる。

我々の研究がミツバチ以外にも適用できるかどうかは今後の研究課題。

Q2.

このモデルで3本ペダルのような形が出現しているが、それは消しゴム形エージェントの頭の形で決まるのではないのか？そのモデルはだとうなのか？

A2.

3本ペダル型形状はミツロウにエージェントが集まることで生成されるので頭の形には依存しない。また、消しゴム型エージェントの頭の形はミツバチの掘削能力に基づいたものになっており、妥当と考えている。

Q3.

3次元の構造もミツバチはけずり出して作っているのか？

A3.

3次元の形状についても同様なモデルで説明したいと考えている。その際はミツロウの拡散についても考える必要があるだろう。

## 招待講演・公開講座(生物と医学にまつわる形と物理法則・第3部)

脊椎動物の形態進化～上陸に伴う内蔵の進化～

岡部正隆(東京慈恵会医科大学 解剖学講座)

Q. 高木隆司

肺魚などの魚はなぜ、エラと肺の両方を利用しているのか。

A.

水中の酸素だけでは足りないため、空気からも酸素を取り込んでいる。

Q. 松本崧生

5億・6億年前の生物三葉虫、Ortheccas(オウム貝の祖先)らの肺・浮き袋は？どうなっていたでしょう。

A.

現存の節足動物と軟体動物には肺・浮き袋は存在しない。化石種においても報告はないと思う。

Q1. 植田毅

ライギョは肺魚のように乾燥するとまゆを作って身を守り生きのび、水の外で空気呼吸をするが、そのときに使っているのは浮き袋ですか？

海水魚の中には浮き袋のない魚類がいるが、それらはどうなっているのか？

A1.

ライギョには肺は存在しないが、浮き袋を呼吸に使う魚や、鰓の背側に空気を貯めて呼吸をする魚、ドジョウのように消化管を用いて空気呼吸をするものもいるので、それぞれ工夫しているのだと思う。浮き袋のない魚は海底に沈んで生活しているか、サメのように胸びれを飛行機の翼のよつに使い揚力を生じさせて浮力を作るものもいる。また空気の代わりに肝臓に脂を貯めて浮力を作る魚もいる。

Q2.

肺は消化器の腹側、浮き袋は消化管の背側に位置するとお聞きしました。両方持つ動物はいないのか。

A2.

肺と浮き袋の両方を持つ動物はいない。

Q3.

トリの肺は、気管支が分岐したあとに、これが気嚢に繋がっている。気嚢は分岐体でなく網目構造である。分岐体と網目構造は遺伝子で区別できるのだろうか。

A3.

遺伝子レベルでの差別化はわからない。トリの場合、はじめから気嚢を含めて気管支や肺を形成し、肺循環にかかる血管系と絡み合ったところが肺になるのかもしれない。

## 形の科学一般

二重可逆面積保存写像における二重対称周期軌道：代数構造

山口喜博(元帝京平成大学)

Q. 石原正三

二重可逆面積保存写像と二重対称周期軌道の関係は面積保存と何か関係があるのでしょうか。

A.  
可逆性は面積保存写像でのみ成り立つ性質です。二重対称周期軌道は二重可逆面積保存写像で存在する特殊な周期軌道です。

Heesch 数が正となる凸五角形  
杉本晃久 (科学芸術学際研究所)

放散虫トランプの遊び方・学び方  
松岡篤 (新潟大学)

