

BULLETIN OF THE SOCIETY FOR SCIENCE ON FORM



形の科学会

http://katachi-jp.com/

形の科学会誌 第30巻 第3号 (2015)

目 次

【論文】

スパイダリンケージの運動方程式の導出	
明石望洋	216
編み物,組みひも,そして位相的カオス - 悲しいけれどそこにはカオスは見えない -	
山口喜博······	227
【交流】	
素数の奇妙な振る舞い - 眠られぬ夜のための問題 -	
山口喜博	239
【会告】	
会告	243
形の科学会誌の原稿募集	246
『形の科学会誌』論文投稿の案内	247

スパイダリンケージの運動方程式の導出

明石望洋 京都大学大学院情報学研究科 〒606-8501 京都市左京区吉田本町 akashi@acs.i.kyoto-u.ac.jp

Derivation of Equations of Motion for Spider Linkage Nozomi Akashi Graduate School of Informatics, Kyoto University

(2015 年 12 月 3 日受付, 2016 年 2 月 8 日受理)

Abstract: A mechanism in which some bodies are linked to perform systematic movement by rigid rods is called mechanical linkage, which has been studied since the 18th century. For the mechanical linkage, it is known that despite of the simple construction, free motion (i.e. no friction and no potential) of the system can exhibit diverse dynamics: periodic and chaotic motion. In particular, the dynamics of the triple linkage of Hunt - MacKay was proved to be an Anosov system, a special case of Axiom A systems. They show this proposition by analyzing configuration space of the system without the equation of motion for the system. In this paper, we derive the equation of free motion under constraint in a class of spider linkage, which includes the triple linkage. Thereby, we can draw various trajectories in phase space of the system. In addition, the equations of motion for the single and the double linkage are numerically analyzed to yield respectively periodic and chaotic dynamics.

要旨:物体が剛体棒により連結され連動して動く機構はリンク機構(linkage)とよばれ 18 世紀頃から研究されてきた.リンク機構の自由運動(無重力,無摩擦)は,その単純な構成 にもかかわらず周期軌道やカオスといった多様なダイナミクスを呈す.特にハント,マッ カイらのトリプルリンケージはアノソフ系となることが示されている.この証明には運動 方程式を用いることなく,配位空間のトポロジーを調べることにより行われた.本研究で はトリプルリンケージを含むスパイダリンケージとよばれるクラスのリンク機構の自由運 動の運動方程式を導出することで,相空間における様々な軌道を描くことを可能にした. 運動方程式をもとにシングルリンケージとダブルリンケージの数値シミュレーションを行 い,それぞれ周期軌道とカオスを確認した.

Keywords: dynamical system, chaos, Anosov, linkage, numerical simulation

1. 序論

車輌の車輪やワイパ,ペンチやロボットアームのように物体同士が棒やスライダに拘束 されて連動する機構は身の周りに多く存在する.これらの機構はその構成によって,与え られた入力を動作,速度,加速度の異なる出力に変換する.このような物理モデルはリン ク機構(planer linkage, mechanical linkage)と呼ばれ,その幾何学やダイナミクスが,遡 ればオイラー,ワッツ,チェビシェフといった著名な研究者たちも含め 18 世紀頃から研 究されてきた[1].図1,2のようにリンク機構は同一平面上の頂点と各頂点を拘束する辺に より構成される.頂点には固定された頂点と平面上を拘束の下で自由に動ける頂点の2種 類がある.辺は頂点間を結ぶ剛体棒の他にも2頂点間の距離を定めるものなら良い.機構 の自由度は自由頂点の数と拘束の種類と数にのみ依存する.自由頂点の軌道により,1自 由度では曲線を,2自由度以上では準周期軌道やカオスといった多様な軌道を表現できる.

1 自由度のリンク機構はその工学的応用の側面もあり 19 世紀頃盛んに研究が行われ, 直 線軌道を描くポースリエのリンク機構や, 任意の代数曲線の有界な部分集合をリンク機構 の頂点の軌道で表現できるという, ケンプのリンク機構定理など, 多くの古典的な問題は 解決されてきた[1].

近年においては力学系分野でも2自由度以上のリンク機構の研究が行われ、1自由度の 場合と異なる複雑な配位空間の幾何やダイナミクスが研究されてきた.幾何学に関しては サーストンがリンク機構の頂点の配置を表す空間、すなわち配位空間が興味深いトポロジ ーを持つことを調べ[2]、その影響を受けてカポビッチ とミルソンはリンク機構の配位空 間定理を与えた[3].この定理は任意のコンパクト多様体 M に対して、M と同相な部分を 含む配位空間を持つリンク機構が存在するというものである.ダイナミクスに関してはハ ントとマッカイがサーストンのトリプルリンケージの無重力、無摩擦での運動があるパラ メータ領域においてアノソフ系になることを示した[4].アノソフ系は構造安定性といった 物理例のカオスとしては自然な性質を有しているにも関わらず、その数学的な構成上の複 雑さから、このような物理例はほとんど発見されていない[4].

