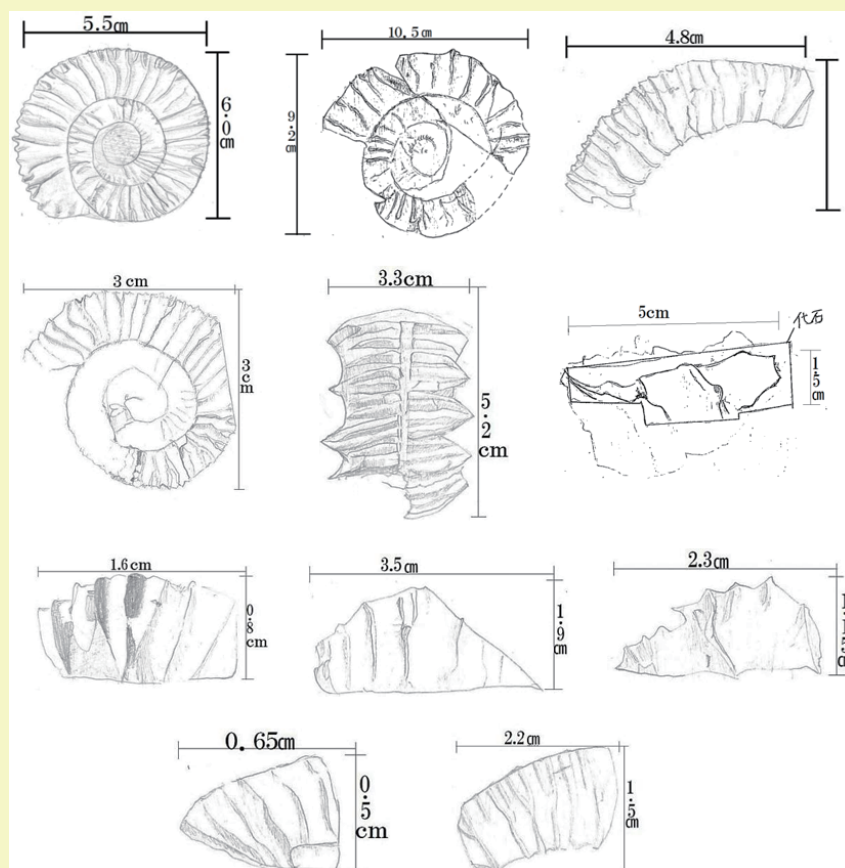




形の科学会誌

第 33 卷 第 1 号 2018

Journal of the Society for Science on Form



形の科学会

<http://katachi-jp.com/>

目 次

【論文】

面積保存二次元写像における横断性と主軸性

山口 喜博 1

【交流】

色々な情報から予想するジュラ紀アンモナイト *Pseudoneuquenicer* *yokoyamai*
の全体像

白井 総真 25

【シンポジウム】

第84回 形の科学シンポジウム 「ビッグデータとかたち」

討論記録 32

【会告など】

会告 38

原稿募集 45

面積保存二次元写像における横断性と主軸性

山口喜博

帝京平成大学 〒290-0193 千葉県市原市うるいど南 4-1

(連絡先: 〒290-0073 千葉県市原市国分寺台中央 2-4-14)

chaosfractal@iCloud.com

Transversality and the dominant axis property in the area
preserving two-dimensional map

Yoshihiro Yamaguchi

Teikyo Heisei University

(2018 年 3 月 12 日 受付, 2018 年 6 月 10 日 受理)

Abstract: The transversality is an effective concept to characterize the intersection of the stable and unstable manifolds in the dynamical system. The existence of the transverse intersection implies a chaotic motion in the system. On the other hand, the dominant axis property was introduced to judge whether the invariant curve constructed by quasi-periodic orbits exists or not. In order to discuss the relation of these concepts, a new two-dimensional C^1 map T is introduced. The situation of the non-transverse intersection appears in T . The map T_H including in a Hénon family is also used. Comparing the properties of T and T_H , new knowledge is obtained. First, we give a method to determine the critical value at which the situation of non-transverse intersection appears. Using this method, the critical values for T are calculated. Next, the hyperbolic region constructed by the stable and unstable manifolds of the saddle fixed point is defined. Using the properties of hyperbolic region, the stability of the symmetric periodic orbits in the vicinity of the primary homoclinic point is determined. Finally, the relation of the transversality and the dominant axis property is discussed.

Keywords: Two-dimensional map, Primary homoclinic point, Transversality, Hyperbolic region, Dominant axis property

1. はじめに

本論文で議論する横断性と主軸性は力学系における基本概念である．これらは系に存在する軌道に大きな影響を与える．安定多様体と不安定多様体の横断性はカオスの存在と直接関係している．一方の主軸性は準周期運動が存在する不変曲線の崩壊を理解するために導入された概念である．横断性と主軸性は導入経緯が異なるため，これらは独立に議論されてきた．安定多様体と不安定多様体の交差点であるホモクリニック交差点の近傍に存在する周期軌道の性質を理解しようとする主軸性の概念がどうしても必要となる．また主軸性の原因を調べるためには横断性が必要となる．つまり二つの概念は独立ではなく，何かしらの関係があると思われる．これより面積保存二次元写像を導入し，写像の基本的性質を紹介する．写像の性質をもとに横断性と主軸性について詳しく説明し，本論文の目的を紹介する．

本論文では二つの写像 T と T_H を利用する．最初に写像 T を紹介する．

$$T : y_{n+1} = y_n + f(x_n), x_{n+1} = x_n + y_{n+1}. \quad (1)$$

写像関数 $f(x)$ の定義を与える．

$$f(x) = \begin{cases} a(x - x^2), & x \leq 1, \\ -a(x - 1), & x \geq 1. \end{cases} \quad (2)$$

ここで， a はパラメータで $a \geq 0$ ． $x = 1$ で， $f(x)$ は連続でかつ一階微分も連続である． C^1 級関数 $f(x)$ を利用する写像 T が，本論文で初めて導入した写像である．

写像関数 $f(x)$ を

$$f(x) = f_H(x) = a(x - x^2) \quad (a \geq 0) \quad (3)$$

に置き換えた写像を T_H とする．

$$T_H : y_{n+1} = y_n + f_H(x_n), x_{n+1} = x_n + y_{n+1}. \quad (4)$$

写像 T_H は解析的写像でエノン写像族に含まれる[1]．

先に進む前に周期軌道の安定性について説明しておく．線形解析を行った結果得られた固有値を $\lambda_{\pm}$ とする．これらが複素数の場合，周期軌道は楕円型周期軌道と呼ばれ安定である．本論文では $\lambda_{\pm} = 1, -1$ の場合も楕円型に含める．固有値が $0 < \lambda_- < 1 < \lambda_+$ を満たす場合，周期軌道はサドル型周期軌道と呼ばれ不安定である．また，固有値が $\lambda_- < -1 < \lambda_+ < 0$ を満たす場合，周期軌道は反転を伴うサドル型周期軌道と呼ばれ不安定である．以下では，楕円型，サドル型，反転を伴うサドル型と書く．パラメータの変化で周期軌道の型が変化する現象を分岐現象という．

$a > 0$ において不動点 $P = (0,0)$ はサドル型で不安定である．次に不動点 $Q = (1,0)$ について説明する． Q は， $0 < a < 4$ では楕円型で安定である． $a = 4$ で周期倍分岐を起こし， $a > 4$ で反転を伴うサドル型不動点となる．これらの性質は二つの写像で成り立つ．写像 T では， $a = 5.682068$ でスメールの馬蹄が生じる．写像 T における馬蹄の存在に関する議論は付録 A

にある．写像 T_H でスメールの馬蹄が生じる臨界値は $a = 5.176605$ である[1,2]．スメールの馬蹄が生じる臨界値におけるサドル型不動点 P の安定多様体 $W_s(P)$ と不安定多様体 $W_u(P)$ を図1に描いた．これらと対称線 S_g との交差点を u とし，対称線 S_h との交差点を v とする．これらは主ホモクリニック交差点と呼ばれる．以下ではホモクリニック点と簡単に書く．

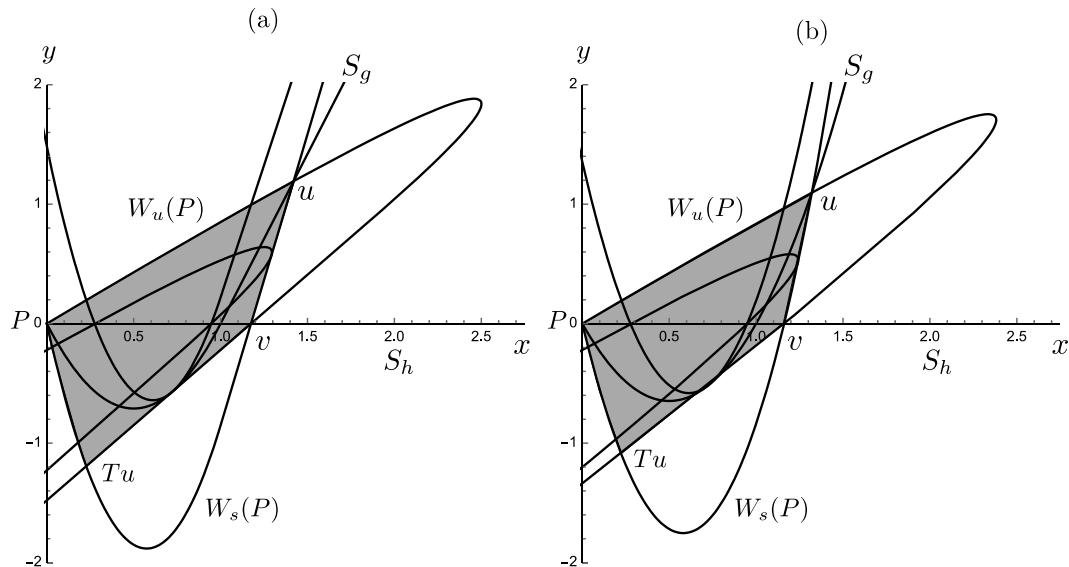


図1：サドル型不動点 P の安定多様体を $W_s(P)$ と表し，不安定多様体を $W_u(P)$ と表す．これらと対称線 S_g との交差点を u とし，対称線 S_h との交差点を v とする．(a) 写像 T におけるスメールの馬蹄の完成． $a = 5.682068$ ．(b) 写像 T_H におけるスメールの馬蹄の完成． $a = 5.176605$ ．両図の灰色閉領域は基本領域．

本論文で議論する横断性と主軸性について述べる．図1に描いたサドル型不動点 P の安定多様体 $W_s(P)$ と不安定多様体 $W_u(P)$ を見よう．ホモクリニック点 u と v で $W_s(P)$ と $W_u(P)$ は横断的に交差している．横断的とは，交差している二つの多様体の交差角度が有限であることを意味している．このような性質は横断性と呼ばれる．数値計算で得られたグラフを見ると，横断性は自明のように見える．しかし，写像 T において a の値によっては交差角度がゼロである交差が生じる．このような交差を非横断的交差と言う．非横断的交差が生じたら，どのような影響がホモクリニック点近傍に存在する周期軌道に生じるのだろうか．横断的交差から非横断的交差を経て別の横断的交差に変化したとき，系の性質はどのように変わるのだろうか．これらの疑問に答えることが本論文の目的のひとつである．

次に主軸性について述べる．パラメータ a を0から大きくする．楕円型不動点 Q の近傍における軌道点の回転について説明する．回転の方向は時計回りである．パラメータ a を増加するにつれて回転の仕方が速くなる．この回転の仕方の指標として，既約分数である回転数 p/q を導入する．ここで q は周期．周期軌道が1周期の間に Q の周りを回転する回数が p である．回転数 p/q は一回の写像で Q の周りを回転する平均の割合である．回転数 p/q は平均角度 $2\pi \times p/q$ だけ Q の周りを回転することを意味する．パラメータ a が

$$a_c(p/q) = 4\sin^2(\pi p/q) \quad (0 < p/q \leq 1/2) \quad (5)$$

を満たすと、対称線上に軌道点をもつ回転数 p/q の周期軌道が Q より二つ生じる。 $0 < p/q < 1/2$ の場合、この分岐を回転分岐と呼ぶ。 $p/q = 1/2$ の場合が周期倍分岐である。

問題になるのは主軸と呼ばれる対称線 $y = -f(x)/2$ ($y > 0$)上と $y = -f_H(x)/2$ ($y > 0$)上に、回転分岐で生じた周期軌道の性質である。周期軌道が生じた直後の安定性は楕円型で、パラメータを増大すると反転を伴うサドル型になる。この性質は主軸性と呼ばれている。主軸性は写像 T_H では成立する[1]。本論文では、写像 T で主軸性が成立するかどうかを検討する。主軸性が成立する写像では周期軌道の性質が制限されているため、系の性質を理解しやすい。

ここで写像 T を導入した経緯を簡単に述べておこう。横断性と主軸性が共に成り立つ写像である写像 T_H では、横断性と主軸性の関係を調べることができない。これらの関係を調べるためには、横断性が成立しない写像とか主軸性が成立しない写像を調べる必要がある。そのために写像関数 $f(x)$ を二次関数から変更する必要がある。二次関数を折れ線にした写像はロジ写像と呼ばれる[3,4]。折れ点の存在のために二次関数の場合と比較してより複雑な現象が生じる。ロジ写像の折れ点の近傍を二次関数にして滑らかな関数にすることも考えられている[5]。このような写像では、少なくとも関数の形状を決めるパラメータと、分岐パラメータが必要となる。そのため分岐現象の解析が煩雑になる。写像関数の変更の仕方によっては別の問題が発生し、ここで議論したい問題が埋れてしまう危険性がある。この危険性を避けるために本論では性質 1 をもった写像 T を導入したのである。

性質 1. 写像 T は(1)から(4)を満たす。

- (1) パラメータは 1 個で a (≥ 0)とする。
- (2) 写像関数は C^1 級。
- (3) $a \geq a_c^{\text{SH}}$ で、スメールの馬蹄が存在する。
- (4) 安定多様体と不安定多様体の交差の仕方で非横断的交差が生じる。

性質 1 (1)より、パラメータ a のみで系の性質を制御できる。(2)によって線形解析を利用できる。(3)より、写像 T と T_H に同じ周期軌道と同じホモクリニック軌道が存在することがわかる。しかし、周期軌道の生じ方またはホモクリニック軌道の生じ方が異なる可能性がある。これらの相違を比較検討するさいに、(4)の性質は重要である。

§2 では本論文で使用する概念と記号を導入する。§3 では、最初に安定多様体と不安定多様体の非横断的交差が生じる臨界値を決める方法を提示する。次に、双曲領域を導入し横断的交差点の近傍にある周期軌道点の安定性を決定する。§4 では、最初に主軸性について紹介する。次に安定多様体と不安定多様体の横断的交差性と主軸性との関係を議論する。§5 で得られた結果をまとめ、今後の課題についても述べる。

2. 準備

2.1. 対合, 対称線と対称周期軌道

写像 T を対合 g と h を用いて $T = h \circ g$ と分解する. 記号 $\circ$ は分離記号. $\det \nabla h = \det \nabla g = -1$ が成り立つ.

$$g \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y - f(x) \\ x \end{pmatrix}, \quad (6)$$

$$h \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y \\ x - y \end{pmatrix}. \quad (7)$$

対合の不動点の集合は対称線と呼ばれる. これらを次に示す.

$$S_g : y = -f(x)/2, \quad S_h : y = 0. \quad (8)$$

写像 T と T_H において同じ記号 S_g と S_h を利用する. 上記の対称線の表現で関数 $f(x)$ を $f_H(x)$ に置き換えた対称線が, 写像 T_H における S_g である. 対称線 S_h の表現は写像 T と T_H において同じである.

今後の議論のためにそれぞれの対称線を楕円型不動点 Q を境目として二つに分ける.

$$S_g^+ : y = -f(x)/2 \ (x > 1), \quad S_g^- : y = -f(x)/2 \ (x < 1), \quad (9)$$

$$S_h^+ : y = 0 \ (x > 1), \quad S_h^- : y = 0 \ (x < 1). \quad (10)$$

対称線 S_g^+ 上の点 $z = (x, y)$ ($x > 1$)で, $y = G(x)$ と書ける曲線が交差しているとする. 点 z におけるこの曲線の傾きを $\xi(z) = dG(x)/dx$ と書く. $\xi(x)$ と書くべきであるが, これでは意味がわかりにくいので $\xi(z)$ を用いる. この曲線に g を作用した曲線を $y = G_g(x)$ とし, 点 z における傾きを $\xi_g(z) = dG_g(x)/dx$ と書く. 対合 g の表現より

$$\xi(z) + \xi_g(z) = -\frac{df(x)}{dx} = a \quad (11)$$

が得られる. 点 z における二つの曲線の傾きが等しくなるのは, $\xi(z) = \xi_g(z) = a/2$ の場合と, 二つの傾きがともに発散する場合である. 因みに $a/2$ は S_g^+ の傾きである.

次に $y = H(x)$ と書ける曲線が, 対称線 S_h^+ と点 $w = (x, 0) \in S_h^+$ で交差しているとする. 点 w におけるこの曲線の傾きを $\eta(w) = dH(x)/dx$ と書く. この曲線に h を作用した曲線を $y = H_h(x)$ とし, 点 w における傾きを $\eta_h(w) = dH_h(x)/dx$ と書く. 対合 h の表現より

$$\eta_h(w) = \frac{\eta(w)}{\eta(w) - 1} \quad (12)$$

が得られる. 点 w における二つの曲線の傾きが等しくなるのは, $\eta(z) = \eta_h(w) = 0$ の場合と, $\eta(z) = \eta_h(w) = 2$ の場合がある. 因みに傾き 0 は対称線 S_h の傾きである.