Q. 野村詩織  
子孫-祖先関係の放散虫はどれくらいいるのか？  
(数が多ければ大富豪や UNO ができる?)

A.  
先祖-子孫関係と判断される種の系列はいくつもあります。同じ祖先から派生したとみなされる種群もたくさんあります。種間の関係性を適切に記述するためには、新種を記載するところから始める必要があります。未記載種がまだまだ多いのが実態です。

Q1. 石原正三  
ジョーカーはないのですか。

A1.  
ジョーカーも含まれています。ジョーカーとして選んだ放散虫は、形が特徴的で、かつ、これまでに1個体しか見つかっていない種です。

Q2.  
数字や4種類の形状に加え、さらに分類を入れると私にはごちゃごちゃした印象を受けますが学生さんたちの反応はどうでしたか。

A2.  
分類上の目や科の区分などを加えることにより、学生たちは、トランプを使ったユニークな学び方・遊び方として楽しんでいました。

Q. 高田宗樹  
前回、ジュラ-白亜紀の境界を決めるチバニアンのお話をされていたが、日本固有の地層から取られた放散虫をトランプに使用するのはどうだろうか？

A.  
今回のトランプは、マリアナ海溝から得られた1個の岩石から産出した放散虫を絵柄として用いました。日本の地層から新種記載された放散虫だけを用いて、トランプを作成することも可能です。今後、検討したいと思います。

改定常用漢字から考える字形 一言語力の涵養  
本田容子 (盛岡大学)、沓名健一郎 (福井大学大学院、タクシン大学)

Q. 植田毅  
漢字の形の変化についてお話があったが、形が変わったときには、書き順はどのようになったのか？昔は書き順というものはないかということであれば、小学校で児童を残してまで書き順を覚えさせるのはいかがなものか？清の時代に科挙のために康熙字典で字形を統一させたとのことであるが、広い国土に対してどのようにそれを広めたのか？

A.  
学校教育において漢字の書き順は日本では戦後に記されたが、それ以前に統一基準はなかったと考えられる。(小学校で学ぶ)書き順は整った字が書ける視点から作られていて重要な学習内容である。康熙字典は清の康熙帝により30人の編者が招集して作られ、印刷した字典として全国に配布されたと言われている。

Q1. 松本崧生  
書き順は(戦時中)ありましたか？

A1.  
書き順という考え方は文字が生まれた時代からあったと考えられます。中国においては文字の研究が非常に盛んに行われ日本へはその研究の成果と共に書き順が輸入されました。江

戸時代には公的な文字は行書(および草書)に統一され、書き順はおよその統一意識があったようです。しかし、明治時代に楷書中心の文化になったことによって教科書ごとに書き順が異なるなど混乱が生じたため、国による基準を作ったのは、ようやく1958年『筆順指導の手引き』によることとなりました。但し、ここにおいても筆順は学習指導上で混乱を来さない配慮から定めたと書かれ、また従来にあった筆順を誤りとしないと書かれており、示されたもの以外の許容が認められていることになったのです。

Q2.  
私の名、菘生(タケオ)は、日本では珍しいが、中国で寺とかいたる所に出現する。  
一つ一つ簡単に読んでくれましたが、私の兄妹らの名を読めますでしょうか。姉洋(オオミ)、兄徂夫(ユキオ)、妹府(フグラ)。

A2.  
どれも難読です。まず、国語と人名では漢字についての見解は大きく異なります。国語は文化的な統一性のため、漢字の骨組みとしての「字体」について規定しますが、点の傾きや線の離着などデザインに関する「字形」についての規定はなく、字形の許容はとてども広がっています。ところが、人名については名づけた人の意図する文字のデザイン=字形に対して厳格でなければなりません。点の形が斜めなのか、縦線と接するの、それは非常に重要な問題です。また文化的な背景から旧漢字や異体字などが多く残されており、それらを含めてデザインを許容しますと、戸籍の電子データ化に際して労力やコストが膨大になるため、大きな問題になりました。そこで法務省では2004年4月に電子データとして統一化されるべく法整備を行い56,044字にまとめられました。但し、これは2004年4月以前につけられた名前に使用するもので、現在では戸籍法施行規則第60条により、漢字2,930字と平仮名、片仮名のみとされています。戸籍では漢字のみが記され、読みの平仮名は表記されません。それゆえ漢字の字体・字形に関しては法的に規定がありますが、読み方ではなく、出生届でも通常は窓口で確認されるのみで、審査が行われるものではありません。法務省では読み方について法的な基準を開示しています。例えば「菘」に「たけ」の読みは無く、シュウ、シュ、コウ、ク、スウだけとなっています。それゆえ、「たけお」と読める方がいらっしやるとすれば、非常に稀だと思います。他も同様です。