リンク機構の中でも特にスパイダリンケージ(spider linkage)と呼ばれる, n 個の二重 振り子の端点を一点で連結したモデルの無重力,無摩擦の自由運動を考える.ここでは個々 の剛体棒の質量,長さをパラメータとする. n=1の場合は,無重力下での2重振り子に なり準周期軌道あるいは周期軌道となる.また $n \ge 2$ の場合はカオスになるパラメータや, アノソフ系となる極限的なパラメータを持つことがわかっている[5]. n=3の場合は先 に述べたトリプルリンケージである.



図1:ポースリエのリンク機構. 白丸は自 由頂点,黒丸は固定頂点. 自由頂点 P は線 分上を動く.



図2:トリプルリンケージ(n=3のスパイ ダリンケージ).

マッカイらのアノソフ系となるパラメータを持つことの証明は次のようにして行われ た.剛体棒の長さと質量のある極限的なパラメータにおいては、トリプルリンケージの配 位空間と配位空間上の測地流の計量は非常に単純な形をとる.このとき、この計量のもと での配位空間の断面曲率は有限個の点を除きいたるところ負となる.負曲率多様体上の測 地流はアノソフ流になるという定理から[6]、このパラメータにおいてアノソフ系であるこ とを示した.さらにアノソフ系の構造安定性から、近傍のパラメータや系においてもアノ ソフ系であることがわかる[6].

この手法ではアノソフパラメータ領域においては、非線形微分方程式を直接扱わずして カオス性やエルゴード性といった性質を得ることができる.しかし、このようなパラメー タ領域がどこまで広がっているのかや、大きく離れたパラメータでの系の性質については 情報を得ることはできない.

本研究の目的はスパイダリンケージの自由運動の運動方程式をたてることである. それ により、一般のパラメータに対してダイナミクスを数値シミュレーションし、系の性質を 調べることが可能になる. なお、マッカイらの極限的なパラメータにおいては測地流の方 程式として微分幾何の初等的な計算で運動方程式が求まる[7].数値計算ができればリヤプ ノフ指数を測ることで、解析的には難しいカオスの定量的な評価、カオスと周期運動の分 岐を調べ分岐図を描く、ポアンカレ写像を見る等の解析的には難しい諸々の数値解析が可 能になる.

本論文は2章でリンク機構及びスパイダリンケージを定義し,自由運動の配位空間と運動方程式について説明する.3章と4章では最も簡単な n=1,2 のスパイダリンケージの 自由運動の運動方程式の導出を行い,数値シミュレーションの実行例を示す.5章では4 章の導出に倣って一般の n でのスパイダリンケージの自由運動の運動方程式の導出する. 終わりに6章は本研究のまとめに充てる.

2. リンク機構

リンク機構と呼ばれる系について説明する.リンク機構は同一平面上の任意個の頂点と 辺により構成される.頂点は固定された固定頂点と拘束のもとで平面上を自由に動ける自 由頂点の2種類を持つ.辺は例えば剛体棒のような任意の2頂点を拘束するものである. 以下では辺は剛体棒による拘束を考える.

数学的には、以下の性質を満たすようなグラフ G(V,E) をリンク機構(planar linkage) と呼ぶ.

- $V = \{v_1, \dots, v_n | v_i \in \mathbb{R}^2\}$ は頂点の集合, $E = \{e_1, \dots, e_n | e \subset V^2\}$ は辺の集合であり, それぞれ有限集合である.
- 頂点集合 V は次の非連結な2つの集合に分けられる. V = V_{fixed} ∪ V_{free} (V_{fixed} ∩ V_{free} = Ø) ここで V_{fixed} は固定された頂点の集合, V_{free} は拘束の下で自由に動ける 頂点の集合である.
- 辺 e には一定の長さ *l*(e) > 0 が存在する.

上記に加えて次の条件を満たすリンク機構をスパイダリンケージ(spider linkage)と呼ぶ.

- $n(V_{\text{fixed}}) = n$, $n(V_{\text{free}}) = n + 1$, n(E) = 2n
- $V_{\text{fixed}} = \{p_1, \dots, p_n\}, V_{\text{free}} = \{q_1, \dots, q_n, c\}, E = \{e_1, \dots, e_{2n}\} \geq \bigcup \subset,$

 $e_i = (p_i, q_i), \ e_{n+i} = (q_i, c), \ (i = 1, \dots, n)$

特に n を強調して、 n-th スパイダリンケージとも呼ぶ. トリプルリンケージは 3rd スパイダリンケージといえる. n 個の辺 e_i (i = 1, ..., n) は剛体棒ではなく中心の固定さ れた自由回転できる半径 $l(e_i)$ の円板と見なすことができる,以降では拘束 e_i と e_{n+i} の 区別をしやすくするために円板として考える.

無摩擦,無ポテンシャルの運動を自由運動と呼び,スパイダリンケージの自由運動について考える.スパイダリンケージの自由運動は \mathbb{R}^2 上の (n+1) 質点の運動であり,拘束が計 2n 個存在するため 2(n+1) – 2n=2 自由度の系になる.また1自由度につき位置と速度が独立に与えられ,運動エネルギーの保存量が1つ存在するため,結果スパイダリンケージの自由運動はnによらず相空間の次元が3になる.

n 個の円板と n 個の剛体棒がそれぞれ同様の形状をとるとする.このとき系のパラメ ータは,頂点間の距離を定める円板の半径と棒の長さの長さの次元を持つパラメータと, 円板と棒の質量や慣性モーメントといった質量の次元を持つパラメータの2種類がある.