次に対称周期軌道を定義する.

定義 2. 対称線上に軌道点を二つ持つ周期軌道を対称周期軌道という.

本論文で議論する対称周期軌道は, 楕円型不動点 Q から回転分岐と周期倍分岐で生じた

周期軌道のみである．ここで回転分岐が生じる臨界値を与える式(5)の導出を簡単に述べておく． Q の周りで線形解析を行うと，線形化行列 M が下記のように得られる．

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 1 & 1-a \end{pmatrix}. \quad (13)$$

$0 < a < 4$ では，二つの固有値 $\lambda_{\pm}$ は複素数となる．

$$\lambda_{\pm} = \frac{(2-a) \pm i\sqrt{4a-a^2}}{2} = \exp(2\pi i p/q). \quad (14)$$

回転数 p/q を与えると 臨界値 $a_c(p/q)$ が決まる．式(14)を a について解いた結果が式(5)である．

ここで回転分岐で生じた二つの対称周期軌道を p/q -BE と p/q -BS と書く．B はバーコフの順序保存性を意味している．E は楕円型（反転を伴うサドル型も含む）を表し，S はサドル型を意味する．ここで p/q -BE と p/q -BS に関する性質を性質 3 としてまとめておく[1]．

性質 3. 初期点を z_0 とし，軌道点を $z_k = T^k z_0$ とする．

[1] p/q -BE は下記のように三種類に分類される．

- (1) 奇数周期で回転回数が奇数． $z_0 \in S_h^-$, $z_k \in S_g^+$. $q = 2k + 1$ ($k \geq 1$).
- (2) 奇数周期で回転回数が偶数． $z_0 \in S_h^+$, $z_k \in S_g^+$. $q = 2k + 1$ ($k \geq 1$).
- (3) 偶数周期で回転回数が奇数． $z_0 \in S_g^-$, $z_k \in S_g^+$. $q = 2k$ ($k \geq 1$).

[2] p/q -BS は下記のように三種類に分類される．

- (1) 奇数周期で回転回数が奇数． $z_0 \in S_h^+$, $z_k \in S_g^-$. $q = 2k + 1$ ($k \geq 1$).
- (2) 奇数周期で回転回数が偶数． $z_0 \in S_h^-$, $z_k \in S_g^-$. $q = 2k + 1$ ($k \geq 1$).
- (3) 偶数周期で回転回数が奇数． $z_0 \in S_h^-$, $z_k \in S_h^+$. $q = 2k$ ($k \geq 1$).

写像 T ではパラメータ a の値によっては p/q -BE がサドル型になることもある．この場合，名称の E (Elliptic) と性質が一致しない．このような不一致が生じてても対称線 S_g^+ に軌道点を持つ周期軌道が p/q -BE であるとしてこの名称を使用する． p/q -BS についても同様である．

2.2. 安定多様体と不安定多様体の配置と対称線との関係

対称線 S_h 上にある軌道点 z_0 がサドル型または反転を伴うサドル型としよう．写像 T^{-q} を次のように分解する．

$$T^{-q} = T^{-q+1}T^{-1} = T^{-q+1}g \circ h. \quad (15)$$

ここで $T^{-1} = g \circ h$ を利用した．対合 h に関する対称線は S_h である．もう一つの対合 $T^{-q+1}g$ に関する対称線を $S_{T^{-q+1}g}$ と書く．周期の偶奇性で $S_{T^{-q+1}g}$ は以下のように決まる．

$$S_{T^{-q+1}g} = T^{-k}S_g \quad (q = 2k + 1, k \geq 1), \quad (16)$$

$$S_{T^{-q+1}g} = T^{-k}S_h \quad (q = 2k, k \geq 1). \quad (17)$$

ここで式(16)を示す． $T^{-2k}g(T^{-k}S_g) = T^{-2k}T^k(gS_g) = T^{-k}S_g$. 式(17)も同様に示せる．

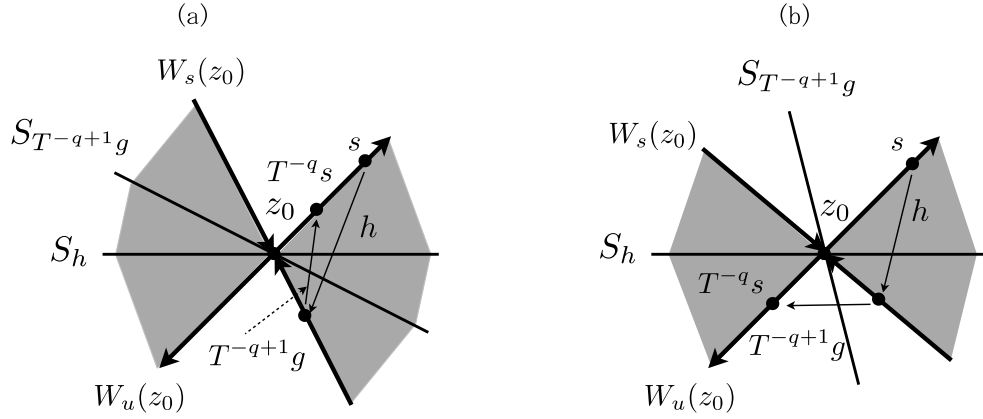


図 2：細い矢印は対合による点の動きを示している．(a) サンドウィッチ型．周期軌道点 z_0 はサドル型．(b) 4 区画分離型．周期軌道点 z_0 は反転を伴うサドル型．

軌道点 z_0 の安定多様体 $W_s(z_0)$ と不安定多様体 $W_u(z_0)$ の配置を図 2 (a) のように仮定する．この場合，対称線 S_h と $S_{T^{-q+1}g}$ が $W_s(z_0)$ と $W_u(z_0)$ に挟まれた領域にある．よって，このような対称線の配置をサンドウィッチ型と呼ぶ．不安定多様体 $W_u(z_0)$ 上の点 s は図 2 (a) に描いたように対合で写される．二つの点 s と $T^{-q}s$ は $W_u(z_0)$ の同じ枝にあることより，軌道点 z_0 は通常のサドル型軌道点であることが導かれる．

安定多様体 $W_s(z_0)$ と不安定多様体 $W_u(z_0)$ で区切られた四つの領域のひとつに 対称線 S_h または $S_{T^{-q+1}g}$ がひとつ入っている場合を考えよう．このような対称線の配置を 4 区画分離型と呼ぶ (図 2 (b))．不安定多様体 $W_u(z_0)$ 上の点 s は図 2 (b) に描いたように対合で写される．点 s と $T^{-q}s$ は $W_u(z_0)$ の別の枝にあることより，軌道点 z_0 は反転を伴うサドル型軌道点であることがわかる．

対称線 S_g 上にある軌道点 z_0 がサドル型または反転を伴うサドル型である場合， T^q を $T^q = T^{q-1}T = T^{q-1}h \circ g$ と分解する．上記と同様の方法でサドル型または反転を伴うサドル型であるかを判定できる．詳細は省く．得られた結果を性質 4 としてまとめておく．

性質 4. 対称線と対称線の像の交差点を z とし，不安定であるとする．軌道点 z の安定多様体と不安定多様体を $W_s(z)$ と $W_u(z)$ と書く．対称線と対称線の像ならびに $W_s(z)$ と $W_u(z)$ の配置が，サンドウィッチ型ならば軌道点 z はサドル型であり，4 区画分離型ならば軌道点 z は反転を伴うサドル型である．

2.3. 安定多様体と不安定多様体の交差の仕方の変化

図 3(a) と (b) を用いて不安定多様体 $W_u(P)$ の形状を説明する．不安定多様体と $x = 1$ との交差点を t とし， t の像を Tt と $T_H t$ とする．ここで $x = 1$ の写像 T または T_H による像は $y = x - 1$ である．点 Tt と $T_H t$ は $y = x - 1$ 上にあることに注意しよう．

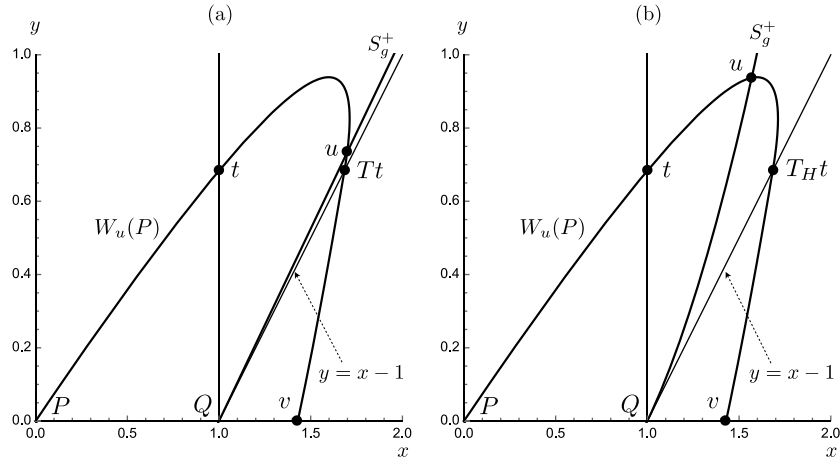


図 3: $a = 2.1$. (a) 写像 T における不安定多様体 $W_u(P)$ と対称線 S_g^+ との交差. (b) 写像 T_H における不安定多様体 $W_u(P)$ と対称線 S_g^+ との交差. 交差点 u と v はホモクリニック点.

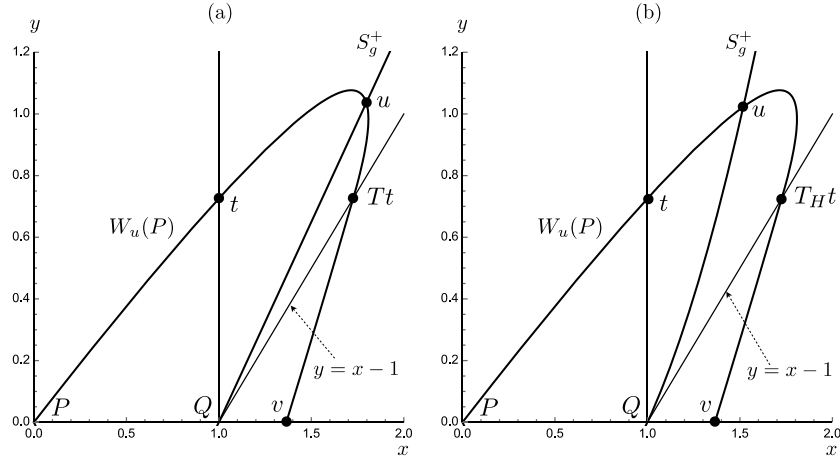


図 4: $a = 2.6$. (a) 写像 T における不安定多様体 $W_u(P)$ と対称線 S_g^+ との交差. (b) 写像 T_H における不安定多様体 $W_u(P)$ と対称線 S_g^+ との交差.

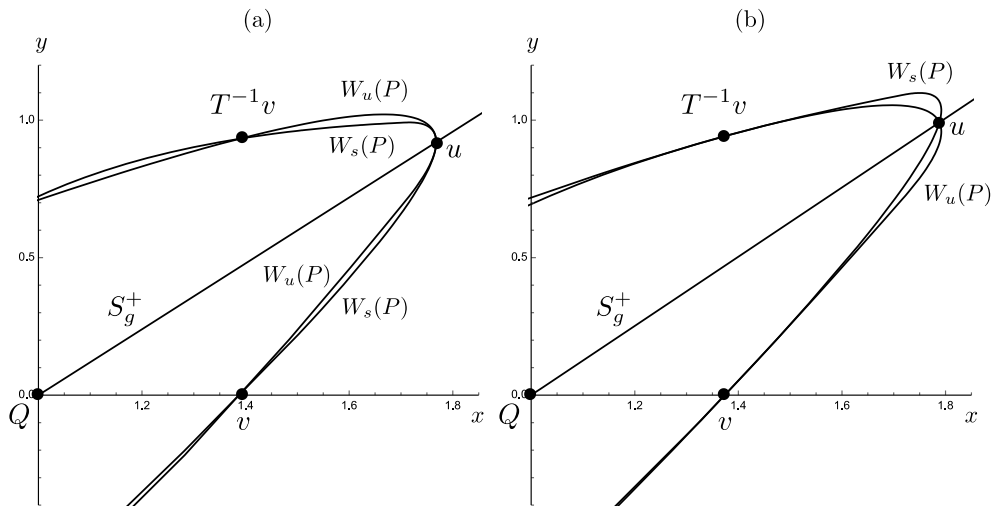


図 5: (a) ホモクリニック点 u における非横断的交差. $a = a_c(u) = 2.396330$. ホモクリニック点 v での交差は横断的交差. (b) ホモクリニック点 v における非横断的交差. $a = a_c(v) = 2.517965 > a_c(u)$. ホモクリニック点 u での交差は横断的交差.

不安定多様体の弧 $[P, t]_{W_u(P)}$ は写像関数 $f(x)$ の二次関数部分で決まる．この部分は写像関数 $f_H(x)$ とも共通である．よって弧 $[P, t]_{W_u(P)}$ の像である弧 $[P, Tt]_{W_u(P)}$ と、弧 $[P, T_H t]_{W_u(P)}$ は同じ形状である．図 3(a)において対称線 S_g^+ と弧 $[P, Tt]_{W_u(P)}$ の交差点 u では、不安定多様体の傾き $\xi_u(u)$ が対称線の傾き $a/2$ より大きい．つまり $\xi_u(u) > a/2 > \xi_s(u)$ が成り立つ．ここで式 (11)を利用した．図3(b)において対称線 S_g^+ と弧 $[P, T_H t]_{W_u(P)}$ の交差点 u では、不安定多様体の傾き $\xi_u(u)$ が対称線の傾き $\xi_g = -(a/2)(1 - 2x_u)$ より小さい(x_u は u の x 座標)． $\xi_u(u) < \xi_g < \xi_s(u)$ が成り立つ．

図 4(a)において $\xi_u(u) < a/2 < \xi_s(u)$ が成り立つ．図 4(b)において $\xi_u(u) < \xi_g < \xi_s(u)$ が成り立つ．写像 T_H においては安定多様体の傾きと不安定多様体の傾きの大小関係は変化しない．しかし、写像 T においては安定多様体の傾きと不安定多様体の傾きの大小関係は変化する．実際、 a の値が 2.4 あたりで安定多様体の傾きと不安定多様体の傾きがともに発散する．この状況では 安定多様体と不安定多様体の交差は非横断的である．このパラメータ区間において、写像 T で非横断的交差が現れる原因は対称線 S_g^+ の形状にあることがわかる．

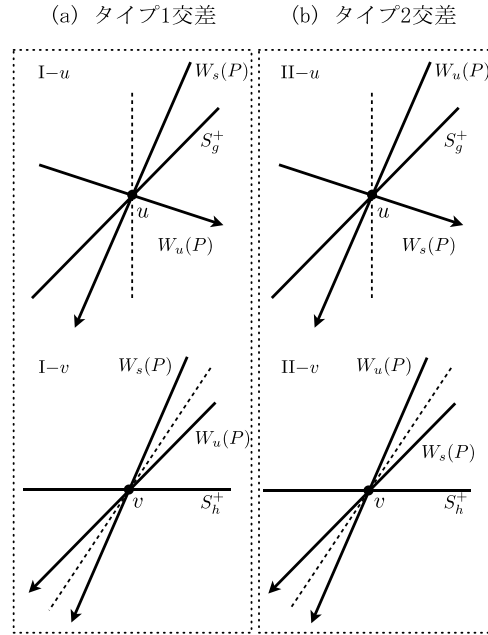


図 6：タイプ 1 交差とタイプ 2 交差の定義．I-u と II-u における点線は傾きが発散した状況を表し、I-v と II-v における点線は傾き 2 の直線を表す．

写像 T におけるホモクリニック点 u における交差の仕方の変化をまとめる． $a < a_c(u) = 2.396330$ における、ホモクリニック点 u での交差の仕方は $\xi_u(u) > a/2 > \xi_s(u)$ を満たす．この状況を II-u と名付ける． $a = a_c(u)$ で安定多様体と不安定多様体の u における傾きは共に発散する．つまり非横断的交差の状況である（図 5 (a))． $a > a_c(u)$ での交差の仕方は $\xi_u(u) < a/2 < \xi_s(u)$ を満たす．この状況を I-u と名付ける．

次にホモクリニック点 v での交差の仕方の変化を説明する． $a < a_c(v) = 2.517965$ における交差の仕方は $\xi_u(v) > 2 > \xi_s(v)$ を満たす．この状況を II-v と名付ける．つまり $a = a_c(v)$ では $\xi_u(v) = \xi_s(v) = 2$ を満たす非横断的交差の状況が出現する（図 5(b))． $a > a_c(v)$ では

$\xi_u(v) < 2 < \xi_s(v)$ を満たす横断的交差の状況が出現する．この状況を $I-v$ と名付ける．

写像 T における交差のタイプと交差の入れ替わり区間の定義を与える．

定義 5.