高速音読の学習効果と言語力  
沓名健一郎(福井大学大学院、タクシン大学)、Kunaj Somchanakit(タクシン大学)、本田容子(盛岡大学)、高田宗樹(福井大学)

Q. 石原正三  
先日、大学教育の研究会で新井紀子氏の講演を聞いたが、その講演で「AIは意味を理解できない」をキーセンテンスとして、現在の小・中学生は教科書を理解できない割合が70-80%になり、大きな問題であるとの指摘していました。高速音読は意味の理解にどのような影響をもつとお考えになりますか。

A.  
外国人に対する今回の高速音読の取り組みは言語能力に関する基本・基礎に関する取り組みで、意味の理解とは直接結びつかないと思う。但し、この学習とその応用を繰り返すことにより内容の理解、いわゆる読解力が高まることが期待できる。

Q. 松本崧生  
タイ人に対する教育でのお話だと少し変わるかもしれませんが、高速音読が思考力・批判力・表現力を表すのか？判断力などじっくり考察することはどうでしょうか？

A.  
日本語教育において音読は、(1)気づきを促す、(2)内容理解、(3)教師によるチェック、(4)クラス運営上のテクニック、(5)体感・体得させる、(6)学習者に達成感や自信を持たせるために音読させる、といった目的が認められる。また速読は、学習

時間の長さ、語彙の蓄積、類推力、慣れが無意識のうち可能にするものとし、内容を読み取る訓練として位置づけられている。

高速音読は、日本語ではオリジナルな学習法である。通常は音読になってしまいがちな読む行為を、会話の基礎として用いることができるし、音読と速読の学習も兼ねる。但し高速音読のみで思考力・判断力・表現力が身につくとは考えていない。指導法が重要。例えば、暗唱の手法、即ち要約文を提示して、テキストの内容を言わせる手法も取り入れている。読みを深め議論し、要約文の作成・要約文からの翻訳を通して、情報理解、情報選択、構成・表現力、といった思考力・判断力・表現力を磨く学習になる。現在は手法についての研究を行っているが、今後は判断力等、個別に研究を行ないたい。

C. 高木隆司

ご講義内容は納得しました。ところで例として挙げた「令」は今年の元号に含まれ、その意味は「美しい」とされている。しかし、「令」はむしろ「冷たい」という意味ではないか。令を含む漢字として「冷」「圜」（刑務所）などがあり、また「令嬢」も冷たいかんじがする。たしか「令和」という年号は「冷静な気持ちで和する」を意味し、今後の日本に要求される態度である。

Boerdijk-Coxeter helix の転がり実験に関する再検討

西田匠太郎（千葉工業大学大学院）、伊藤圭太（同）、池上祐司（理化学研究所）、藤本武（同）、山澤建二（同）、手嶋吉法（千葉工業大学）

Q. 高木隆司

BC-helix の中心軸が正確に直線であることをどのように確認したのか。

A.

標本（BC-helix 試験体）に対する形状評価は、今後の課題となっている。

Q. 石原正三

連結数の他に材質や質量に依存しないのか。

A.

材質が変わると、標本の剛性が変わるので、床との接点数が変わると考えられる。本研究では、2種類の材質（ポリドロンによる簡易試験体とアクリル製の試験体）で実験をおこなった。簡易試験体の方がよく撓る。

Q1. 松本崧生

正四面体の面で結合すると、厚みで正四面体結合とにならない。それをうすく加工して特別の面を作られているのか。そのつくり方ご教示下さい。

A1.

正四面体を作り、接着剤で面を結合している。接着剤の厚みはほぼ無いと考えているが、形状に関する評価は今後の課題となっている。

Q2.

水戸の四面体塔はどうなっていますか？

A2.