長さパラメータについて、 n 個の円板の半径 l_1 , n 個の剛体棒の長さを l_2 とする. 系の配位空間を考える.配位空間とは運動を記述する力学系の変位と速度の次元を持つ相 空間の,変位のみの次元を持つ部分空間のことである. X を連結点 c のベクトル、 P_i を i 番目の円板と剛体棒の連結点 q_i のベクトル、 A_i を円板の中心 p_i のベクトルとする. 図 3 のように各円板と連結する剛体棒に対して、 X の可動領域は外半径 $R = l_1 + l_2$, r = $|l_1 - l_2|$ として円環領域 $r \le |X - A_i| \le R$ に制限される.従って図 4 のように $i = 1 \cdots$, n の交差領域が連結点 X の可動領域となる.可動領域内の X に対して、 $|X - P_i| = l_2$ を満 たすような円周上の点 P_i は一般に重複も込めて2通り存在する.よって、可動領域内の X に対してスパイダリンケージの配位は 2^n 通り存在する.可動領域の境界においては対 応する P_i が一意に定まるので、境界において可動領域が貼り合わせられる.従って、配



図3:斜線部は拘束 e_i , e_{n+i} に対する,連結点 X の可 動領域.内半径 $r = |l_1 - l_2|$, 外半径 $R = l_1 + l_2$ の円環 領域となる.可動領域内の X に対して一般に P, P' の2通りの配位が存在する.



図4:3 つの円環領域に含 まれる中央の領域がトリプ ルリンケージの連結点 Xの可動領域. P_i の選び方 が $2^3 = 8$ 通り考えられる ので,配位空間は可動領域 の曲面 8枚の貼り合わせに なる.



図5:貼り合わせて得られ るトリプルリンケージの配 位空間と同相な多様体.周 期境界条件を持つ.マッカ イらの極限的なパラメータ においては、シュワルツの P曲面になる.

位空間は図 5 のような X の可動領域 2ⁿ の貼り合わせの曲面と同相となる.円環領域の 内半径や外半径が変化することで, X の可動領域の境界と貼り合わせ方が変わり,結果 配位空間の種数が変化することがある.

次に質量パラメータについて, n の円板は等しい質量 M, 円板の中心を通り円板に垂 直な回転軸まわりの慣性モーメント I, n 個の剛体棒も等しい質量 m, 重心のベクトル c, 重心を通りスパイダリンケージを含む平面に垂直な回転軸まわりの慣性モーメント I_c を持つとする.ただし, 円板や剛体棒を対称的に配置する必要はない. この時スパイダリ ンケージの運動エネルギーは

$$K(\dot{X}, \dot{P}_{1}, \cdots, \dot{P}_{n}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(\mu_{1} \dot{X}^{2} + 2\mu_{2} \dot{X} \dot{P}_{i} + \mu_{3} \dot{P}_{i}^{2} \right)$$
(1)

と表せ、質量パラメータは 3 定数 μ_i に縮約できる. 質量の次元を持つパラメータ μ_i は 円板の質量等を用いて具体的に次のように表される.

$$\mu_{1} = \frac{1}{l_{2}^{2}} (I_{c} + m|p - c|^{2})$$

$$\mu_{2} = -\frac{1}{l_{2}^{2}} (I_{c} + m(x - c)(p - c))$$

$$\mu_{3} = \frac{I}{l_{1}^{2}} + \frac{I_{c} + m|x - c|^{2}}{l_{2}^{2}}$$
(2)

ここで, μ_1 , $\mu_3 > 0$, $\mu_1 \mu_3 > \mu_2^2$ を満たす[4]. 質量パラメータの取り方によって, 任意の 物理構成のスパイダリンケージを考えることができる. 例えば, 円板と剛体棒が一様な密 度を持っていたなら, $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \left(\frac{m}{3}, \frac{m}{6}, \frac{M}{2} + \frac{m}{3}\right)$. 頂点がほとんどの質量を占めていれば $\mu_2 = 0$, また円板の質量が剛体棒の質量に対して十分大きければ $\mu_1 = \mu_2 = 0$ のように近似 できる. 従って, $K(\dot{X}, \dot{P}_1, \dots, \dot{P}_n)$ は質量パラメータにより変化する.

外力がないとき正のエネルギーを持つ運動は、運動エネルギーを計量とする配位空間上 の測地流になることから、パラメータについて次のことがいえる.スパイダリンケージの 自由運動の流れを測地流とみなして、長さのパラメータは測地流の動く配位空間のトポロ ジーを定め、質量パラメータは測地流の計量を定める.

3. シングルリンケージ



図6:シングルリンケージ.黒点は固定頂点,白点は自由頂点を表す.

図 6 のような *n*=1 のスパイダリンケージ, すなわちシングルリンケージの自由運動に ついて運動方程式を立て,数値シミュレーションを行う.シングルリンケージの自由運動 は無重力下での二重振り子の運動になる.