- (1) ホモクリニック点 u での 交差が $I-u$ で、ホモクリニック点 v での交差が $I-v$ である場合、タイプ 1 交差と定義する (図 6(a)).
- (2) ホモクリニック点 u での 交差が $II-u$ で、ホモクリニック点 v での交差が $II-v$ である場合、タイプ 2 交差と定義する (図 6(b)).
- (3) パラメータ区間 $[a_c(u), a_c(v)]$ を交差の入れ替わり区間とする．

最後に、スメールの馬蹄の存在とタイプ 1 交差の関係を命題 6 として与える．命題 6 の証明は付録 A におけるスメールの馬蹄の存在証明と補足を見て欲しい．

命題 6. タイプ 1 交差は、スメールの馬蹄が現れるための必要条件である．

3. 横断的交差と非横断的交差

3.1. 非横断的交差

サドル型不動点の安定多様体と不安定多様体が横断的に交差すると系の中にカオス軌道が存在することを最初に発見したのはポアンカレである [6]．二次元写像の場合、横断的交差をもとに系の中に高次のスメールの馬蹄 ($k \geq 2$) 回写像で構成される馬蹄) が存在することを示せばよい [7]．横断的交差はカオス軌道の存在と密着している．これについてはよく知られているので詳細は省く．歴史的経緯は参考文献 [8] を参考にして欲しい．

横断的交差の場合、様々な摂動に対して系は安定である．横断的交差の場合、この安定性をもとに 有用な定理がいくつも証明されている [9]．ところが非横断的交差の場合、摂動のため非横断的交差は 横断的交差に変化してしまう．このような不安定性のために 非横断的交差点の近傍の性質は十分に解明されていない．安定多様体と不安定多様体の二次関数的接触の前に生じる現象はニューハウス現象 [10] として知られている．非横断的交差には、交差点で安定多様体と不安定多様体の傾きが等しく三階微分が異なる場合がある．この三次関数的交差については参考文献 [11] を見られたい．以上のことを踏まえここで議論する問題を二つ提示する．

問題 7.

- (1) 安定多様体 $W_s(P)$ と不安定多様体 $W_u(P)$ のグラフを描いて判断する方法では、非横断的交差が生じる臨界値の正確な値を得ることができない．非横断的交差が生じる臨界値 $a_c(u)$ と $a_c(v)$ をどのように決めればよいのか．
- (2) 非横断的交差の場合、ホモクリニック点に集積している p/q -BE と p/q -BS の安定性が問題となる．非横断的交差点にサドル型周期軌道点が集積しているのか、反転を伴うサドル型周期軌道点が集積しているのか決めよ．

これらの問題を解決するために、安定多様体 $W_s(P)$ と不安定多様体 $W_u(P)$ のグラフを描いて得られた非横断的交差の臨界値のあたりで、ホモクリニック点 u の近傍にある $1/q$ -BEの安定性を調べる．またホモクリニック点 v の近傍にある $1/q$ -BSについても同様にこれらの安定性を調べる．結果として二つの問題に関する答えが得られる．

ここでサドル型周期軌道点が楕円型周期軌道点に分岐する場合について説明する．この過程で、母サドル型周期軌道点から二つの娘サドル周期軌道点が生じる．これらの周期は母サドル型周期軌道の周期と同じであることより、この分岐過程は反同周期分岐と呼ばれる．因みに、楕円型周期軌道点がサドル型周期軌道点に分岐する過程が、同周期分岐である．この分岐では二つの楕円型周期軌道点が生じる．楕円型周期軌道点が反転を伴うサドル型周期軌道点に分岐する現象は周期倍分岐と呼ばれる．この過程で生じる娘楕円型周期軌道の周期が二倍になるからである．反同周期分岐の臨界値を $a_c^{\text{aeq}}(1/q)$ と、周期倍分岐の臨界値を $a_c^{\text{pd}}(1/q)$ と書く．これらの結果をもとに非横断的交差の臨界値 $a_c(u)$ を以下のように定義する．

$$a_c(u) = \lim_{p/q \rightarrow 0} a_c^{\text{aeq}}(p/q) = \lim_{p/q \rightarrow 0} a_c^{\text{pd}}(p/q). \quad (18)$$

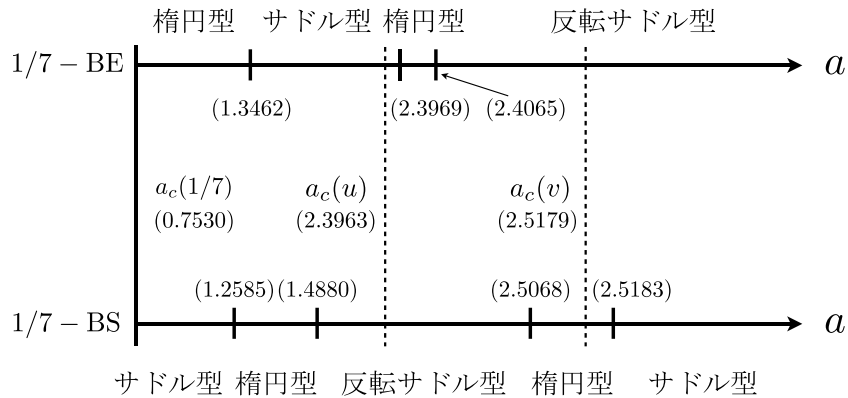


図 7：写像 T における $1/7$ -BE と $1/7$ -BS の分岐過程の模式図 ($a \geq a_c(1/7) = 0.7530$)．括弧の中の数値は分岐が生じる臨界値．反転を伴うサドル型は反転サドル型と略した．

ここで図 7 を利用して写像 T における $1/7$ -BE と $1/7$ -BS の分岐を説明する． $a = a_c(1/7) = 4\sin^2(\pi/7) = 0.753020$ で $1/7$ -BE と $1/7$ -BS が生じる． $1/7$ -BE は S_h^- 上と S_g^+ 上に軌道点を持ち、 $1/7$ -BS は S_h^+ 上と S_g^- 上に軌道点をもつ． $1/7$ -BE が生じた直後は楕円型である．しかし、サドル型になり再度楕円型に戻る．最終的に反転を伴うサドル型になる．

本論文では $a = 2.4$ あたりで生じるホモクリニック点 u での非横断的交差について検討する． $1/13$ -BE と $1/15$ -BE より求めた値を示す．

$$a_c^{\text{aeq}}(1/13) = 2.39633053, \quad a_c^{\text{pd}}(1/13) = 2.39633240,$$

$$a_c^{\text{aeq}}(1/15) = 2.39633040, \quad a_c^{\text{pd}}(1/15) = 2.39633051.$$

これらより、 $a_c(u) = 2.396330$ と決める（図 7 の左の点線）．

非横断的交差の臨界値 $a_c(u)$ では、ホモクリニック点 u にはサドル型周期軌道の p/q -BE が集積している． p/q -BE の固有値は $(+1)$ に漸近している． a が $a_c(u)$ を越すと、ホモクリニック点 u の近傍にある p/q -BE から順に反転を伴うサドル型周期軌道に変化していく．

次に、非横断的交差の臨界値 $a_c(v)$ について議論する．ここでは S_h^+ 上にある $1/q$ -BS の軌道点を利用する．臨界値 $a_c(v)$ の前後では、 $1/q$ -BS は反転を伴うサドル型周期軌道から楕円型周期軌道へ分岐し、次にサドル型周期軌道に分岐する．反転を伴うサドル型周期軌道から楕円型周期軌道への分岐は反周期倍分岐である．臨界値を $a_c^{\text{apd}}(1/q)$ とする．楕円型周期軌道からサドル型周期軌道への分岐は同周期分岐である．臨界値を $a_c^{\text{eq}}(1/q)$ とする．非横断的交差の臨界値 $a_c(v)$ を以下のように定義する．

$$a_c(v) = \lim_{p/q \rightarrow 0} a_c^{\text{apd}}(p/q) = \lim_{p/q \rightarrow 0} a_c^{\text{eq}}(p/q). \quad (19)$$

$1/7$ -BS が生じた直後はサドル型であるがパラメータの増大に伴い楕円型になり反転を伴うサドル型になる（図 7）．次に反転を伴うサドル型から楕円型へ、最後にサドル型になる．また、楕円型からサドル型に戻る途中でホモクリニック点 v では非横断的交差が生じている．以下の結果より臨界値を $a_c(v) = 2.517965$ と決める（図 7 の右の点線）．

$$a_c^{\text{apd}}(1/13) = 2.51796384, \quad a_c^{\text{eq}}(1/13) = 2.51796567,$$

$$a_c^{\text{apd}}(1/15) = 2.51796546, \quad a_c^{\text{eq}}(1/15) = 2.51796556.$$

ここで周期軌道の分岐に関する注意を述べておく．パラメータを増加した場合、反転を伴うサドル型からサドル型に変化する途中に必ず楕円型になる．サドル型から反転を伴うサドル型に変化する場合も、途中に必ず楕円型になる．ロジ写像のように写像関数に折れ点がある場合、有限周期軌道において反転を伴うサドル型からサドル型に突然変化する[12]．しかし、写像関数に折れ点がない場合、有限周期軌道において反転を伴うサドル型（サドル型）からサドル型（反転を伴うサドル型）に突然変化することはない．ところが、周期が無限大の極限では楕円型のパラメータ区間幅が無限小になり、反転を伴うサドル型からサドル型に突然変化する現象が生じる．サドル型から反転を伴うサドル型に変化する場合も同様である．これらを性質 8 としてまとめる．

性質 8. ホモクリニック点 u に集積している p/q -BE と、ホモクリニック点 v に集積している p/q -BS を考える．周期が無限大の極限では、非横断的交差が生じる前後でサドル型周期軌道から反転を伴うサドル型周期軌道に突然変化する．また逆の突然の変化も起きる．

3.2. 双曲領域の導入

タイプ 1 交差の場合において双曲領域の導入するために、安定多様体の弧 γ_s と不安定多様体の弧 γ_u を定義する．これらの弧については図 8(a)と図 9(a)を参考にして欲しい．関係 $\gamma_s = g\gamma_u$ が成立する．

$$\gamma_s = [u, v]_{W_s(P)}, \gamma_u = [T^{-1}v, u]_{W_u(P)}. \quad (20)$$

(1) 双曲領域の導入 1. タイプ 1 交差の状況で双曲領域の導入を行う．双曲領域のグラフを描くために， a の値を $a_c(v)$ より大きな値である $a = 4$ とする．弧 γ_u を未来に二回写像した $T^2\gamma_s$ は1/3-BEの軌道点 z_0 に近くにある（図8(a)）．更に一回写像すると $T^3\gamma_u$ は S_g^+ と交差する．その結果， $T^4\gamma_u$ も S_g^+ と交差する． $gT^3\gamma_u = T^{-3}g\gamma_u = T^{-3}\gamma_s$ と $gT^4\gamma_u = T^{-4}\gamma_s$ の関係より， $T^3\gamma_u$ ， $T^4\gamma_u$ ， $T^{-3}\gamma_s$ と $T^{-4}\gamma_s$ の四つの弧で囲まれた閉領域（図8(b)の灰色閉領域）が構成できる．この閉領域を双曲領域と名付け $Z_{1/3}$ と書く．双曲領域 $Z_{1/3}$ は軌道点 z_1 を含む．1/3-BEが生じる臨界値は $a_c(1/3) = 3$ である．パラメータ a を3より a を大きくすると必ず双曲領域 $Z_{1/3}$ が生じる．ここでは回転数を決めてその双曲領域が存在するようにパラメータ a を増加させた．

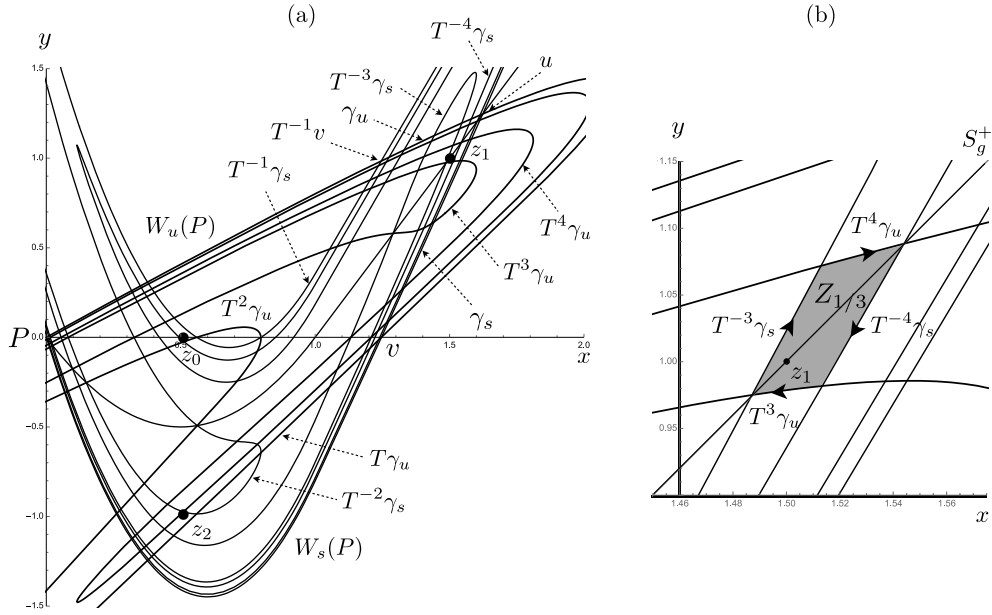


図8：双曲領域の導入 1. (a) $a = 4$ における安定多様体 $W_s(P)$ と不安定多様体 $W_u(P)$ ．ホモクリニック点 u と v における交差はタイプ1交差．(b) 双曲領域 $Z_{1/3}$ （灰色閉領域）の構成．周期軌道点 z_1 の周りの拡大図．

次に a を任意の値に固定した場合を考える．周期 q を大きくすると $1/q$ -BEの軌道点はホモクリニック点 u に近づき双曲領域 $Z_{1/q}$ を必ず定義できるようになる．これは写像回数を増やすと γ_u の未来への像はのびて点 u に漸近し， γ_s の過去への像ものびて点 u に漸近するからである． $Z_{1/q}$ が定義できる臨界値を $a_c^{\text{hr}}(1/q)$ としよう．下記の関係が成立する．

$$a_c^{\text{hr}}(1/q') < a_c^{\text{hr}}(1/q) \quad (q' > q). \quad (21)$$

これは 双曲領域 $Z_{1/3}$ が存在しているならば， $Z_{1/4}$ ， $Z_{1/5}$ 等が存在していることを意味している．ここで q_m を双曲領域を定義できる最小の周期とする．

$$Z_u(q_m) = \bigcup_{q \geq q_m} Z_{1/q}. \quad (22)$$

領域 $Z_u(q_m)$ はホモクリニック点 u の近傍のカオス層 (Stochastic layer) [13]の厚みを与えている．よって， $Z_u(q_m)$ をカオス層の定義とすることを提案する．

図9 (a)の灰色閉領域が双曲領域 $Z_{1/q}$ の模式図である．双曲領域 $Z_{1/q}$ の四つの頂点の名称を A, B, C, D と時計回りにつける (図9 (b))．周期は $q = 2k$ ($k \geq 1$)，または $q = 2k + 1$ ($k \geq 1$)である．構成の仕方から $B = gD$ である．また $Z_{1/q} = gZ_{1/q}$ である．

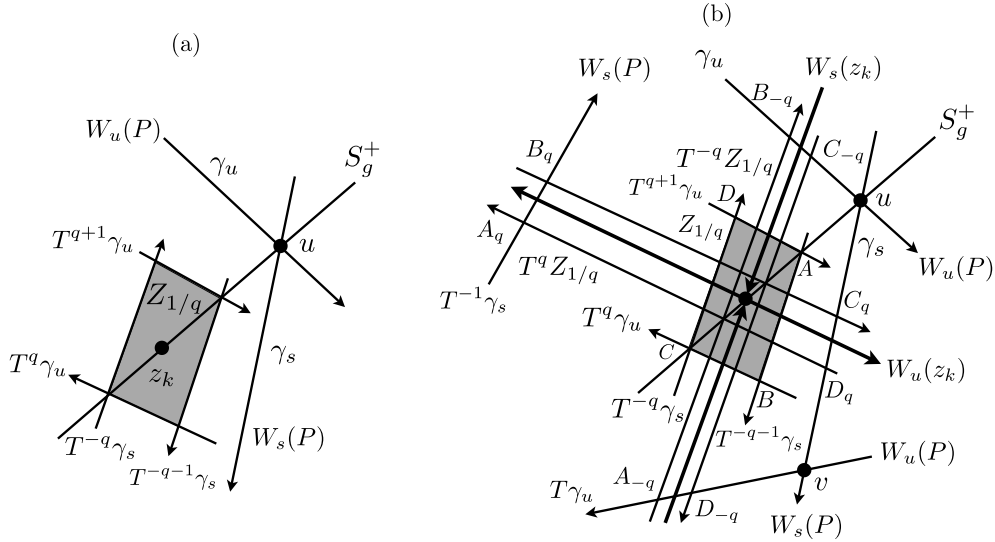


図9: 双曲領域の導入 1. (a) 双曲領域 $Z_{1/q}$ (灰色閉領域) の構成の模式図. (b) 双曲領域 $Z_{1/q}$ (灰色閉領域), 像 $T^q Z_{1/q}$ と 逆像 $T^{-q} Z_{1/q}$ の関係の模式図. 点 z_k は反転を伴うサドル型軌道点.