水戸のアートタワーも正四面体の面連結構造であり、本研究と同じ形である。

C. 松本崧生

すばらしい実験・考察です。

Q. 海野啓明

40 連結を軸方向に見たとき包絡線が三重の同心円状になることについて、それぞれの変形はどんな関係にあるのか。

A.

「それぞれの変形」の意味が理解できておらず、回答保留とさせていただきます。

Q1. 植田毅

以前、回転軸まわりの質量のバランスがどうなのかを質問したことがあるがいかがか。

斜面を転がす実験について力学的に理論解析はどうなっているか？

ころがりりは止まっているので、位置エネルギーがまさつ・こ

ろがりり抵抗のする仕事でころがりり距離が決まるので、接しよく点数依存性がわかると思うがどうか？

A1.

力学的な理論解析は未検討である。

Q2.

円柱ではまさつ・ころがりり抵抗が抗力、つまり質量によるとすればそうなる。したがって今の場合、ころがりり・まさつ抵抗が接点数に依存するのではないか？

A2.

転がり摩擦によるエネルギー損失は接点数に依存する。円柱では、床面と線接触しており、転がっている間、中心軸は平行に移動する。本実験では、点接触による転がり、床との接点は常に変化しており、試験体の中心軸は平行に移動しているとは言えず、常にブレていると言える。その意味で、床面との接触状況が円柱とはだいぶ異なる。

なお、円柱の長さを変えての転がり実験をおこなったところ、転がった距離は円柱の長さ（質量）に依存せず、ほぼ一定であった。円柱の長さが2倍（質量も2倍）になると位置エネルギーが2倍になるが、接地面の面積も2倍になり、転がり摩擦によるエネルギー損失も2倍になるので、転がる距離がほぼ一定になったものと考えられる。

本研究の試験体の転がり、点接触ではあるが、ある程度以上の連結数では転がる距離がほぼ一定となるのは、円柱と同様の理由と考えている（転がり摩擦によるエネルギー損失は接点数に依存する）。

6月9日（日）

形の科学一般

錯視により物の量の判断を考え直す 3 年生理科「物と重さ」の授業

後藤勝洋（渋谷区立西原小学校、東京学芸大学大学院）、松浦執（東京学芸大学）

Q. 高木隆司

錯視の考えを取り入れながら教育法を考えておられる。ということは、現在の教科書や指導書では錯視にまったく触れていないということか。

A.

その通りである。

Q. 植田毅

バウムクーヘンの画像の問題は大きさについてどちらがおおきいかを問うている。大きさと質量（重さ）の概念で大きさを比較するのに安易に重さで比較することをよしとするのは好ましくない。材料が同じものであることを認識させる様に指導をお願いしたい。

A.

そのように考えたい。

C. 本多久夫

脳の機能形成は各人のそれまでの経験によりつくられるものであるから各人がそれぞれ異なって当然である。この違いにより錯視も起こると考えれば、錯視はあつてあたりまえである。これを踏まえれば錯視を教育にどのようにとり入れればいいのかのだろうか。

池上式 3D ジグソーパズルにおいて可能なほぞ形状の範囲

町屋佑季（千葉工業大学大学院）、池上祐司（理化学研究所）、山澤建二（同）、手嶋吉法（千葉工業大学）

Q. 松本崧生

ほぞ形状の範囲はまだ続きそうで楽しみです。

少しはなれた質問。最も簡単な  $2 \times 2 \times 2 = 8$  のピースは何種類できていますか？ さらに  $3 \times 3 \times 3 = 27$  の場合は？

A.

ピースの形状の分類は、85 回シンポ（東北大）にて報告した。 $2 \times 2 \times 2 = 8$  のピースは、鏡像異性体（キラル）を区別すれば 4 種類、区別しなければ 2 種類に分類される。 $3 \times 3 \times 3 = 27$  個は、7 種類に分類され、鏡像異性体（キラル）のペアは、生じない。

Q1. 植田毅

このお話ではほぞの頭については考えていないが、頭の形状が大きく影響するのではないかな？

A1.