二重振り子の運動方程式を立てる場合は二つの振り子の偏角を変数としておくのが簡 明である. 従って, 固定頂点 A を A = (0,0) として, 円板上の自由頂点 P と剛体棒の P と 異なる他端にある自由頂点 X を水平からの AP と XP の偏角 θ , ϕ を用いて, P = ($l_1 \cos \theta$, $l_1 \sin \theta$), X = ($l_1 \cos \theta + l_2 \cos \phi$, $l_1 \sin \theta + l_2 \sin \phi$)

と表す. その一階微分は

$$\mathcal{L} = K(\dot{X}, \dot{P}) = \frac{1}{2} \{ (\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3) l_1^2 \dot{\theta}^2 + 2(\mu_1 + \mu_2) l_1 l_2 \cos(\theta - \phi) \dot{\theta} \dot{\phi} + \mu_1 {l_2}^2 \dot{\phi}^2 \}$$

を用いてオイラー=ラグランジュ方程式を立てる. $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0, \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} = 0$ $\Leftrightarrow \left(\begin{pmatrix} (\mu_1 + 2\mu_2 + \mu_3)k & (\mu_1 + \mu_2)\cos\Delta\theta \\ (\mu_1 + \mu_2)k\cos\Delta\theta & \mu_1 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\phi} \end{pmatrix} = \left(\begin{pmatrix} -(\mu_1 + \mu_2)\sin\Delta\theta \dot{\phi}^2 \\ (\mu_1 + \mu_2)k\sin\Delta\theta \dot{\theta}^2 \end{pmatrix}$ (3)

ここで $\Delta \theta = \theta - \phi$, $k = \frac{l_1}{l_2}$ である. 係数行列の行列式を計算すると, $\mu_1 \mu_3 - \mu_2^2 + (\mu_1 + \mu_2)^2 \sin^2(\theta - \phi) > 0$ となることから, 係数行列は正則である. したがって $\ddot{\theta}$, $\ddot{\phi}$ についての線形代数方程式は一意に解けることがわかる. $\mu_2 = 0$ の場合は, よく知られた質点の二重振り子の重力加速度が 0 の場合に対応する[8].

(3)より得られる 2 階微分から 4 次のルンゲクッタ法で数値シミュレーションを行った. 図 7 では初期条件 $(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = (1, 0, 0, 0.5)$ での連結点 X の時間 $t \in [0, 200]$ の軌道を描いている. 長さパラメータについては, $l_1 = l_2$ の場合と $2l_1 = l_2$ の場合, 質量パラメータについては, 剛体棒が端点にのみ等しい質量を持つ 2 質点の場合と一様な剛体棒の場合として, 4 つのパラメータ分の軌道を描いた.



図7:平面上の連結点 X の軌道. 長さのパラメータは上段 $(l_1, l_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 下段 $(l_1, l_2) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, 下段 $(l_1, l_2) = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. 質量パラメータは左列 $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \left(\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right)$, 右列 $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right)$.

実行結果ではすべて軌道は準周期的にみえる. *n*=1 の無重力下での二重振り子は角運動量も保存するため,2自由度の系に2つの保存量が存在することになり可積分系となる. 軌道は周期軌道,準周期軌道しかとりえず,カオスは生じない.

また配位空間について考えると、 θ 、 ϕ は独立にとることができ、法 2π で同一視するので 2 次元トーラス \mathbb{T}^2 となる. 種数は l_1 , l_2 によらず常に 1 であり、長さパラメータを変化させることによる配位空間のトポロジーの非連続的な変化も起こらないことがわかる.

4. ダブルリンケージ



図8:ダブルリンケージ.黒点は固定頂点,白点は自由頂点を表す.

次に図 8 のような n = 2 のダブルリンケージの場合を考える. 固定頂点を $A_1 = (1, 0), A_2 = (-1, 0)$ とする. 偏角 $\theta_1, \theta_2, \phi_1, \phi_2$ として自由頂点を $P_1 = (1 + l_1 \cos \theta_1, l_1 \sin \theta_1), P_2 = (-1 + l_1 \cos \theta_2, l_1 \sin \theta_2)$ $X = (1 + l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \phi_1, l_1 \sin \theta_1 + l_2 \sin \phi_1)$ $= (-1 + l_1 \cos \theta_2 + l_2 \cos \phi_2, l_1 \sin \theta_2 + l_2 \sin \phi_2)$ と表す. 二通りに表される X の x 座標 y 座標がそれぞれ等しいという式が拘束条件と

と表す. 二通りに表される X の x 座標 y 座標がそれぞれ等しいという式が拘束条件となる. すなわち拘束条件は

$$f(\theta_1, \phi_1, \theta_2, \phi_2) = 1 + l_1 \cos \theta_1 + l_2 \cos \phi_1 - (-1 + l_1 \cos \theta_2 + l_2 \cos \phi_2) = 0$$

$$g(\theta_1, \phi_1, \theta_2, \phi_2) = l_1 \sin \theta_1 + l_1 \sin \phi_1 - (l_1 \cos \theta_2 + l_2 \cos \phi_2) = 0$$

の2式となる. 拘束条件のもとでのラグランジアンを未定乗数 λ, ω を用いて表す.