次に，像 $T^q Z_{1/q}$ と逆像 $T^{-q} Z_{1/q}$ を調べる．双曲領域 $Z_{1/q}$ の中には周期 q の軌道点があるから，像 $T^q Z_{1/q}$ と $Z_{1/q}$ は必ず共通領域を持つ．逆像 $T^{-q} Z_{1/q}$ と $Z_{1/q}$ についても同様である．未来への像は双曲領域を構成している不安定多様体の方向にのび，過去への像は安定多様体の方向にのびることを利用する．また， $T^q(T^{-q}\gamma_s) = \gamma_s$ と $T^q(T^{-q-1}\gamma_s) = T^{-1}\gamma_s$ を利用すると像 $T^q Z_{1/q}$ が得られる．

像 $T^q Z_{1/q}$ の四つの頂点の名称を A_q, B_q, C_q, D_q とする．方向保存写像であるから A_q, B_q, C_q, D_q の並びの順は時計回りである．逆像 $T^{-q} Z_{1/q}$ の頂点を $A_{-q}, B_{-q}, C_{-q}, D_{-q}$ とする．これらも時計回りに並んでいる．ここで $T^{-q} Z_{1/q} = gT^q Z_{1/q}$ が成り立つ．像 $T^q Z_{1/q}$ と $Z_{1/q}$ を比べると， z_k の近傍の点は約 180 度回転していることがわかる．また像 $T^{-q} Z_{1/q}$ と $Z_{1/q}$ を比べても同様のことがわかる．結果として，軌道点 z_k が反転を伴うサドル型軌道点であることが示された．図9 (b)における $W_u(z_k)$ と $W_s(z_k)$ は，軌道点 z_k の不安定多様体と安定多様体である．以上をまとめると，任意の a においてホモクリニック点 u の近傍に存在する $1/q$ -BE の軌道点は反転を伴うサドル点である．

(2) 双曲領域の導入 2. タイプ 1 交差の状況で，対称線 S_h^+ 上の $1/q$ -BS の安定性を調べる．図10(a)では， $1/3$ -BS の軌道点， $W_u(P)$ と $W_s(P)$ を描いた ($a = 5$)．ホモクリニック点 v の近くに $1/3$ -BS の軌道点 z_1 がある．この点の周りの拡大図が図10(b)である．

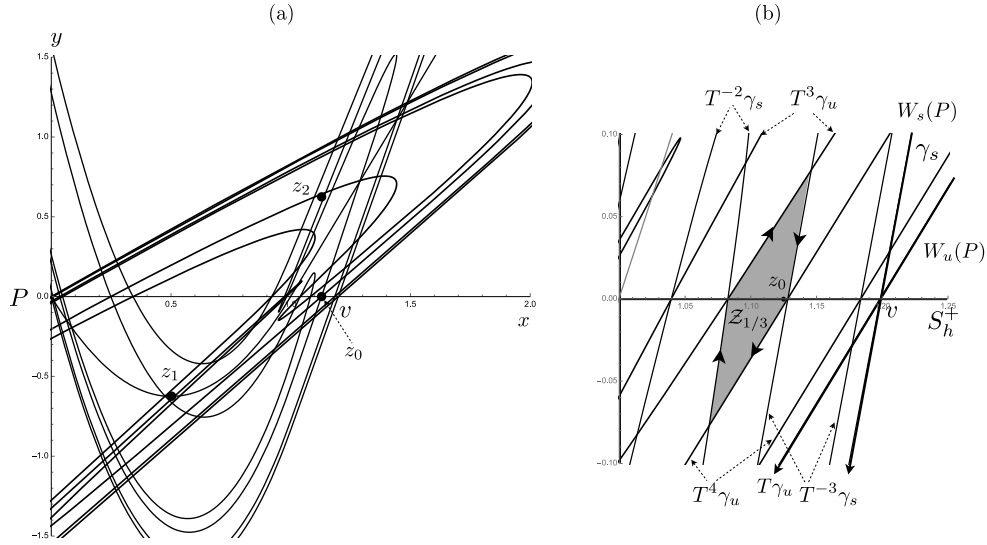


図 10：双曲領域の導入 2. (a) タイプ 1 交差. $a = 5$. (b) 双曲領域 $Z_{1/3}$ (灰色閉領域) の構成.

軌道点 z_1 は $T^3\gamma_u$, $T^4\gamma_u$, $T^{-2}\gamma_s$ と $T^{-3}\gamma_s$ の四つの弧で囲まれている. この閉領域を双曲領域 $Z_{1/3}$ と定義する. ここで $hT^3\gamma_u = T^{-3}hg(g\gamma_u) = T^{-2}\gamma_s$ が成り立つ. $hZ_{1/3} = Z_{1/3}$ より, 双曲領域 $Z_{1/3}$ は h に関して不変である. 図 11 (a) は双曲領域 $Z_{1/q}$ ($q = 2k, 2k+1, k \geq 1$) の定義である. 図 11 (b) では, 未来への像 $T^q Z_{1/q}$ と過去への像 $T^{-q} Z_{1/q}$ を描いた. 双曲領域 $Z_{1/3}$ の四つの頂点を A, B, C, D とし, これらの未来への像を A_q, B_q, C_q, D_q とする. また過去への像を $A_{-q}, B_{-q}, C_{-q}, D_{-q}$ とする. $T^q Z_{1/q}$ と $Z_{1/q}$ を比較すると, 軌道点 z_0 の周りで回転が生じていないことがわかる. 過去への像 $T^{-q} Z_{1/q}$ と $Z_{1/q}$ を比較しても同様のことがわかる. これより軌道点 z_0 はサドル型周期軌道点であることが示された. 任意の a においてホモクリニック点 v の近傍に存在する $1/q$ -BS の軌道点はサドル型周期軌道点である.

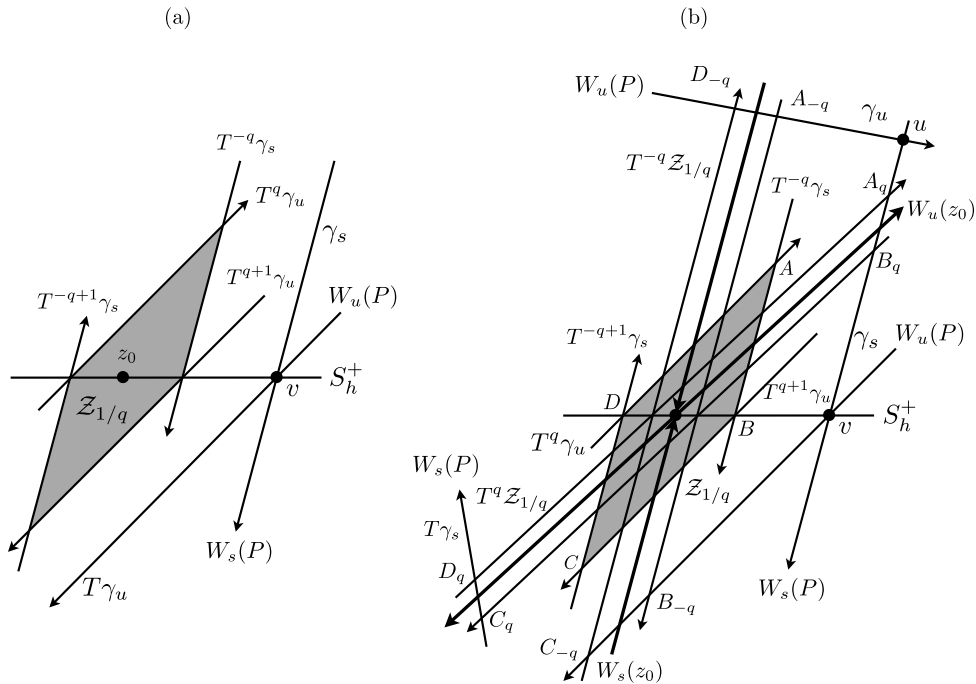


図 11：双曲領域の導入 2. (a) 双曲領域 $Z_{1/q}$ (灰色閉領域) の構成の模式図. (b) 双曲領域 $Z_{1/q}$ (灰色閉領域), 像 $T^q Z_{1/q}$ と逆像 $T^{-q} Z_{1/q}$ の関係の模式図. 点 z_k はサドル型軌道点.

タイプ 2 交差の場合において双曲領域の導入するために、二つの弧 γ_s と γ_u を定義しなおす (図 12(a)と(b)を見よ). この場合も関係 $\gamma_s = g\gamma_u$ が成立する.

$$\gamma_s = [T^{-1}v, u]_{W_s(P)}, \gamma_u = [u, v]_{W_u(P)}. \quad (23)$$

(3) 双曲領域の導入 3. タイプ 2 交差の状況で, 対称線 S_g^+ 上の 1/7-BE の安定性を調べる. 図 12 (a)では, 1/7-BE の軌道点, $W_u(P)$ と $W_s(P)$ を描いた ($a = 2.3$). ホモクリニック点 u の近くに 1/7-BS の軌道点 z_3 がある. 点 z_3 の周りを拡大した模式図が図 12(b)である. 軌道点 z_3 は $T^6\gamma_u$, $T^7\gamma_u$, $T^{-6}\gamma_s$ と $T^{-7}\gamma_s$ の四つの弧で囲まれている. この閉領域を双曲領域 $Z_{1/7}$ と定義する. 図 13(a)は双曲領域 $Z_{1/q}$ ($q = 2k, 2k+1, k \geq 1$)の定義である. 図 13(b)では, 未来への像 $T^q Z_{1/q}$ と過去への像 $T^{-q} Z_{1/q}$ を描いた. 双曲領域 $Z_{1/q}$ の四つの頂点を A, B, C, D とし, これらの未来への像を A_q, B_q, C_q, D_q とする. これら比較すると軌道点 z_1 の周りで回転が生じていないことがわかる. これより軌道点 z_k はサドル型周期軌道点であることが示された. 任意の a においてホモクリニック点 u の近傍に存在する $1/q$ -BE の軌道点はサドル型周期軌道点である.

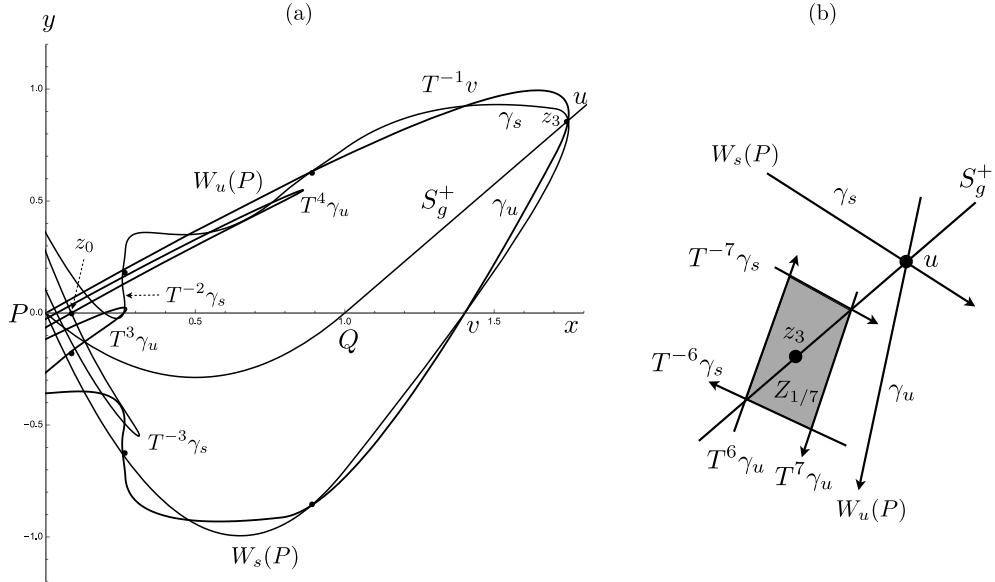


図 12: 双曲領域の導入 3. (a) タイプ 2 交差. $a = 2.3$. (b) 双曲領域 $Z_{1/7}$ (灰色閉領域) の模式図.

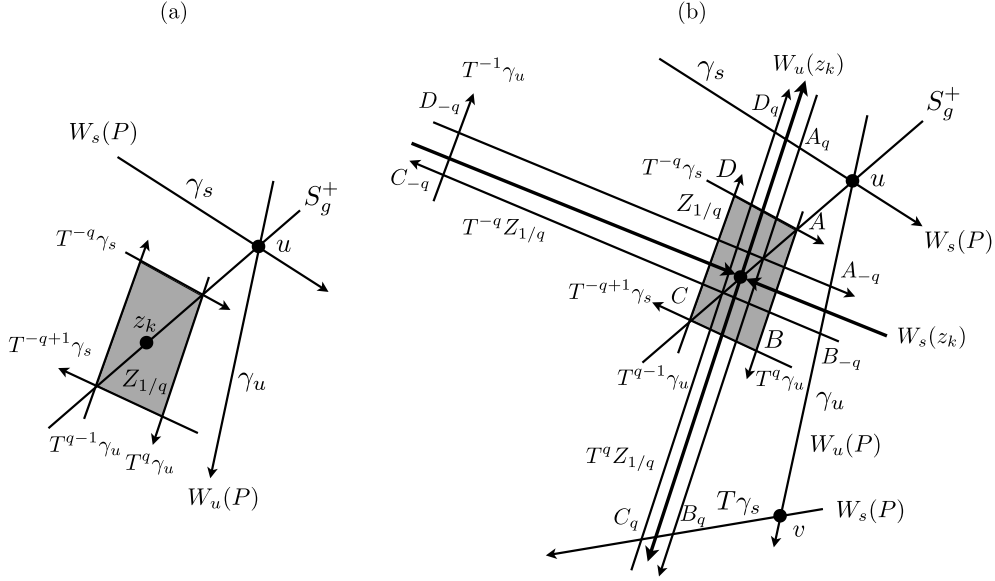


図 13：双曲領域の導入 3. (a) 双曲領域 $Z_{1/q}$ (灰色閉領域) の構成の模式図. (b) 双曲領域 $Z_{1/q}$ (灰色閉領域), 像 $T^q Z_{1/q}$ と 逆像 $T^{-q} Z_{1/q}$ の関係の模式図. 点 z_k はサドル型軌道点.

(4) 双曲領域の導入 4. タイプ 2 交差の状況で, 対称線 S_h^+ 上の $1/6$ -BS の安定性を調べる. 図 14(a) では, $1/6$ -BS の軌道点, $W_u(P)$ と $W_s(P)$ を描いた ($a = 2.3$). ホモクリニック点 v の近くに $1/6$ -BS の軌道点 z_3 がある. 点 z_3 の周りの模式図が図 14 (b) である. 軌道点 z_3 は $T^6\gamma_u$, $T^7\gamma_u$, $T^{-5}\gamma_s$ と $T^{-6}\gamma_s$ の四つの弧で囲まれている. この閉領域を双曲領域 $Z_{1/6}$ と定義する. 図 15 (a) は双曲領域 $Z_{1/q}$ ($q = 2k, 2k + 1, k \geq 1$) の定義である. 図 15(b) では, 未来への像 $T^q Z_{1/q}$ と過去への像 $T^{-q} Z_{1/q}$ を描いた. 双曲領域 $Z_{1/q}$ の四つの頂点を A, B, C, D とし, 未来への像を A_q, B_q, C_q, D_q とする. これらと比較すると軌道点 z_1 の周りでは 約 180 度回転が生じていることがわかる. 軌道点 z_k は反転を伴うサドル型周期軌道点であることが示された. 任意の a においてホモクリニック点 u の近傍に存在する $1/q$ -BS の軌道点は反転を伴うサドル型周期軌道点である.

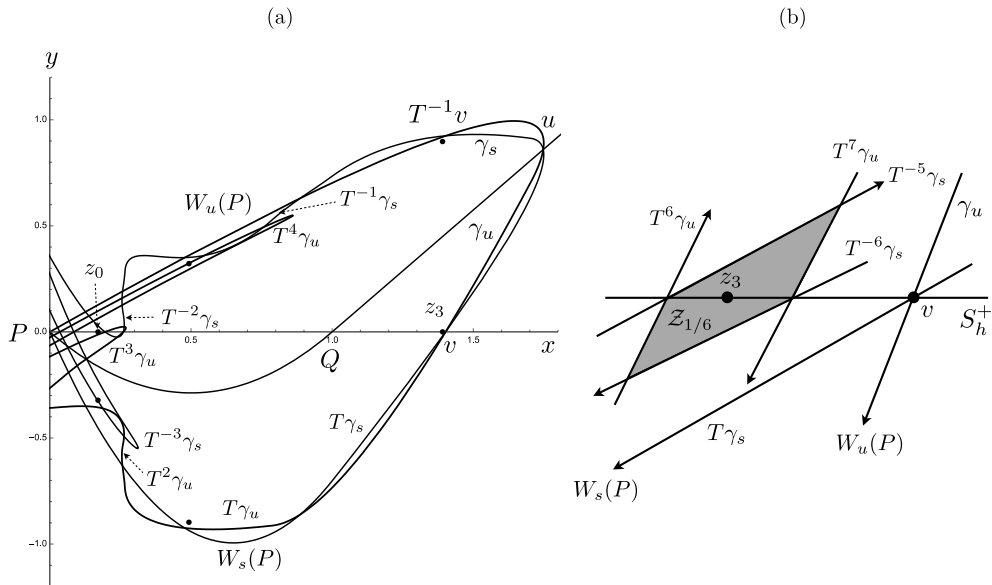


図 14：双曲領域の導入 4. (a) タイプ 2 交差. $a = 2.3$. (b) 双曲領域 $Z_{1/6}$ (灰色閉領域) の模式図.