その通りで今後の課題である。

Q2.

今回作ったパズルのほぞの頭はどのように決定したのか。きれいで、難しそうに見せるのはほぞのデザイン性が重要だと考える。

A.

立方体表面に生じる曲線が二次元ジグソーパズルと似た形状となるように形状データを作成した。

インディア環礁の地理情報変遷史

杉本剛 (神奈川大学)

Q. 植田毅

2つ似た環礁があるとのことだが、両方とも同じ海ぼうの上にあるのか？

A.

2つは百 km 以上離れており、別の海底火山の頂である。

Q. 根岸利一郎

Judia と India の名はどのような原因で変化したのか？

A.

ポルトガル人がつけた名 Judia (ユダヤ女) を、事情を知らない地中海奥地の地図師たちが India (インド洋の) と読み誤ったのが始まり。19 世紀に、事情を全く知らないイギリス海軍が調査して、名前の付け替えを行った。背景には 17-18 世紀に起こった、欧州での文字の分裂「I→母音の I と子音の J および V→母音の U と子音の V」が混乱に輪をかけた。

招待講演・公開講座 (生物と医学にまつわる形と物理法則・第 4 部)

臨床情報、血行力学的情報、形態学的情報を用いた機械学習による脳動脈瘤破裂予測

鈴木正昭 (東京理科大学 理工学部経営工学科)

Q. 高木隆司

AI を用いる医療は、原理的には AI なしでもできる。しかし、人間だけだと時間がかかりすぎる、ミスをする、悪い人間関係で挫けつする、などの理由で実現しにくい。したがって、AI を導入すると考えてよいか。

A.

そう考えて良い。<確認してもらおうと有りがたい> AI の導入により、高速かつ高精度な診断を可能にし、質の高い医療を地域格差なく提供することが目的である。

Q. 鳴海孝之

破裂 or 未破裂の 2 値分類ではなく、破裂確率を予測することは可能か？ 例えば分類線からの距離とかで可能か？

A.

可能である。与えられたデータに対して各クラス (分類先) に属する確率を出力する機械学習アルゴリズムがある。

Q1. 植田毅

力学的には血管の半径の 1.5 倍の半径の瘤の場合、血圧が 200 mgHg になると破裂するが、そのような予測はできないか？

A1.

現状では剛体血管モデルであるので無理である。そのような予測のためには血液や血管壁の物性値や境界条件の精緻化が必要と考えられるが、それらは人によって異なる等、正確な値・条件を与えることは難しい。良い予測モデルを効率的に得るために、流体解析を精緻化するのか、それ以外の情報を組み合わせて用いるのかなど、総合的な視点で検討している。

Q2.

医者は瘤の見た目と、さらに、はりとかふくらみ具合で破裂の危険を感じると思うが、画像からそのような判断はできるか？

A2.

そのような物性をパラメータとして取り込んでいきたい。一

定の判断が可能と考えており、画像ベースの機械学習アプローチも検討中である。

形の科学一般

4 次元正多胞体のリンゴの皮むき展開図について IV

海野啓明 (仙台高等専門学校・名誉教授)

Q. 手嶋吉法

4 次元正多胞体の皮むきは 3 次元正多面体の皮むきと比べて、むき方の種類が多くなるか。

A.

左回りと右回りがあるが、むき方の種類はほぼ一通りである。

手まりの地割りの球面幾何学

吉野隆 (東洋大学)

C1. 本多久夫

手まりで使われる曲線が地球上の大円に限られるのは球面に糸を張るときに力学的に安定なパターンに限るという条件があるからだと思う。

C2.

以前、種村正美先生 (統数研) が球面を任意の個数の多角形 (面積は均一) で分割するシミュレーションをやっておられたが、あのパターンは手まりの新しいデザインになるのではないだろうか。

Q1. 手嶋吉法

手まり業界の地割りが大円のみを使う理由は何か。

A1.