$$\mathcal{L} = K(\dot{X}, \dot{P}_{1}, \dot{P}_{2}) - \lambda f(\theta_{1}, \phi_{1}, \theta_{2}, \phi_{2}) - \omega g(\theta_{1}, \phi_{1}, \theta_{2}, \phi_{2})$$

= $\frac{1}{2} \sum_{i=1,2} \left\{ (\mu_{1} + 2\mu_{2} + \mu_{3}) l_{1}^{2} \dot{\theta}_{i}^{2} + 2(\mu_{1} + \mu_{2}) l_{1} l_{2} \cos(\theta_{i} - \phi_{i}) \dot{\theta}_{i} \dot{\phi}_{i} + \mu_{1} l_{2}^{2} \dot{\phi}_{i}^{2} \right\} - \lambda f - \omega g$

X が二通りに表されるため,運動エネルギーは異なる表式で表すこともできるが,いずれ も拘束条件のもとで等しくなる.上記のラグランジアンから導かれるオイラー=ラグラン ジュ方程式と,拘束条件の二階微分より,次の変数の二階微分と未定乗数に対する線形方 程式が得られる.

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 & B_1 \\ 0 & A_2 & -B_2 \\ {}^tB_1 & -{}^tB_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\phi}_2 \\ \lambda \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ p_1 \\ q_1 \end{pmatrix}$$
(4)

ここで,

$$A_{i} = \begin{pmatrix} (\mu_{1} + 2\mu_{2} + \mu_{3})k & (\mu_{1} + \mu_{2})\cos\Delta\theta_{i} \\ (\mu_{1} + \mu_{2})k\cos\Delta\theta_{i} & \mu_{1} \end{pmatrix} (i = 1, 2),$$
(5)

$$B_{i} = \begin{pmatrix} -k\sin\theta_{i} & k\cos\theta_{i} \\ -\sin\phi_{i} & \cos\phi_{i} \end{pmatrix}, \quad c_{i} = \begin{pmatrix} -(\mu_{1} + \mu_{2})\sin\Delta\theta_{i}\dot{\phi}_{i} \\ (\mu_{1} + \mu_{2})\sin\Delta\theta_{i}\dot{\theta}_{i} \end{pmatrix} \quad (i = 1, 2), \tag{6}$$

$$p_{i} = k \cos \theta_{i} \dot{\theta}_{i}^{2} + \cos \phi_{i} \dot{\phi}_{i}^{2} - k \cos \theta_{i+1} \dot{\theta}_{i+1}^{2} - \cos \phi_{i+1} \dot{\phi}_{i+1}^{2} \quad (i = 1),$$
(7)

$$q_{i} = k \sin \theta_{i} \dot{\theta}_{i}^{2} + \sin \phi_{i} \dot{\phi}_{i}^{2} - k \sin \theta_{i+1} \dot{\theta}_{i+1}^{2} - \sin \phi_{i+1} \dot{\phi}_{i+1}^{2} \quad (i = 1),$$
(8)

 $\Delta \theta_i = \theta_i - \phi_i$, 0 はサイズ 2 の正方零行列である.

上式を元に 4 次のルンゲクッタ法で数値シミュレーションを行った. 図 7 同様に図 9 は 初期条件(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = (0,0,0,0.5) での連結点 X の時間 $t \in [0,300]$ の軌道を 4 パラメータ分描いている.

n=2 では長さのパラメータ l_1 , l_2 に応じて配位空間の種数が変化する.図 10 に $(R,r) = (l_1, + l_2, |l_1, - l_2|)$ に対する配位空間の種数をまとめた. $(l_1, l_2) = (0.5, 0.9)$ では種数 は 0, $(l_1, l_2) = (0.6, 1.3)$ では種数は 2 となる. それぞれの配位空間と同相な多様体は図 11,12 のようになる.

質量パラメータは前章と同様に、剛体棒を端点にのみ質量を持つ2質点とみなした場合と、一様な剛体棒の場合としている.

軌道はすべてカオスになっているようにみえる. *n*=1 の場合と異なり角運動量が保存 しないため相空間の次元が3次元の系でありカオスになりうる. 運動方程式の係数行列の 中の *A_i* の部分だけなら互いに独立な2つの二重振り子で可積分だが, *B_i* の部分によっ て二つの二重振り子が未定乗数を介して非線形に相互作用している.



図9: (x, y) 平面上での連結点 X の軌道. 長さのパラメータは上段 $(l_1, l_2) = (0.5, 0.9)$, 下段 $(l_1, l_2) = (0.6, 1.3)$. 質量パラメータは左列 $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \left(\frac{1}{4}, 0, \frac{1}{4}\right)$, 右列 $(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right)$.



図 10: $(R,r) = (l_1, +l_2, |l_1, -l_2|)$ に対するダブルリンケージの配位空間の種数. R > r > 0 を 満たす. A:種数 0, B,E:種数 2, C:種数 4, D:種数 0 の曲面が二つ. その他の領域ではダ ブルリンケージが構成できない.





図 11:図 10のAに含まれる $(l_1, l_2) = (0.5, 0.9)$ の配位空間と同相な種数 0の多様体. 凸レンズ形の X の可動領域 4 枚の貼り合 わせで得られる.