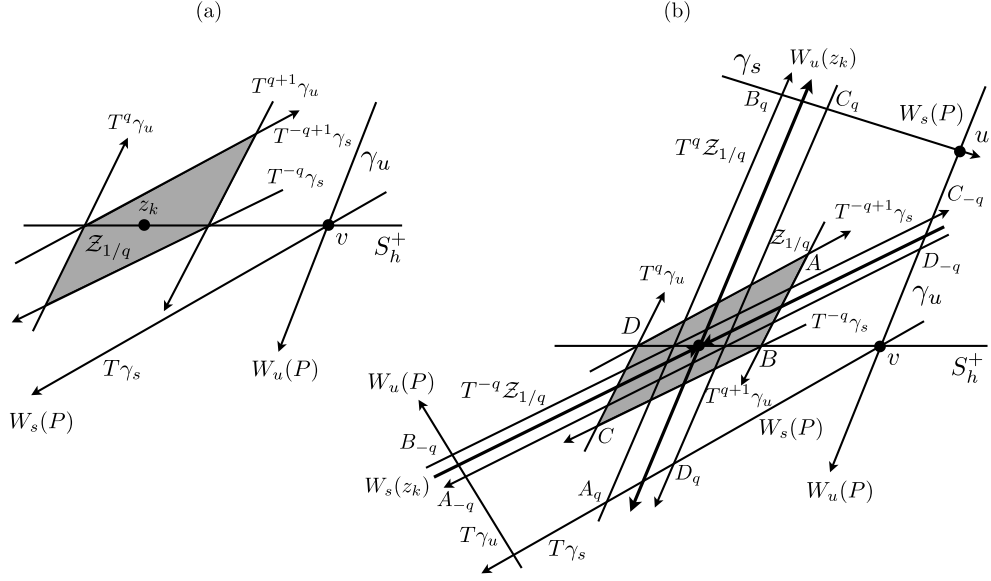


図 15：双曲領域の導入 4. (a) 双曲領域 $Z_{1/q}$ (灰色閉領域) の構成の模式図. (b) 双曲領域 $Z_{1/q}$ (灰色閉領域), 像 $T^q Z_{1/q}$ と 逆像 $T^{-q} Z_{1/q}$ の関係の模式図. 点 z_k は反転を伴うサドル型軌道点.

以上で得られた結果をまとめ定理 9 とする.

定理 9. 回転数 $1/q$ は, $0 < 1/q \leq 1/2$ を満たすとする.

[1] タイプ 1 交差の場合.

- (1) ホモクリニック点 u 近傍には, $1/q$ -BE の反転を伴うサドル型周期軌道点が存在している.
- (2) ホモクリニック点 v 近傍には, $1/q$ -BS のサドル型周期軌道点が存在している.

[2] タイプ 2 交差の場合.

- (1) ホモクリニック点 u 近傍には, $1/q$ -BE のサドル型周期軌道点が存在している.
- (2) ホモクリニック点 v 近傍には, $1/q$ -BS の反転を伴うサドル型周期軌道点が存在している.

4. 横断性と主軸性

4.1. 主軸性小史

標準写像[14]において, 主軸性の概念を最初に導入したのはグリーン (Greene)[15]である. 標準写像

$$y_{n+1} = y_n + a \sin x_n \ (a \geq 0), \ x_{n+1} = x_n + y_{n+1} \pmod{2\pi} \quad (24)$$

において, $a > 0$ ではポアンカレ・バーコフの定理で保証される円筒面を回転する回転数 p/q の周期軌道が存在する. p/q は既約分数. この周期軌道はバーコフの順序保存性を持つ. ポアンカレ・バーコフの定理とバーコフの順序保存性については参考文献[1]を見よ. 円筒面を回転する周期軌道には二つの周期軌道が存在し, それらを p/q -BE と p/q -BS と書く.

これらの名称は第 2.1 節で説明した．グリーンは数値計算で見出した結果をもとに，「 p/q -BE は主軸 $x = \pi$ に軌道点をひとつ持つ」という仮説をおいた．この性質は主軸性と呼ばれている． p/q -BE は主軸性を持つとか，この写像では主軸性が成り立つとか表現する．

次にグリーンの行なったことを簡単に紹介する．黄金数を $\phi = (\sqrt{5} + 1)/2$ とする [16]．グリーンは回転数 $\omega = 1/\phi = 0.618033\dots$ を持つ準周期的運動が構成する不変曲線の安定性を調べた．また回転数 $1 - \omega = 1/\phi^2 = 0.381966\dots$ の不変曲線も回転数 ω の不変曲線と同様の性質を持つ．これらの不変曲線は最後の不変曲線と呼ばれている．これらが崩壊すると軌道点を有界領域に閉じ込められなくなる．

具体的には回転数 ω に集積する回転数の列 $\{p_n/q_n\} = \{1/2, 2/3, 3/5, 5/8, 8/13, \dots\}$ を用意し， p_n/q_n -BE が周期倍分岐を起こす臨界値を数値計算で求めた．回転数の列を構成するためにフィボナッチ数列を利用している [16]．グリーンは，臨界値の集積する値を不変曲線が崩壊する臨界値とした．得られた臨界値は $a_c = 0.97163540631$ である．不変曲線の性質を，不変曲線に集積する周期軌道の性質を利用して理解しようとした最初の試みである．

標準写像における主軸性は，マッカイとミース (MacKay and Meiss) [17] によって証明された．また，主軸性が写像 T_H の系でも成り立つことがダリン，ミースとスターリング (Dullin, Meiss and Stering) [18] による数値計算で発見された．写像 T_H における主軸性は，「 p/q -BE は $a > a_c(p/q)$ において主軸性をもつ」と書ける．これに関する証明は参考文献 [1] にある．ロジ写像では写像 T_H と同等の主軸性は成立しないが，主軸性が成り立つ条件が得られている [12]．

4.2. 横断性と主軸性との関係

写像 T における主軸性と横断的交差の関係を議論する．最初に命題 10 を証明する．

命題 10.

(1) タイプ 1 交差の場合． p/q -BE が不安定ならば， p/q -BE は反転を伴うサドル型周期軌道である．

(2) タイプ 2 交差の場合． p/q -BE が不安定ならば， p/q -BE はサドル型周期軌道である．

(1) の証明．初期点 z_0 が対称線 S_h^- にあり，軌道点 z_k が主軸 S_g^+ 軸にあるとする． $q = 2k + 1$ である．これ以外の場合についても，同様の方法で証明できる．軌道点 z_k は不安定であるから，この点から出る不安定多様体 $W_u(z_k)$ と，この点に入る安定多様体 $W_s(z_k)$ がある．不安定多様体 $W_u(z_k)$ はホモクリニック点 u の近くの不安定多様体 $W_u(P)$ とほぼ平行（反平行）である．また安定多様体 $W_s(z_k)$ は安定多様体の弧 $[u, v]_{W_s(P)}$ とほぼ平行（反平行）である．これらを利用して図 16 に $W_u(z_k)$ と $W_s(z_k)$ を描いた．一方で初期点 z_0 の不安定多様体 $W_u(z_0)$ は，サドル型不動点 P から出る不安定多様体 $W_u(P)$ とほぼ平行（反平行）である．また安定多様体 $W_s(z_0)$ は， P に入る安定多様体 $W_s(P)$ とほぼ平行（反平行）である．これらをもとに不安定

多様体 $W_u(z_0)$ と安定多様体 $W_s(z_0)$ を描いた．ここで軌道点 z_k の周りの灰色領域を S_g^+ が通過していることに注意しよう．次にこの領域に対して T^{-k} を作用すると初期点 z_0 の周りの灰色領域に写される．つまり灰色領域を $T^{-k}S_g^+$ が通過していることが導かれる．図 16 中の拡大図を見て欲しい．この配置は 4 区画分離型（図 2(b)）である．性質 4 より，(1) が証明された．

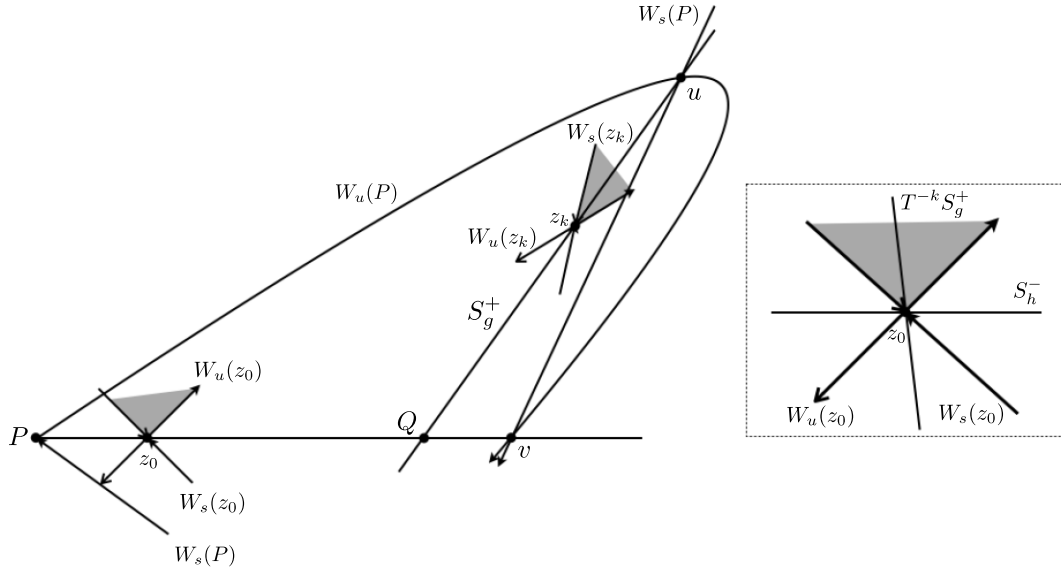


図 16：タイプ 1 交差の状況．4 区画分離型の配置．右図は周期軌道点 z_0 の周りの拡大図．

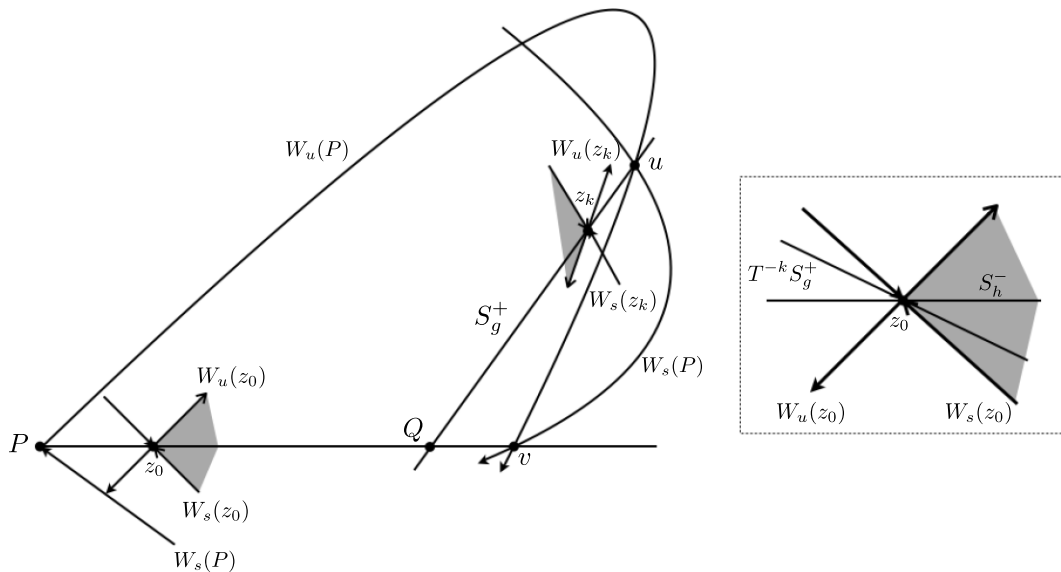


図 17：タイプ 2 交差の状況．サンドウィッチ型の配置．右図は周期軌道点 z_0 の周りの拡大図．

(2) の証明．初期点 z_0 が対称線 S_h^- にあり，軌道点 z_k が主軸 S_g^+ 軸にあるとする． $q = 2k + 1$ である．これ以外の場合についても，同様の方法で証明できる．軌道点 z_k で周りの灰色領域を S_g^+ が通過している．この灰色領域は初期点 z_0 の周りの灰色領域に写される（図 17）．灰色領域はほぼ 180 度回転することに注意しよう．初期点 z_0 の周りの灰色領域を像 $T^{-k}S_g^+$ が通過している（図 17 の拡大図を見よ）．不安定多様体 $W_u(z_0)$ と安定多様体 $W_s(z_0)$ ならびに S_h^- と $T^{-k}S_g^+$ の配置がサンドウィッチ型であることが導かれた．性質 4 より，(2) が証明された．

命題 10(1)よりタイプ 1 交差の場合, p/q -BE はサドル型にならない. よって定理 11 が得られる.

定理 11. 平面における面積保存二次元写像では, サドル型不動点の安定多様体と不安定多様体の交差がタイプ 1 交差ならば主軸性が成り立つ.

タイプ 1 交差とタイプ 2 交差の入れ替わる途中では, ホモクリニック点 u から離れた主軸上にサドル型周期軌道点が存在している可能性がある. そのために主軸性が成り立つとは限らない.

主軸性は非常に特殊な性質であると考えられている. しかし, 系にスメールの馬蹄が生じる系では馬蹄の完成に近づくにつれて主軸性が成り立つようになる. これは次のように理解できる. パラメータの増大に伴い, サドル型不動点の安定多様体と不安定多様体の交差が必ずタイプ 1 交差になる. つまり定理 11 より主軸性が成立するようになる. この結果を写像 T に適用すると命題 12 が得られる.

命題 12. 写像 T において, $a > a_c(v)$ では主軸性が成り立つ.

命題 12 の意味を述べる. $a_c(p/q) < a_c(v)$ を満たす p/q -BE の場合, a が $a_c(v)$ を越すまで主軸性が成り立つかどうかわからない. しかし, a が $a_c(v)$ を越せば主軸性が成立するようになる. $a_c(p/q) > a_c(v)$ を満たす p/q -BE の場合, 生じた直後から主軸性が成り立つ.

5. 終わりに

最初に本論文で得られた結果をまとめる.

- (1) ホモクリニック点に集積する周期軌道の安定性をもとに非横断的交差が生じる臨界値の定義を与えた. これをもとに臨界値を決定した. ホモクリニック点の性質が周期軌道の性質を利用して調べられるようになった.
- (2) 非横断的交差が生じる前後において, ホモクリニック点に集積している周期軌道の性質が突然変化する原因を明らかにした.
- (3) 横断的交差をタイプ 1 交差とタイプ 2 交差に分けた. 双曲領域を利用して, 交差のタイプの違いで横断的交差点の近傍に存在する軌道点の性質の違いを示した.
- (4) タイプ 1 交差はスメールの馬蹄が出現するための必要条件であることを示した.
- (5) タイプ 1 交差ならば主軸性が成り立つことを示した.

次に今後の課題を提示して本論文を終える.

- (1) 本論文では双曲領域を構成し双曲領域を利用したカオス層の厚みを提唱した. カオス層の厚みのパラメータ依存性を調べる問題が残っている.
- (2) 双曲領域 $Z_{p/q}$ ($p \geq 2$) の性質を調べること. 回転数の異なる二つの双曲領域の関係性を調べることも重要である. 例として, 双曲領域 $Z_{1/3}$ と双曲領域 $Z_{2/7}$ の包含関係とか出現順序関係を調べること.