不明である。上記のコメントにもあるように大円と異なり小円は摂動に対して不安定という側面はあると思う。

Q2.

大円を使わない地割りや正多面体的な対称性とは異なる地割りをすれば、新たな地割りを提案したことになると考えて良いか。

A2.

どのように地割りを定義するのかによると思う。少なくともいずれかを導入しない限り新しい地割りパターンはない。また、「基本寸法」という考え方も重要だと考えている。

視線データを用いた映像酔いの新たな評価指標の検討

藤掛和広 (名古屋大学)、橋梅佑宜 (福井大学)、高田宗樹 (同)

Q1. 植田毅

酔いを自覚した群は、pre/post 共に視線データの総軌跡長の値が高い。視線データの総軌跡長は「酔いやすいタイプ」の判定に使えるのではないかな？

A1.

使えるのではないかと考えている。さらにデータを検討したい。

Q2.

酔いは視覚情報と身体が感じる情報とのギャップによるが実験中の身体の動き、体調などの影響はどうか？

A2.

実験の前後で重心動揺の測定をしているので、今後、その結果も含めて検討していきたい。

立体概念の形成を支援する科学折り紙教材 III: 折り紙モデルとアクティブラーニング

石原正三 (埼玉県立大学)

知と形

Shape analysis for the ancient mounded tomb group in Tagawa

小川進 (空間技術研究所)、谷口幸弥 (東京大学)

形の科学

アート・デザイン系学生のための形の科学

高木隆司 (東京農工大学・名誉教授)

Q. 小川進

なぜ黄金比が美しいと感じるのですか？

A.  
一般には、ピタゴラスに対する尊敬の念から、彼が愛した正5角形において対角線と1辺の比が黄金比になっていることが原因とされています。

Q. 手嶋吉法

人体やアート作品の中に黄金比(1:1.62)に近い比を探すことは有意義か。質問者は黄金比には数理的な面では美しさがあると感じるが、黄金比を人体やアート作品に見出しても美しいとは必ずしも思えない。美しいと感じる否かは人によりけりと思う。

A.  
確かに、美的感覚は人によって違う。ただし、アート作品に黄金比がみられることは、その作者が黄金比を愛したことを意味すると思います。

主体を仮想することについて

松浦執(東京学芸大学)、面川怜花(東京学芸大学附属世田谷小学校)

Q. 植田毅

ロボットをあまり人間に似せすぎるときもち悪い。

A.  
人型(ヒューマノイド)ロボットでは、人間の姿に近づくとともに急速に不気味に感じる、不気味の谷というもの知られています(森政弘)。その谷を超えると好感度が急速に高まるだろうとも言われます。ヒューマノイド研究者の石黒浩氏は非常に人間に近く、美しい姿のヒューマノイド開発で知られており、言葉使いにも十分に配慮することで、かなり好感もてるロボットを開発しています。人間の存在感とはどういふものか、存在感がテクノロジーによって伝達できるのかに挑戦しているといえるでしょう。

Q. 小川進

なぜ、ロボットが笑いをもたらすのか?

A.  
人間の笑いは、緊張とその急激な緩和によって引き起こされるとされています。何かを認識しようと緊張して、急に受容できる状況になったときだと思えます。ロボットを使っていて面白く感じるのは、特に笑いを誘うつもりはやりとりではなく、「まじめに」喋りはじめたのに、子供たちに大笑いされることです。何を喋り出すかと緊張して耳を傾けたら、その時の話題に合った話でも笑うし、突拍子もないことでも笑います。暗黙の予測があって、それに対して何らか意外性のあるロボットの表出があるのだと思えます。どういう意外性なのか、掘り下げてみたいです。ロボットのかわいさと、話しの内容との違和感があるということも考えられます。えらそうに頑張ったこと言ってるという感じもあると思えます。本研究のケースでは、ロボットに対してペットを見るような人と機械との関係性があると思えます。