図 12:図 10 の B に含まれる (*l*₁,*l*₂) = (0.6, 1.3) の配位空間と同相な種数 2 の多様体. 周期境界条件より向かい合う穴は繋がって いる.

5. 運動方程式の導出

ダブルリンケージの運動方程式の導出を n-th スパイダリンケージに拡張する. 各円板 の中心 A_i を,

$$A_{i} = (A_{ix}, A_{iy}) \quad (i = 1, \dots, n)$$

とする, X, P_i を 2n 個の変数 $\theta_{i}, \phi_{i} \quad (i = 1, \dots, n)$ を用いて
P_i = $(A_{ix}+l_{1}\cos\theta_{i}, A_{iy}+l_{1}\sin\theta_{i})$ $(i = 1, \dots, n)$
X = $(A_{ix}+l_{1}\cos\theta_{i}+l_{2}\cos\phi_{i}, A_{iy}+l_{1}\sin\theta_{i}+l_{2}\sin\phi_{i})$ $(i = 1, \dots, n)$

と表す. 拘束条件は

 $\begin{aligned} f_i(\theta_i, \phi_i, \theta_{i+1}, \phi_{i+1}) &= A_{ix} + l_1 \cos \theta_i + l_1 \cos \phi_i - (A_{i+1x} + l_1 \cos \theta_{i+1} + l_1 \cos \phi_{i+1}) = 0\\ g_i(\theta_i, \phi_i, \theta_{i+1}, \phi_{i+1}) &= A_{iy} + l_1 \sin \theta_i + l_2 \sin \phi_i - (A_{i+1y} + l_1 \sin \theta_{i+1} + l_2 \sin \phi_{i+1}) = 0 \end{aligned}$

の 2(n-1) 式となる. 拘束条件に対応する未定乗数を λ_i , ω_i (i = 1, ..., n-1)とする. 以上 を用いて, ダブルリンケージのときと同様にオイラー=ラグランジュ方程式は,

$$\begin{pmatrix} A & B \\ {}^{t}B & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Theta \\ \Lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c} \\ \mathbf{p} \end{pmatrix}$$
(9)

となる.ここで,

$$A = \begin{pmatrix} A_{1} & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & A_{n} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} B_{1} & 0 \\ -B_{1} & \ddots & \\ & \ddots & B_{n-1} \\ 0 & & -B_{n} \end{pmatrix},$$
(10)

 $\Theta = {}^{t}(\theta_{1}\phi_{1}\cdots\theta_{n}\phi_{n}), \Lambda = {}^{t}(\lambda_{1}\omega_{1}\cdots\lambda_{n-1}\omega_{n-1}), \mathbf{c} = {}^{t}(c_{1}\cdots c_{n}), \mathbf{p} = {}^{t}(p_{1}q_{1}\cdots p_{n-1}q_{n-1})$ である. ただし, A_{i}, B_{i}, c_{i} (i = 1, ..., n) $\geq p_{i}, q_{i}$ (i = 1, ..., n-1) は前章(5)~(8)式で定義し たものであり, 0 は(9), (10)においてサイズ 2(n-1) とサイズ 2 の正方零行列である. 以上より, n-th スパイダリンケージの運動方程式が得られた.

6. 結論

n-th スパイダリンケージの自由運動の運動方程式を n 個の円板と剛体棒の偏角の 2n 個の変数を用いて記述した.運動方程式は 2n 個の変数の二階微分と 2(n-1) 個の未定 乗数に関する (4n-2) 元線形方程式の形で導出した.各変数の1階微分を新たな変数でお き直せば,一階の (6n-2) 元連立微分方程式ともみなせる.この運動方程式は 2(n-1) 個 の拘束条件とその微分と運動エネルギーの (4(n-1)+1) 個の保存量を持つので,相空間 の次元は n によらず 3 である.また係数行列は対称であり, $(4n-2) \times (4n-2)$ のサイズに対して要素数は (20n-16) の疎行列であるので,線形方程式を数値的に解く際にも 種々の高速化の手法を用いることができる.得られた方程式から n=1,2 の場合で数値シ ミュレーションを行い,それぞれ周期軌道とカオスのダイナミクスを見ることができた.

今後の研究は、得られた方程式を用いてアノソフパラメータ領域の広がりや、その他の パラメータでの性質の解析といった、既往の理論的なリンク機構の解析では難しい諸々の 数値解析を行う.

まずは, n≥3 の場合で数値シミュレーションを行い, 次に数値シミュレーションで得 られた軌道に対して周期軌道かカオスかを数値的に判定する. 周期の場合は得られた時系 列にフーリエ変換を施しピークが立つことを見る, カオスであることは, 島田・長島法によ り正のリヤプノフ指数を持つことを確かめる, といった方法が考えられる[9]. 更には, 極 限的なパラメータ領域以外でアノソフ系になっているかどうかを調査すること. すなわち 相空間が一様双曲的か否かを数値的に判定すること.

一方では得られた微分方程式の非可積分性の判定といった,理論的な解析も行いたい. 以上のような解析を通じて,物理的な力学系としては珍しいアノソフ系となりうるリン ク機構のカオスを体系的に捉え,その他のカオスとの関連を調べていきたい.