- (3) 写像 T で、カオスの強さの指標である位相的エントロピーのパラメータ依存性を調べる．特に交差の入れ替わり区間で、位相的エントロピーが変化するのかわかに興味がある．
- (4) 定理11の逆である主軸性からタイプ1交差を導くための必要条件は何かを明らかにすること．
- (5) タイプ1交差とタイプ2交差の入れ替わりが C^1 級写像の特殊性によるものなのかどうかを解決する必要がある．

本論文に有益なコメントをしてくださった査読者に感謝いたします．

A スメールの馬蹄の存在証明

写像 T においてスメールの馬蹄が存在することを証明する．最初に線形解析を利用してサドル型不動点 P における不安定多様体の傾き $\xi_u(0)$ を求める．

$$\xi_u(0) = (-a + \sqrt{a^2 + 4a})/2. \quad (25)$$

任意の $a > 0$ において、 $\xi_u(0) < 1$ が成り立つことは簡単に確かめられる．

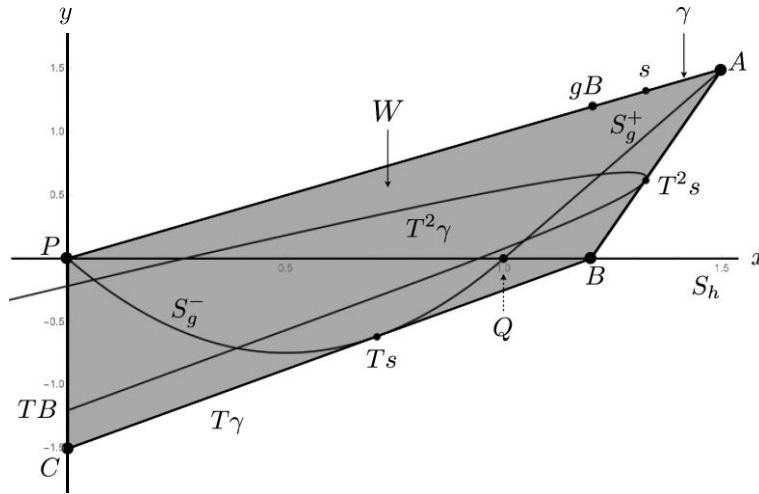


図 18：領域 W （灰色閉領域）の構成．弧 $\gamma = [gB, A]$ ．馬蹄形が生じた状況．

直線 $y = x$ と S_g^+ との交差点を $A = (a/(a-2), a/(a-2))$ とする．弧 $(P, A]$ を g で写した像と x 軸との交差点を $B = (a/(a-1), 0)$ とする．ここで弧 γ を $\gamma = [gB, A]$ と定義する．弧 $[A, B] = g\gamma$ である．弧 $[A, B]$ に h を写像した像が弧 $[B, C]$ である．弧 $[B, C] = hg\gamma = T\gamma$ である（ $C = (0, -a/(a-2)) = TA$ ）．また $TB = (0, -a/(a-1))$ である．ここで四つの弧の表式をまとめておく（図 18 を参照のこと）．

$$\text{弧}[P, A] : y = x, \quad 0 \leq x \leq \frac{a}{a-2}, \quad (26)$$

$$\text{弧}[A, B] : y = (a-1)x - a, \quad \frac{a}{a-1} \leq x \leq \frac{a}{a-2}, \quad (27)$$

$$\text{弧}[B, C] : y = \frac{(a-1)x - a}{a-2}, \quad 0 \leq x \leq \frac{a}{a-1}, \quad (28)$$

$$\text{弧}[C, P] : x = 0, \quad -\frac{a}{a-2} \leq y \leq 0. \quad (29)$$

ここで用意した四つの弧 $[P, A]$, 弧 $[A, B]$, 弧 $[B, C]$, 弧 $[C, P]$ で囲まれた閉領域を領域 W (図 18 の灰色閉領域) と定義する. 図 1(a) と (b) において, 四つの弧 $[P, u]_{W_u(P)}$, 弧 $[u, v]_{W_s(P)}$, 弧 $[v, Tu]_{W_u(P)}$, 弧 $[Tu, P]_{W_s(P)}$ で囲まれた灰色閉領域は基本領域 Z と呼ばれる.

$\xi_u(0) < 1$ であるから, 不安定多様体の弧 $[P, u]$ は弧 $[P, A]$ の下側にある. 残りの弧の構成の仕方から, 弧 $[u, v]_{W_s(P)}$ は弧 $[A, B]$ の左側にあり, 弧 $[v, Tu]_{W_u(P)}$ は弧 $[B, C]$ の上側にあり, 弧 $[Tu, P]_{W_s(P)}$ は弧 $[C, P]$ の右側にある. 基本領域 Z は領域 W に含まれる. サドル型不動点 P は基本領域 Z と領域 W において共通である. 領域 W をもとに馬蹄形が構成できるならば, 基本領域 Z をもとにしたスメールの馬蹄が完成していることは既に示されている [1].

さて, 像 $T^2\gamma$ が弧 $[A, B]$ と接触または交差すれば馬蹄形が構成できる. 図 18 は接触状況である. 点 $s = (t, t) \in \gamma$ の像 T^2s が弧 $[A, B]$ 上にあれば, 上記の条件は満たされる. この条件をもとに t を決める方程式が得られる.

$$a(a-2)^2t^2 + (-2a^3 + 5a^2 - 2)t + a(a-2)(a+1) = 0. \quad (30)$$

二次方程式の判別式 D が, $D = 0$ を満たすと $T^2\gamma$ が弧 $[A, B]$ と接触する. また $D > 0$ ならば, $T^2\gamma$ と弧 $[A, B]$ は 2 点で交差する.

$$D = a^4 - 8a^3 + 12a^2 + 4 \geq 0. \quad (31)$$

この式を数値計算で解いて, $a \geq a_c^* = 5.971759$ が得られる. パラメータが十分大きくなると写像 T においてスメールの馬蹄が存在することが示された.

補足. 弧 $[P, A]$ と弧 $[A, B]$ の交差の仕方について注意を与える. 弧 $[P, A]$ の点 A での傾き 1 は, 対称線の傾き $a_c^*/2$ より小さく, 弧 $[A, B]$ の傾き $(a_c^* - 1)$ は $a_c^*/2$ より大きい. また, 点 B での弧 $[A, B]$ の傾き $(a_c^* - 1)$ は 2 より大きい. 以上をまとめると領域 W はタイプ 1 交差の条件を満たしている. これはスメールの馬蹄が生じるためにはタイプ 1 交差が必要であることを意味している. パラメータが小さい場合, タイプ 2 交差が生じていたとしても, パラメータを増加すると必ずタイプ 1 交差になり, 最終的にスメールの馬蹄が生じる. 以上で命題 6 が導かれた.

参考文献

- [1] 山口喜博, 谷川清隆, *馬蹄への道* (共立出版, 2016).
- [2] Smale, S., Differentiable dynamical systems, Bull. Amer. Math. Soc. 73 (1967), 747-817.
- [3] Lozi, R., Un attracteur étrange du type attracteur de Hénon, J. Physique (Paris), **39** (Coll. C5) (1978), 9-10.
- [4] Elhadj, Z., *Lozi mappings: Theory and applications* (CRC Press, 2014).

- [5] Grebogi, C., Robert, C. and Aziz-Alaoui, M. A., Dynamics of an Henon-Lozi type map, *Chaos, Solitons & Fractals*, 12 (2001), 2323-2341.
- [6] Poincaré, H., ポアンカレ 常微分方程式 (共立出版, 1994). 第 33 章 二重漸近解.
- [7] Guckenheimer, J. and Holmes, P., *Nonlinear oscillations, dynamical systems, and bifurcations of vector fields*, (Springer, 1983). § 5.3.
- [8] 金英子, ポアンカレと力学系, 数理科学, 特集:ポアンカレ 第 46 巻 第 10 号 (2008). 20-30.
- [9] ロビンソン, C., 力学系 (シュプリンガー・フェアラーク東京, 2001). § 8.4.2.
- [10] Newhouse, S. E., The abundance of wild hyperbolic sets and nonsmooth stable sets for diffeomorphisms, *Publ. Math. I.H.E.S.* 50 (1979), 101-151.
- [11] Kiriki, S. and Soma, T., Existence of generic cubic homoclinic tangencies for Hénon maps *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 33 (2013), 1029-1051.
- [12] Yamaguchi, Y. and Tanikawa, K., Dominant axis theorem and the area preserving Lozi map, *FORMA* 32 (2017), 7-17.
- [13] Lichtenberg, A. J. and Lieberman, M. A., *Regular and stochastic motion*, (Springer, 1983).
- [14] MacKay, R. S., *Renormalisation in Area-Preserving Maps*, (World Scientific, 1993).
- [15] Greene, J. M., A method for determining a stochastic transition. *J. Math. Phys.* 20 (1979), 1183-1201.
- [16] 根岸利一郎, ひまわりの黄金比, (日本評論社, 2016).
- [17] MacKay, R. S. and Meiss, J. D., Linear stability of periodic orbits in Lagrangian systems. *Phys. Lett. A*, 98 (1983), 92-94.
- [18] Dullin, H. R., Meiss, J. D. and Sterling, D., Symbolic Codes for Rotational Orbits. *SIAM J. Appl. Dyn. Sys.* 4 (2005), 515-562.

色々な情報から予想するジュラ紀アンモナイト *Pseudoneuquenicerias yokoyamai* の全体像

白井 総真

新潟明訓高等学校 3年 新潟市江南区北山1037番地

kensonosiro03160814@yahoo.co.jp

Complete form of the Middle Jurassic ammonite
Pseudoneuquenicerias yokoyamai
inferred from various information

Soma SHIRAI

Niigata Meikun High School, Niigata, 950-0116, Japan

(2018年6月3日受付)

Keywords: ammonite, *Pseudoneuquenicerias yokoyamai*, ribs, reconstruction

1. はじめに

2013年の夏、僕は福井県産の中生代ジュラ紀に生息していたアンモナイト（*Pseudoneuquenicerias yokoyamai*）をクリーニングした。クリーニングとは、化石の入っている岩石からハンマーやタガネ（図1）を使い化石を発掘する作業のことである。クリーニングをしても、生きていた時のような完璧な状態ではでてこなかった。そこで、「自分で欠けているところを復元することはできないだろうか」と思い、研究を始めるに至った。

アンモナイトは、現在すでに絶滅している生物である。外見は、巻貝のように見えるが、実際は、タコやイカと同じ“頭足類”に分類されている。また、アンモナイトの殻の表面に 肋（ろく）と呼ばれる線状の突起がある（図2）。今回の研究では、特に肋に着目している。研究は主につぎのような順序で行った。

- (1) 標本をよく観察する。
- (2) スケッチをする。
- (3) 3つの研究を行う（後述）。
- (4) 研究をまとめる。

スケッチを行う意味は、ただ写真を撮るだけでは分からない細部の情報をスケッチすることによって読み取るためである。



図1 クリーニングに使う道具



図2 肋がくっきりと見える標本（図3のc）：【長径4.8cm】

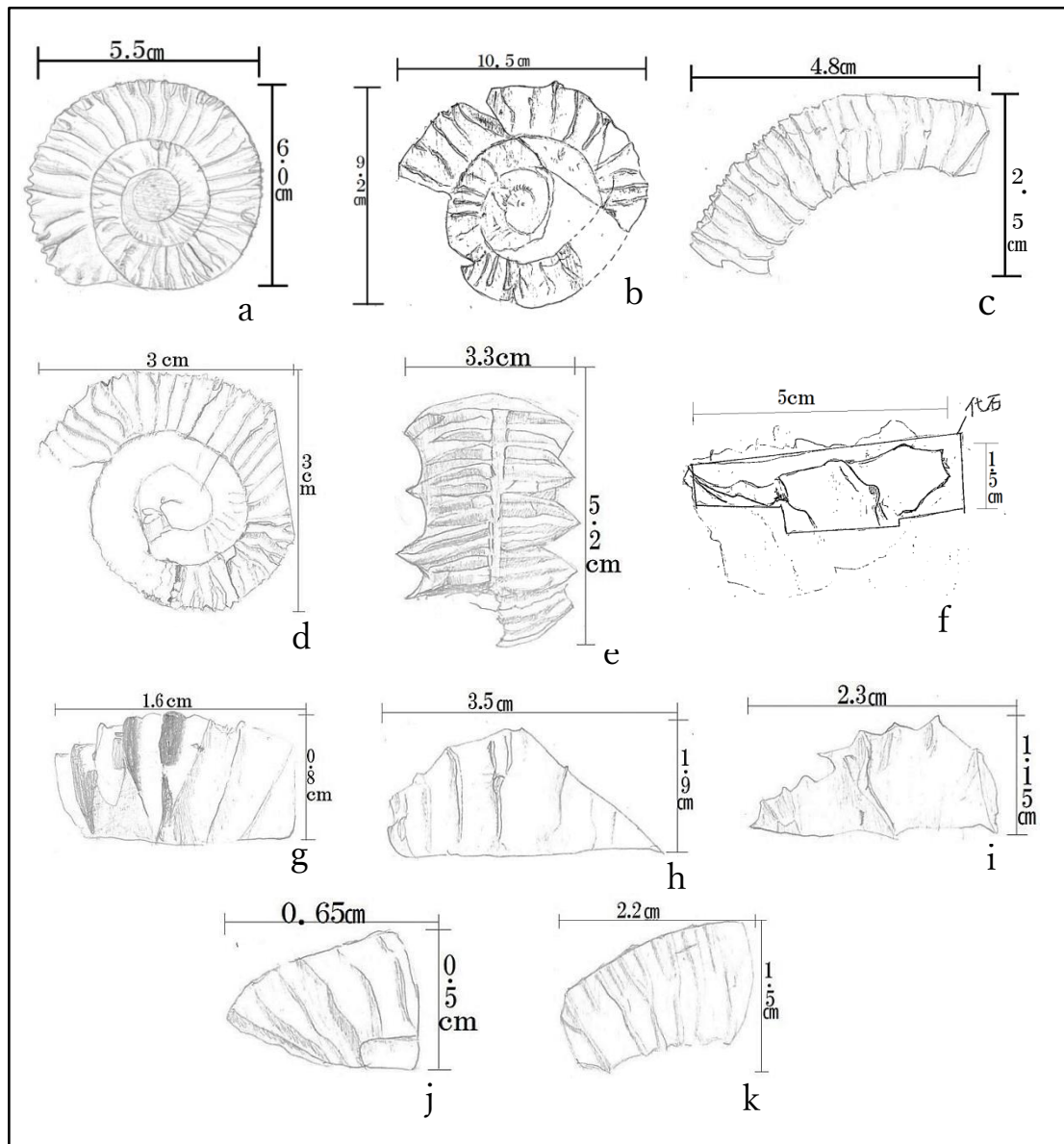


図3 研究を始めるにあたってスケッチした11個体

2. 3つの研究

今回は主に3つの研究を行なった。まず、肋の種類と数について検討した(2.1)。次に肋の配列について調べた(2.2)。最後にアンモナイトの殻を立体的に復元するのに必要な材料は何かを調べた(2.3)。

2.1. 肋の種類と数について

(1)疑問点

Pseudoneuquenicer as yokoyamai の殻にはどのような種類の肋があるのか。また、どのような共通点や相違点があるのか。

(2)方法

- ① 保存状態の良い3つの標本（図3の a,b,c）を使い、肋の種類には何があるかを観察し、スケッチした。
- ② その種類の肋が何本あったかを記録する。
- ③ 観察した肋の種類と数を表にする。
- ④ 3個体とその表から、共通点と相違点を考えまとめる。

(3)結果

肋の種類と数を調べたところ、肋には主肋・分岐肋・挿入肋があることがわかった（図4）。3個体の肋を調べた結果、主肋30本、分岐肋45本、挿入肋42本の計3種類117本の肋が観察された。このうち分岐肋には、2分岐しているものと3分岐しているものがある。それらをさらに区分した結果、12種類に細分化できた（図5）。そして、図3の a,b,c の個体を使い、図5に示す表を作った。3個体を比較することにより以下に示す共通点・相違点を発見できた。

共通点

- すべての個体に主肋・分岐肋・挿入肋が見られる。
- それぞれの個体の中では主肋が一番多い。
- 分岐肋には、2つに分岐しているものと3つに分岐しているものがある。2つに分岐しているものはすべての個体に見られる。
- 分岐肋の分岐点が一番鋭く（高く）なっている。

相違点

- 3つに分岐している肋がある個体と無い個体がある。
- この種の中で、肋の間隔が狭い個体と広い個体が見られる。
- ほぼまっすぐな主肋だけを持つ個体と、S字形の主肋を含む個体がある。

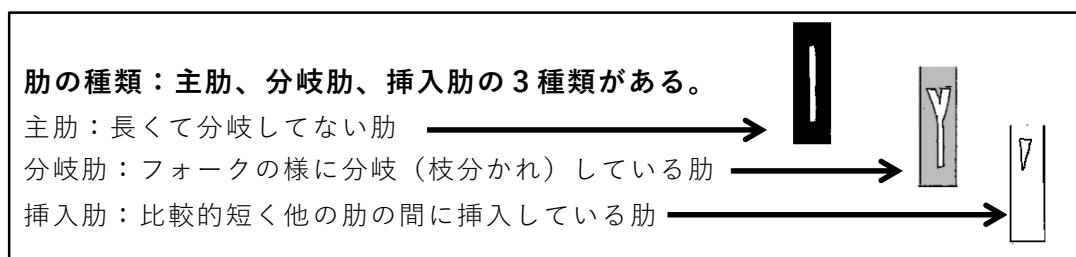


図4 肋の種類についての説明

11	5	1	7	4	1	8	2	1	10	9	7
											
											

図5 個体 a (図3 の a) の肋の種類と数を示した表

2.2. 肋の配列について

(1)疑問点

この種の肋には配列上、どのような規則があるのだろうか。

(2)方法

- ① 研究 2-1 でも使った 3 つの個体のスケッチを使い、3 個体の肋の配列を殻と同じようにそのまま書き写す。
- ② 3 個体のそのまま書き写した肋の配列を表にする。
- ③ ②の表を配列が分かりやすくするために黒・灰色・白の 3 色に配色する。
- ④ 3 個体とその表から規則的な特徴を書き出し、まとめる。