謝辞

本研究を進めるにあたりご指導いただいた大阪大学基礎工学部での指導教員の柴山允 瑠准教授に感謝致します.並びに,本論文を作成するにあたりご指導いただいた指導教員 の宮崎修次講師に感謝致します.原稿を御精読頂き,本論文の構成に関して適切な助言を 頂いた,査読者に感謝いたします.また本研究に際して,長期にわたりゼミを行っていた だき,特に数値計算に関して多大なご指導をいただいた研究室の先輩の今井貴史さんに感 謝致します.

文献

- Kempe, A. B. "How to draw a straight line: a lecture on linkages." Macmillan and Company, 1877.
- [2] Thruston, W. P., and Jeffrey R. Weeks. "The mathematics of three-dimensional manifolds." Scientific American 251 (1984): 108.
- [3] Kapovich, Michael, and John J. Millson. "Universality theorems for configuration spaces of planar linkages." *Topology* 41.6 (2002): 1051-1107.
- [4] Hunt, T. J., and R. S. MacKay. "Anosov parameter values for the triple linkage and a physical system with a uniformly chaotic attractor." *Nonlinearity* 16.4 (2003): 1499-1510.
- [5] Magalhães, M. L. S., and Mark Pollicott. "Geometry and dynamics of planar linkages." *Communications in Mathematical Physics* 317.3 (2013): 615-634.
- [6] Katok A and Hasselblatt B "Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems" Cambridge University Press 1995.
- [7] Kuznetsov, Sergey P. "Hyperbolic chaos in self-oscillating systems based on mechanical triple linkage: Testing absence of tangencies of stable and unstable manifolds for phase trajectories." Regular and Chaotic Dynamics 20.6 (2015): 649-666.
- [8] Shinbrot, T., Grebogi, C., Wisdom, J., Yorke, J. A. "Chaos in a double pendulum." Am. J. Phys 60.6 (1992): 491-499.
- [9] Shimada, I., and Nagashima T. "A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical systems." *Progress of Theoretical Physics* 61.6 (1979): 1605-1616.

編み物, 組みひも, そして位相的カオス - 悲しいけれどそこにはカオスは見えない -山口喜博

帝京平成大学 〒209-0193 千葉県市原市うるいど南 4-1 chaosfractal@iCloud.com

Thread Plained Braid, Braid and Topological Chaos

- It is sad, the chaos is not observed there -

Yoshihiro Yamaguchi Teikyo Heisei University

(2016 年 1 月 14 日受付, 2016 年 2 月 25 日受理)

Abstract: We introduce the $n \ (n \ge 3)$ -thread plained braid (*n*-TPB) and propose the three criterions to characterize *n*-TPB. The first criterion is the symmetry, the second one the tightness, and the last one the complexity. Using these criterions, we discuss the quality of *n*-TPB widely used. We also show the existence of the topological chaos not observed in *n*-TPB.

Keywords: Thread plained braid, braid, symmetry, tightness, complexity, topological chaos.

1. はじめに

編み物は、糸で編んだ布とか衣類等の製品を表す.編み物をするとは、糸を組み合わせ てひとつの形状を作ることを意味する.ここでは平面的な形状を作ることを念頭において 議論をすすめる.平面的というのは、完成品が袋状とか円筒状ではないという意味である. 糸のことをひもと表現する.ひもを用いた平面編み物で、最もよく利用されていて簡単な 編み方は三つ編みであろう.三つ編みは髪を編む際によく利用される.四つ編み、五つ編 みになるにつれて編み方が複雑になる[1].これらの編み方を定義するために組みひもの概 念を使用する.そのため最初に組みひもについて説明する.組みひもについては参考文献 [2]に詳しい説明がある.

組みひもの表現 1.1.

(1) 左から数えて $k \geq 1$ 番目のひもと (k+1) 番目のひもが交差するとしよう. k 番目 のひもが (k+1) 番目のひもの上を通過する場合,この交差を σ_k と書く (図 1(a)). 逆に k 番目のひもが (k+1) 番目のひもの下を通過する場合,この交差を σ_k^{-1} と書く (図 1(b)).

(2) σ_k $c \sigma_k^{-1}$ を組みひもの生成元と呼ぶ. ここでは、 σ_k を元、 σ_k^{-1} を逆元と呼ぶ.

(3) 生成元の作用の順番と交差点の並び. 例として $\sigma_1\sigma_3\sigma_2^{-1}$ は、最も左にある元 σ_1 から



図1:生成元. (a)が元 σ_k を表し, (b)が逆元 σ_k^{-1} を表す.

順に作用する. つまり,元 σ_1 で記述される交差が一番上にあり,次に元 σ_3 で記述される 交差があり,最後に逆元 σ_2^{-1} で記述される交差がある. 交差点は上から下へと並ぶ. (4) 下記のライデマイスター変形を行うことができる.

$$\sigma_k \, \sigma_{k+1} \, \sigma_k = \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1}, \tag{1}$$

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad (|i - j| \ge 2). \tag{2}$$

(5) 組みひもの表現を巡回して良い (マルコフ移動と呼ばれる). 例. $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^{-1}$ の σ_1 を巡回して、 $\sigma_2 \sigma_3^{-1} \sigma_1$ とする.