(3)結果

個体ごとの特徴と表は図 6 のようになった。

(4)これらの特徴（表）をまとめ、次のような共通点を発見した。

- 主肋は、殻口側に近づくほど増加し、一方、分岐肋は減少する。
- 分岐肋は、連続して出現する傾向がある。
- 挿入肋は同間隔で出現する傾向がある。

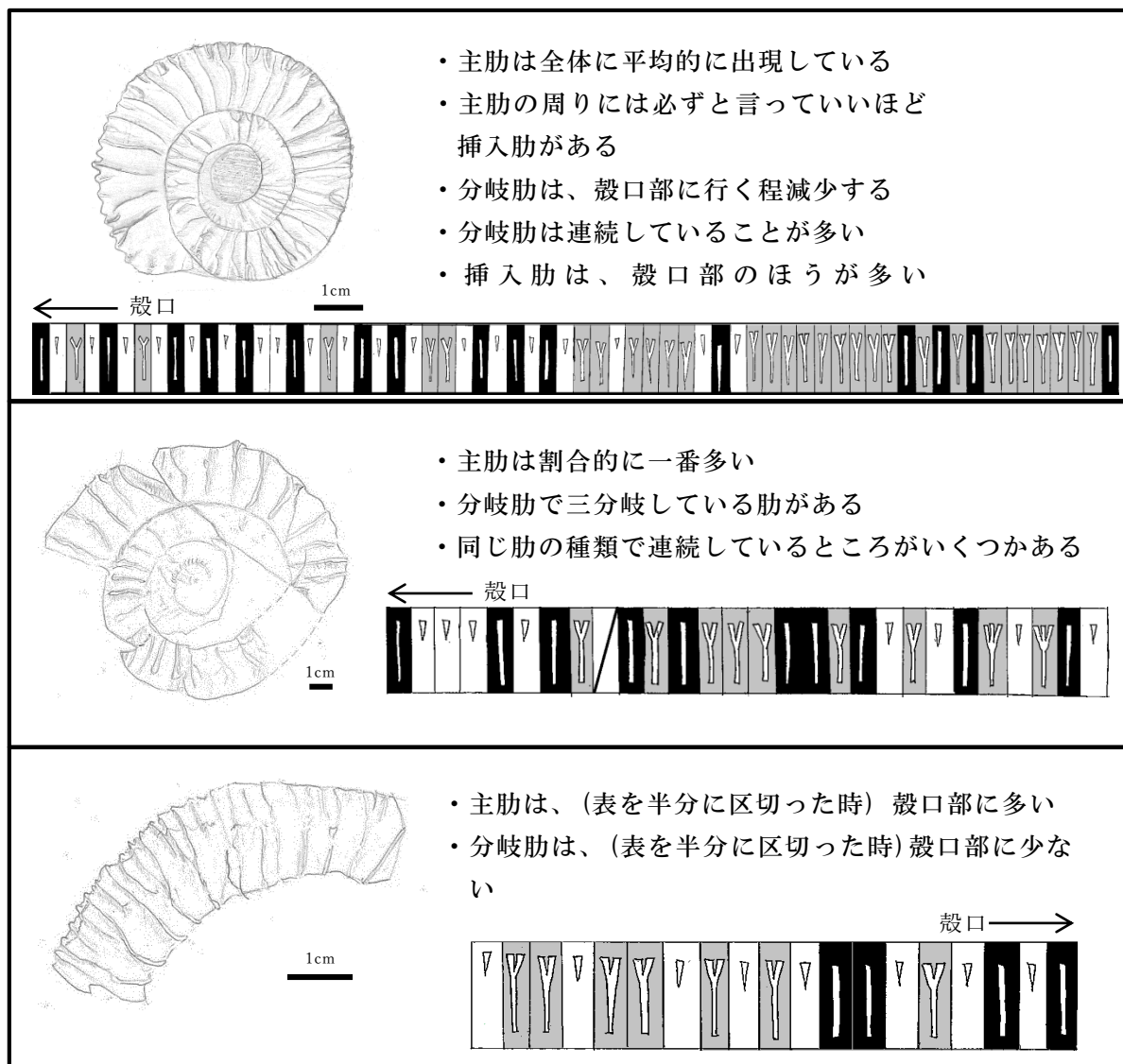


図 6 各標本の肋の配列パターン

2.3. 殻の立体的な復元について

アンモナイトといえばどのようなイメージがあるだろうか。多くの人は、ホースを巻いたような形を思い浮かべるだろう。では、どうしてその様な立体的なアンモナイトを 2-3 では「立体的な復元」をしたかったのかをご説明したいと思う。それは、クリーニングをしていてほとんどの化石が潰れて産出したからである。その原因は、化石が入っていた石の種類にあった。

砂岩に入っていた化石は立体的のまま潰れることなく出てくる。だが、泥岩に入っていた化石の多くは、潰れた状態で出てくる。砂岩は砂の粒子でできているので粒と粒の間に狭くガチガチに固まっている状態なので化石も固定されていてそのまま産出する。逆に、泥岩の粒子は、泥でできているので粒と粒の間に砂岩よりも隙間があり、そこに水が入っている。そして、長い年月をかけて上からの圧力で水が抜けてしまい、隙間がなくなり化石ごと潰れてしまうのである。そこで、2-3 では砂岩から出てきた、潰れていない個体を使い、立体的な復元を試みる。図 7 にアンモナイトの部位の呼び方を示しておく。

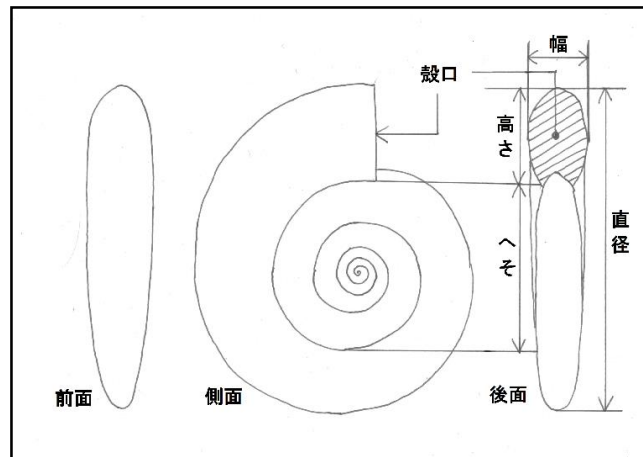


図7 アンモナイトの部位の呼び方

(1)疑問点

複数の情報を合わせることによって立体的な復元はできるだろうか。

(2)方法

- ①図8と図9をよく観察する。
- ②どのような特徴があるかを書き出す。
- ③書き出した特徴が立体に復元する際に、どこに使えるかを考え、まとめる。

(3)結果

スケッチする際に、個体の前後を復元するとき殻のもう半分側をどのようにすればよいのか。これを解決するにあたり、あまり発想が浮かばず悩んだ。結果的に殻の側面が見えている標本により肋が左右対称に配列していることに気付いた(図8)。発掘されるとき化石は全体的に潰れていて実際の(生きていた時の)殻の幅(厚み)が分からない。殻の直径と幅の比率をどのように求めればよいのか。砂岩から採れたという珍しい標本(図9)により殻の直径と幅の比率が(8:1)と計測できた。この比率を使って、*Pseudoneuquenicer* *yokoyamai* が潰れる前の形を復元することができた。



図8 殻の下側が見えているごく珍しい標本
(図3-e):【幅:3.3cm】



図9 砂岩から産出したため、殻が潰れていない珍しい標本:【直径15.7cm】

3. *Pseudoneuquenicer* *yokoyamai* を復元する

まず 2.1~2.3 までの要点（結果）をまとめ、アンモナイトの殻のどこを復元するのに役立つかを考えてみた。

- 2.1 は、殻を側面から見たときの肋の種類・間隔など。
- 2.2 は、殻を側面から見たときの肋の配列の傾向（パターン）。
- 2.3 は、殻を下側・少し斜めから見たときの肋の配列の対称性。そして、全体のフォルム。

これらの情報をまとめると、殻を側面から見たとき・個体の前後から見たとき・少し斜めから見たときすべての情報がそろっている。従って、肋の種類・間隔、配列傾向、そして、殻の直径と幅の比率についての検討結果をもとに図 10 のような復元ができた。

4. 感想と展望

今回、アンモナイトの研究を始めてからこれまでの成果を本稿にまとめた。終わってから考えてみると研究をするための作業や活動はとても楽しいものだったが、一つの研究報告にまとめるとなると凄く大変だった。特に、誰からも理解してもらえる文章を作らなければいけないことに苦労した。

研究の内容としては、研究の途中で「復元まで辿り着けるのか」が心配になったが、オリジナルの表や特徴的な化石を使うことで3つの研究をまとめることができ「1つの復元」という大きな結果を出せてよかった。

今後は研究中に気になった「化石の多くが断片的にしか出てこない」ことや、肋を研究しているが、「肋の形態がアンモナイトの生息上どのような役割を持っているのか」といったことを研究してみたい。

なお、本稿は 2013 年 7 月から 2015 年 6 月にかけて実施した研究をまとめ、それを 2015 年 8 月に投稿したものである。

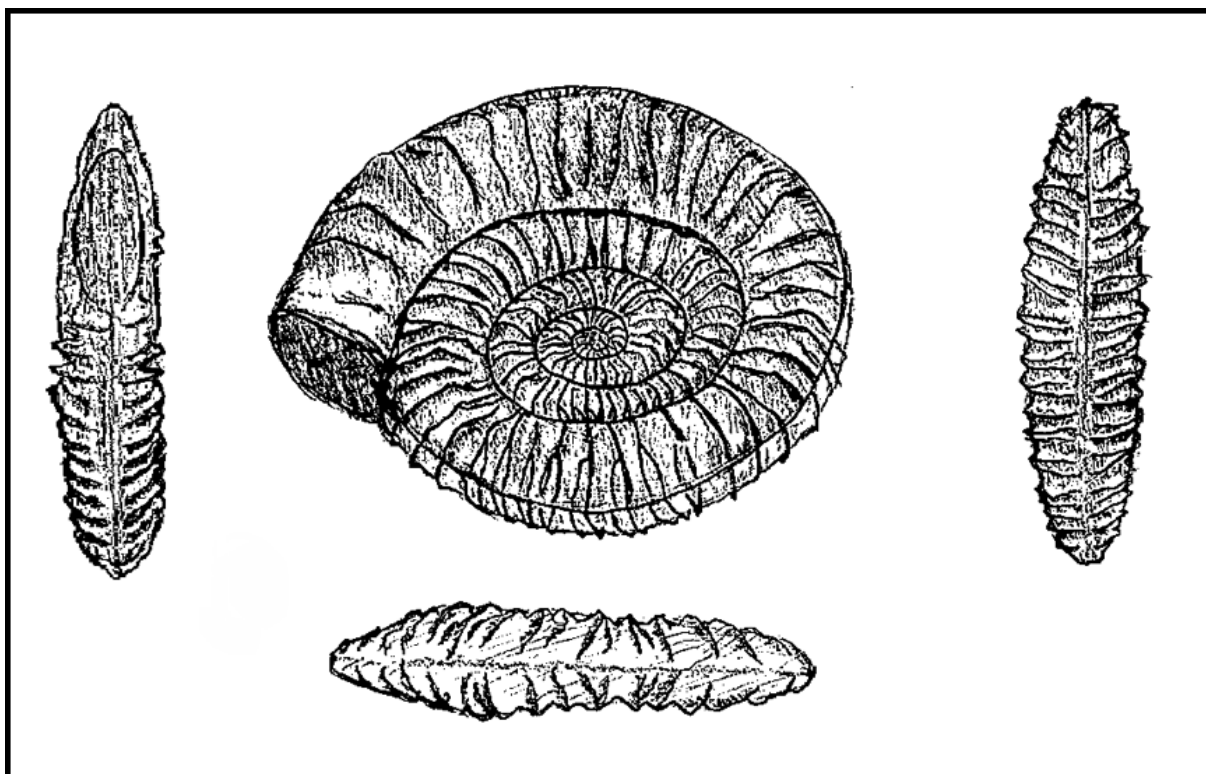


図 10 *Pseudoneuquenicerias yokoyamai* の復元図

謝辞

小学生の頃から松岡篤先生の研究室に通い、多くのご指導をいただきました。また、2014年5月には、研究対象である *Pseudoneuquenicerias yokoyamai* の産地である福井県への発掘調査に同行させていただき、有意義な体験をさせていただきました。

本稿を書くにあたって、松岡篤先生に何度も原稿を見ていただきました。投稿する際には、匿名の査読者からありがたいご指摘をいただきました。

数々のご配慮に心から感謝いたします。

参考文献

- 1) 重田康成 (2001) アンモナイト学 絶滅生物の知・形・美. 東海大学出版会、155p.
- 2) 松岡篤 編集 (2008) 頭足類展 アンモナイトとその仲間たち. 新潟大学理学部地質学科、15p.
- 3) 子供の科学編集部 (2012) アンモナイトと三葉虫. 城文堂新光社、95p.

第84回 形の科学シンポジウム 「ビッグデータとかたち」

討論記録（録音記録のあるもののみ掲載）

【主催】形の科学会 【共催】長崎大学
 【会期】2017年12月8日（金）、9日（土）、10日（日）
 【会場】長崎大学 文教キャンパス スカイホール
 【代表世話人】小川進 〒852-8521 長崎県長崎市文教町 1-14 長崎大学 工学部
 TEL：095-819-2611 E-mail: ogawasusumu@nagasaki-u.ac.jp
 【参加費】 会員・非会員ともに一般 5,000 円、学生 1,000 円
 【懇親会】 2017年12月9日（土）17：45 より、上海台所住吉店にて
 【懇親会費】 一般 3,000 円、学生 1,000 円
 【WEB サイト】 <http://katachi-jp.com/sympo84>（予稿集最新版をカラーで閲覧可能）

討論記録は質問者の討論記録シートの記載にもとづいており、講演者の校正がないものもあります。

Q: 質問、A: 回答、C: コメント

討論記録

12月8日（金）

形の科学一般
 幾何学キルトデザインの提案
 中村健蔵（MathArt 作家）

Q. 高木隆司

キルトが作られるようになったきっかけは何ですか。

A.

昔は布が高価であったため、切れ端を寄せ合わせてもったいなくないようにしようといったことからです。また、縫うことで生地を強くすることもできるので、そちらの効果もあったのかも知れません。

C. 高木隆司

江戸小物のように丸いものでもタイリングできるような気がしました。

Q1. 小川直久

世界でキルトの歴史はどのくらい続いているのですか。

A1.

一番古いのではエジプトの話からと聞いています。

Q2.

切れ端を繋ぐ際に、間に薄く綿を入れるのは昔からなのですか。

A2.

昔からではないようです。綿を入れれば一番簡単に立体的になります。ある程度厚めの布であればそれでも立体的なものが出ます。ホワイトキルトといって、厚めの布地に縫うことだけで立体的にしたものを見たことがあります。

水平加振における粉体のマクスウェルの悪魔

江川恭平（京都大学大学院）、宮崎修次（京都大学大学院）

Q1. 手嶋吉法

鉛直加振で偏るポイントは何らの原因で少なくなった方の球が周りからたくさんエネルギーをもらうから仕切りを飛び越えやすくなるということでしょうか。

A1.

エネルギーをたくさんもらいというよりは、移った方は平均自由行程が減ってしまうからというのが大きな原因だと考えられます。

Q2.

平均自由行程というのがあまりピンと来ないのですが。

A2.

平均自由行程というよりは球が少なくなった方が粒子が他の粒子とぶつかりにくくなり、動きやすくなるのが原因ではないかと考えられます。

Q3.

鉛直の場合は飛び越えないと移れないというポテンシャルのようなものがありますが、水平の場合はそれに相当するもの

はありますか。

A3.

摩擦がない場合だと難しいですが、摩擦を掛けてあげれば衝撃というものに使えると思います。

Q4.

水平において真ん中の部分を単に穴ではなく坂などにするといいのではと思いました。

A4.

その場合ですと、垂直加振の場合と変わらないので、動ける距離だけが重要な要因ではないかと調べたいときには単に穴にした方がいいと思いました。

Q5.

水平加振の場合も平面に拘束されているのですか。

A5.

そうです。

Q. 根岸利一郎

壁を越えるためのエネルギーはどうなるのですか。

A.

下から受ける力です。

Q. 高木隆司

壁を高さごとの計算はしましたか。

A.

高さは一例しかやっておりますが、水平における穴の大きさごとの計算はしております。

Q. 小川直久

密度の大きい場合は入ってしまうと出にくくなるが衝突が多いから、大体みんな平均的なエネルギーになるということでしょうか。

A.

はい、その通りです。

文章のネットワーク可視化と複雑ネットワーク解析

角谷祐輝（京都大学）、宮崎修次（京都大学）

Q1. 高木隆司

単語を楕円の上に並べる順序には一定の方式があるのですか。

A1.

アルゴリズムが単語(頂点)ごとに ID を割り振っており、それをもとに位置を決定しています。そこから、配置しております。

Q2.

出現の順序ではなく、単語に与えた特徴から並べているのですか。

A2.

そのアルゴリズム自体が近い単語を近いところに配置するようになっています。

Q3.

同じ単語は二度と現れないのですか。

A3.

その通りです。

Q1. 小川直久

今言ってたアルゴリズムが座標を入れるということなのでしょうか。

A1.
そうです。

Q2.
最終的な座標の入れ方のチェックはされているのですか。

A2.
実際に数値で出したわけではないです。

Q. 手嶋吉法
「点が近い」というのは2点が何本も結ばれていることを言っているのですか。

A.
それもありますし、1つ2つで隣り合っているものも近いと言っています。

同一意見を持つ人の割合が振動する合意形成ネットワーク数理モデルの作成

長尾崇弘（京都大学大学院）、宮崎修次（京都大学大学院）

Q. 松本崧生
人間の意見ではAでもBでもない第三の意見が現れるのが多いと思いますが、その場合はどうするのでしょうか。

A.
新しい意見が出現し、それが多数派になるというのは過去にモデル作成したことがあります。まだそれを導入するには至っていませんが、第三の意見が出るというのは参考にしていきたいと思います。

Q1. 中村健蔵
少数派と多数派で、大きい粒子と小さい粒子ではどちらに主張の信念があるのでしょうか。

A1.
大きい粒子が主張の強い少数派です。

Q2.
モデル化というのは非常に難しいと思いますが。

A2.
そうですね。

定幅曲線

山口陸幸、伊藤 仁一（相山女学園大学）

C. 高木隆司
質問ではなくコメントですが、最後に示された角を丸くした三角形は役に立つと思います。とがったところはすり減りやすいので、丸くすると長持ちすると思います。

A.
外側を丸くするために、定幅曲線を使えば面積を小さくできます。そういう風に使えば、定幅曲線は面白いと思います。実際に三次元で造って並べてみたので、よかったら確認してみてください。

Q. 宮本潔
マツダが作ったロータリーエンジンは定幅曲線でしょうか。

A.
膨らんだ三角形のローターはリューローの三角形と言われているのを聞いたことがあります。実際、似ているのですが、そうではないようです。色々調べてみたのですが、リューローの三角形である理論的根拠も探せませんでしたし、その必要性も見出せませんでした。

立体概念の形成を支援する科学折り紙教材 I. 教養科目「数理科学」での取り組み

石原正三（埼玉県立大学）

Q1. 阿竹克人
三角形のユニットのことにについてですが、角は三角形に切るのですか。

A1.
切るのではなく折るのです。

Q2.
折りあがりは平面になるのですか。

A2.

三角形のユニット折り紙になります。

ホモメトリック構造

松本崧生（金沢大学名誉教授）

Q.（質問者名不明）
ホモメトリック構造は実験などで確かめることはできるのでしょうか。

A.
間違った結果を報告すると非常に怖いので、そこは注意が必要です。ホモメトリック構造は、誤った解析、解決できず没になったものの、フリーデル則や絶対構造、回折対称の上昇現象らにも関連します。X線構造解析のみだけでなく、他の物理、化学解析、形態の研究も重要です。

楕円的最密格子充填と楕円体の密な格子充填について

種村正美（統計数理研究所名誉教授）、松本崧生（金沢大学名誉教授）

Q1. 阿竹克人
楕円体の計算において軸の部分でbを1以上としていましたが、1以下でも同じですか。

A1.
同じです。a=c=1の部分も変えても同じです。

Q2.
今の設定ですと、断面が円になりますが、そのあたりはチェックされてますか。

A2.
それは a=c=1 の場合に当たりますが、その場合もそれ以外の場合も密度は同じです。

Q. 宮本潔
楕円体の三軸を回転させたりすると、もっと曲がったりすると思うのですが。

A.
今回の計算は一つの例で、今後はもっといろいろと変えていく必要があります。

12月9日（土）

ビッグデータとかたち

ドローンとかたち

谷口幸弥（長崎大学）、春成寿朗（長崎大学）、小川進（長崎大学）

Q. 高木隆司
結果の写真は画像処理したのですか。

A.
一定の間隔で空撮した画像を全部つなげて作成しました。

Q. 中村健蔵
原発のIRはドローンを止めて撮影しているのですか。

A.
バッテリーの都合上、動かしながら撮っています。

福島第一原子力発電所事故における放射能汚染の形態の特徴
小川進（長崎大学）、齋藤恵介（長崎大学）

Q1. 手嶋吉法
粒子モデルを使うとフラクタルが出てくるのは地形が入っているということですか。

A1. 地形は乱流拡散でも入れています。

Q2.
フラクタルが連続から離散になった時には何が入っているのですか。

A2.
乱流拡散でホットスポット上に広がっていく部分が表現できないためです。

今昔物語の構造解析 — イソップ物語との比較

高木隆司（東京農工大学名誉教授）

Q1. 小川進

人口知能が人間を超えるかというのは人間によりけりだと思います。人間にも知能の個人差がありますが、それを無視していないのでしょうか。

A1.

発表で述べたことの趣旨は、知能の高い人たちが集まって新しいものを作り上げたときのことなので「現在の人間が持っている知能を超えることはできない」ということです。

Q2.

ほとんどの人が将棋や囲碁を指せば負ける時代が来ていると思うのですが。

A2.

人間は、スピードも記憶容量もコンピュータに負けるので、将棋や囲碁で負けるのは当然です。ここで問題にしているのは、人間が見たこともないような新しいものやシステムを人工知能に作れるのかということです。

形の科学一般

文字の許容と字形の変化 横画の空間の空け方について

杓名健一郎（福井大学）

Q. 高木隆司

右側を下げるとだらしなく見えるのですが、どう思いますか。

A.

隷書は水平垂直なのですが隷書から行書、楷書になるときに右に重心を残すような形で楷書が出来ましたので、そのような背景だと考えられます。

Q.（質問者名不明）

書道の場合の許容誤差はどのようなものですか。また、冊子にある「青」という文字は書いた人はいつもこの書き方をしていたのでしょうか。それとも、当時流行ったのでしょうか。

A.

書いた人が偶然作った形だと思います。作っているうちに出る誤差を収縮させるテクニックは、職人が持っている、こういうものだったのではないかと思います。

非格子シェリングモデルにおけるパターン形成

吉野隆（東洋大）

招待講演・公開講演（ビッグデータとかたち）

ビッグデータの現状と将来

秋山祐樹（東京大学）

Q. 谷口幸弥

海域でのビックデータの活用事例には、具体的には、どのようなものがありますか。

A.

AIS が出てきているので、船の動きなどが分かります。しかし、まだ無駄が多いのでその辺をうまくコントロールする必要がありますと思います。

形の科学一般

いちじくの渡来と伝播そして文化的受容

杉本剛（神奈川大学）

Q. 中村健蔵

カリフォルニアやエジプトにあるイチジクの木が日本にある物と全く違うほど大きかったのですが日本に持ってこられたイチジクはどのようなタイプなのですか。

A.

持ってきたのはフィクス・カリカなので、温かいところで育てればちゃんと育ちます。

Q. 宮本潔

イヌビワは中身がイチジクのようにですが、イチジクの前種ですか。

A.

イチジクの仲間ですが、食べてもおいしくありません。

核酸の過渡的構造と機能：不安定ゆえの意義？

西垣功一（埼玉大学大学院）、マニッシュ・ピアノ（北陸先端科学技術大学院大学）

生体の凍結抑制機構と氷結晶の形

古川義純（北海道大学）、長嶋剣（北海道大学）、中坪俊一（宇宙航空研究開発機構）、田丸春香（宇宙航空研究開発機構）、吉崎泉（宇宙航空研究開発機構）、島岡太郎（日本宇宙フォーラム）、曾根武彦（有人宇宙システム株式会社）

Q1. 高木隆司

結晶の成長が止まって一定のサイズになるのはなぜですか。

A1.

温度が冷えて、一斉に結晶ができると成長が始まり、全体がある大きさになった時に初めて十二面体が出来るということです。

Q2.

一定のサイズのところでエネルギーが最低になるというのは、どういうことですか。

A2.

核生成とは異なりますので、エネルギーが最低になるということではありません。結晶の外形が成長速度の最も遅い結晶面で囲まれた時に成長が停止します。平衡論ではなく、非平衡な成長カイネティクスの面方位依存性（異方性）の問題です。

三つ折り問題の解決

三浦公亮（東京大学名誉教授）

Q.（質問者名不明）

五つ折りするときにはどうすればよろしいのでしょうか。

A.

二つ折りから三つ折りに変化させる考え方を延長すればいいと思います。

Q1. 松浦昭洋

五つとか六つ折りは一つ前の作業から再帰的で順次にするということですか。

A1.

そうです。分解していった三つ折りにしていくのです。

Q2.

百折りとかでは、最短で折る方法がありますか。

A2.

3 という小さい数ゆえに、日常作業で無視されてきた課題の解決が目的です。そのまま大きい数に適用すると、100、50、25 ときて、ここからスタートで、煩雑になります。

一般座標と TDGL 方程式の結晶成長理論への応用

小川直久（北海道科学大学）

Q1. 手嶋吉法

TDGL が使える条件というのはどんな時ですか。TDGL はどんな設定の下で得られたのでしょうか。

A1.

TDGL には保存系や非保存系などいろいろな型がありますが、今回は単純に時間発展において系の自由エネルギー（バルク＋界面自由エネルギー）が下がるようにした一番簡単な式です。

Q2.

粒子の出入りの有無はありますか。

A2.

ギプスの自由エネルギーを考えれば粒子の出入りも考えられます。もちろん、結晶成長を扱っていますので、今の状況はそういう場合です。

Q1. 松浦昭洋

この式が得られているのは厳密解として導出できるということでしょうか。

A1.

これは TDGL を解いたのではなく、TDGL に具体的に曲線座標を用いて書いたフリーエナジーの形を入れたらこの式に

なるということです。

Q2.

曲面の変化による挙動とかのシミュレーションとかはしていないのでしょうか。

A2.

シミュレーションはしていませんが、この式からギブストムソンや界面過冷却の効果もこれに入っていることを示しました。多くの方は Phase Field Model を使ったシミュレーションを行っていますが、この TDGL は、Phase Field Model で境界層の厚みを 0 に取った極限で得られるものと同じで、そこに界面過冷却の効果も、ちゃんと入っていることは驚きです。

12 月 10 日 (日)

形と知

ヒューマノイドとの自動会話の形

松浦執 (東京学芸大学)

Q. 高木隆司

音声が入によって違うので音声信号を見ただけでは判別が難しいと思います。対応や判別ができるように本題を話す前に何か意味のあることを入れておくといいと思います。

A.

話していく前に、トレーニング段階として少ない会話を成り立たせておくのがいいということですね。

Q. 阿竹克人

自動会話の中に子どもに聞かれるとまずい語彙は入れていませんか。

A.

会話の範囲を限定したシステムなので、入れてないです。

回転対称型接合部とその応用例の耐震シェルターについて

阿竹克人 (阿竹研究所)

Q. 高木隆司

マラルディの角を使われたのはどこで、その角度を用いたのはどういうメリットがあるのでしょうか。

A.

立体トラスのアングルの曲げ角度で、等辺の場合正四面体と正八面体の空間充填から必然的になることです。

Q. 中村健蔵

右上の図で、予稿集には基礎側の鉄板なかったのですが、それだと上からの荷重は耐えられるかもしれませんが、水平力に弱いということで入れられたのでしょうか。倒壊した時に、斜めに倒れるということを考慮されているのでしょうか。

A. 200kN くらいの荷重に耐えられるというのは鉛直荷重で、水平力には火打ち梁を入れるなど改良が進んでいます。

形の科学一般

半球面上の棒振り子の物理解析

茂森拓真 (東京電機大学)、松浦昭洋 (東京電機大学)

Q1. 手嶋吉法

棒の長さと半球面の半径についての関係は触れましたか。

A1.

棒の長さが半径に対して極端に短い場合は別として、棒が短く半球内に含まれる場合は同じ動きをします。

Q2.

棒が球面上で回転する動きは初期条件に入れてないのですか。

A2.

今回は、初期条件として棒の角度を定めて静かに放すこととしました。

Q. 中村健蔵

中点の動きは円弧ではないと思うのですがどのような軌跡ですか。

A. 棒の中点は常に円運動を行います。

Q. 高木隆司

実際に実験することはできますか。

A.

できますが、実際の半球を用いると大きな摩擦が発生します。そこで、今回は棒の両端点に糸を通して半球面の中心に結び付け、棒の運動を疑似的に再現する手法を用いました。

第 15 回国際放散虫研究集会 (新潟, 2017) を振り返って

松岡篤 (新潟大学)

Q1. 高木隆司

放散虫を生きたまままで培養している人はいますか。

A1.

海で採取した生きた放散虫を観察する研究は、ずいぶん進みました。生体の写真も最近 20 年あまりの間はかなり蓄積されてきています。

しかし、1 週間を超えるような長期飼育は、ほとんど行われていません。飼育環境で生かしておくのが難しいということもあるのですが、チャレンジする場数が少ないのも要因です。ノウハウがなかなか蓄積していきません。

わたしたちは、チャレンジを続けている世界でも数少ない研究グループです。

Q2.

放散虫の形が特殊なのは、遺伝なのか、環境なのか、進化なのか等の実験をやってみるといいと思います。

A2.

放散虫の形態形成について、興味をもっている研究者は世界中にたくさんいます。また、飼育実験が重要だという指摘も多方面からなされています。しかし、現実には飼育実験に取り組んでいるグループは多くありません。

わたしたちは、毎年、沖縄で生きた放散虫を観察するワークショップを開催しています。興味のある方には参加してもらっているので、ご連絡ください。

ビッグデータとかたち

立体映像視聴時における脳血流量の変化に関する非線形解析

谷村亨 (福井大学大学院)、篠野雄介 (福井大学大学院)、

平田隆幸 (福井大学大学院)、高田宗樹 (福井大学大学院)、

高田真澄 (中部学院大学)

Q1. 小川進

非線形性というのは具体的に何を指しているのですか。

A1.

時系列の変動を満たす数理モデルの非線形性です。

Q2.

カットオフというのは脳波の周波数ですか、それともディテクターの信号のことですか。

A2.

ヘモグロビンの濃度変化の時系列信号に対するノイズ等のカットオフです。

静止立位時における足の筋活動が姿勢制御に及ぼす影響

篠野雄介 (福井大学大学院)、谷村亨 (福井大学大学院)、

平田隆幸 (福井大学大学院)、高田宗樹 (福井大学大学院)、

高田真澄 (中部学院大学)

Q. 高木隆司

被験者の足首から先の条件がどうなっているのかを調べておくのがいいのではと思いますが。

A.

そうですね。今後の研究に役立てたいと思います。

Q. 中村健蔵

筋肉の衰えには前と後ろに差があると思いますが。例えば、ふくらはぎは衰えやすいですが、前方の筋肉はあまり変わらないと思いますが。

A.

その認識であっていると思います。瞬発力を司る筋肉 (ふくらはぎなど) は衰えやすいですが、持久力を司る筋肉は衰えづらいです。

Q1. 手嶋吉法

トーン指数というのは何ですか。

A1.

筋の張力です。

Q2.

相関係数が低く因果律に問題があると思います。どうして多変量解析のような解析を使わないのでしょうか。

A2.

今回は体の姿勢制御仮説に近い動きでやりましたが、実際はいろんな制御がかかわるのでいろんな指標で解析を使うことは今後の参考にしていきたいと思います。

フォーラム

カズオ・イングロの父 石黒鎮雄 —あびき・北海大洪水の研究の先にカオスは見えていたか—

宮崎修次（京都大学）、長尾崇弘（京都大学）

Q. 手嶋吉法

石黒静雄さんの研究の中に非線形が無かったのを残念がられていたと思うのですが、宮崎先生の中では線形というのは面白くないという感じに受けたのですが、そんなことはないですか。

A.

私は非線形の研究者なので、線形が面白いと思ったらしまいですね。一番歯がゆいのは、アナログ計算機を使っているのに、特性は非線形になっているのです。それなのに、線形で見えるところしか見てないということです。線形か非線形かは関係ないのです。

（補足）

石黒静雄氏の単著論文^[1]の Figure 3 のはしご型回路においては、はしごの段に関する差分方程式の連続極限をとった後の話が中心であるが、差分方程式のまま、コンデンサの電気容量の電圧依存性の非線形性をあらわに取り入れると、文献^[2]で扱われたようにソリトンが現れる。

石黒静雄氏が在職した長崎海洋気象台（現 長崎地方気象台）による副振動（あびき）の解説^[3]の中の写真「1988 年（昭和 63 年）3 月 16 日のあびきで、海水が浦上川を遡っている様子」は、エジンバラ郊外の運河で馬にひかれていたボートが急にとまったとき、船首に水の高まりができ、そこから孤立波が生じ、時速 13–14km 程度の速度でほとんど波形を変えずに伝播していくのを偶然目撃したという、J・スコット・ラッセルによる 1834 年の報告を想起させる、海面上の 1 点での海面変動を近似するはしご型回路の 1 段の I V（電流電圧）特性の非線形性を考慮すれば、van der Pol 振動子のような非線形素子となり、交流電圧を印加すれば、カオスが現れる。石黒氏の上記の論文の出版年は上田による「割れた卵」や Japanese attractor など、アナログ計算機と関連させた非自励系カオスの先駆的な研究の時期に重なる。

このように石黒氏が扱った海面変動は非線形現象の宝庫のように思える。

上記の単著論文の第 2 章 Basic Idea では、

A phenomenon to be analyzed is assumed to be a 'response' resulting from an 'excitation' on the 'system'. The system is represented by an electric network, and the excitation and the response are represented by some electrical quantities such as voltage or current.

と述べている。

長崎地方気象台のあびきの解説のところにもあるが、微気圧変動という 'excitation' に対する 'response'（インパルス応答）をアナログ計算機で再現することに拘泥するあまり、非線形性には石黒氏はあまり関心を持たなかったように思える。上記の単著論文の Figure 23 の V-shaped bay は長崎港を想起させるとともに、長崎への思いも感じる。

カズオ・イングロ氏のノーベル文学賞受賞を機に、石黒静雄氏の扱った対象に様々な非線形現象が潜んでいる可能性を指摘するとともに、戦後まもない時期にさまざまな測定装置や実験装置を何でも自作する石黒氏の D I Y 精神が高校生、特に、長崎の高校生の進んだ科学研究のよき教材となることを願っている。

引用文献等：

- [1] “A METHOD OF ANALYSIS FOR LONG-WAVE PHENOMENA IN THE OCEAN, USING ELECTRONIC NETWORK MODELS I. THE EARTH'S ROTATION IGNORED”, the Philosophical Transactions of the Royal Society of London, Series A, Vol.251, pp.303-340, 1950.
- [2] “Studies on Lattice Solitons by Using Electrical Networks”, Ryogo Hirota, Kimio Suzuki, Journal of the Physical Society of Japan, 1970, Vol.28, pp.1366-1367.
- [3] <http://www.jma-net.go.jp/nagasaki-c/kaiyo/knowledge/abiki/index.html>.