ライデマイスター変形については付録 A.1 も参考にしてほしい. マルコフ移動について 説明する. 例として $\sigma_1\sigma_2\sigma_3^{-1}$ を利用した四つ編みと, $\sigma_2\sigma_3^{-1}\sigma_1$ を利用した四つ編みの関 係について説明する. $\sigma_1\sigma_2\sigma_3^{-1}$ を三回実行する.

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^{-1} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^{-1} \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^{-1} = \sigma_1 (\sigma_2 \sigma_3^{-1} \sigma_1)^2 \sigma_2 \sigma_3^{-1}, \tag{3}$$

これより, $(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^{-1})^n = \sigma_1 (\sigma_2 \sigma_3^{-1} \sigma_1)^{n-1} \sigma_2 \sigma_3^{-1}$ が得られる. これに右から σ_1 を作用すると, $(\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^{-1})^n \sigma_1 = \sigma_1 (\sigma_2 \sigma_3^{-1} \sigma_1)^{n-1}$. ここで n を十分大きくすると, 左辺の末尾の σ_1 と右辺の 先頭の σ_1 による違いは目立たなくなる. また出来上がった編み物は必ず上端と下端をと める. この結果, 上端と下端の違いは無視できるようになる. よって, 組みひもの表現を 巡回した組みひもによる編み物と, もとの組みひもの表現による編み物は同じであると考 える. これが(5)の意味である.

簡単な組みひもの定義 1.2.

組みひもの生成元の個数がひもの数より一つ少ない組みひもで、かつ元と逆元を含む組み ひもを簡単な組みひもと定義する.また、ひもの数が n 本の場合、生成元の添字である 自然数 1 から (n-1) までが、それぞれ一回だけ現われるとする.



図2:(a) ほどける組みひもの例.(b) ほどけない組みひもの例.

定義 1.2 で、組みひもが元と逆元を含むことを条件にした理由を述べておこう. 図 2(a) のように元だけで構成されていると、上端と下端を留めても手を離すとほどけてしまう. しかし、図 2(b)の組みひもの場合、一部がほどけても全体がほどけることはない. 組みひもが元と逆元を含むならば出来上がった編み物はほどけない.

簡単な組みひもは必ず生成元の添え字が昇順になるように変形できる(付録 A.2). これ を利用して組みひもの正規表現を定義する.

組みひもの正規表現の定義 1.3.

簡単な組みひもの生成元の添え字が昇順になるように並べられた組みひもを,組みひもの 表現の正規表現という.

以上で準備ができたので本論文で使用する三つ編み等を定義する.

nつ編みの定義 1.4.

(1) ひもの本数 n (≥ 3) を決めて, ひもを用意する.

- (2) 組むための簡単な組みひも β を決める. β は正規表現であるとする.
- (3) ひもの上端をとめる.
- (4) β を繰り返し作用する.繰り返しの回数は十分に多いとする.
- (5) 組めなくなったら β の作用を途中でやめて下端をとめる.

ここで(5)について補足しておく. $\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^{-1}$ の $\sigma_1 \sigma_2$ を作用したところでひもがなくなったとする. この場合,最後の σ_3^{-1} は作用せずに終了し下端をとめる.

本論文で使用する組みひもはすべて正規表現の簡単な組みひもである.よって正規表現の簡単な組みひもを単に組みひもと呼ぶことにする.

ここで本論文の目的を述べる.本数が多くなると可能な組みひもの個数が増える.そう すると、どのような組みひもが実際に編み物(A.3を見よ)に利用されているのか、それはど のような特徴を持っているのだろうかという疑問が湧く[3].多分、完成した編み物を見て 美しいとか、編み物を作成しやすいという理由で、ある特殊な組みひもが選ばれているの であろう.

美しさは人の感性でことなる曖昧な概念である.組みやすさも作業する人によって判断 基準が違うであろう.曖昧な概念の一つである「美しさ」については数学者のバーコフ[4] が「美度」という量を提唱した.これは曖昧な概念の定量化の第一歩と考えられている. バーコフは一般的な概念として美度を導入したが,ここでは対象を編み物に制限して曖昧 な概念の定量化を行う.編み物の手順は,過去からの経験で積み上げられてきた経験則の 集まりであると考えられる.得られている経験則を数理解析的な手法で調べたい.つまり, 編み物における特徴的な性質を取り出し定量化して比較検討が行えるようにしたいという のが本論文の目的である.編み物をこのような観点から議論することは今まで行われてい なかった.

第2節では、編み物を特徴づけるために三つの量を導入する.対称性、締まり具合、編 み方の複雑さを測るため量である複雑度の三つである.対称性は美しさと言い換えても良い.使っているときに編み物がのびるのは困る.つまりよく締まっている編み物が良い編 み物と考える.また編みやすいかどうかも編み物を特徴づける重要な因子である.これを 測るために複雑度を導入する.第3節では、導入した三つの量をもとに主に四つ編みと五 つ編みを調べる.また六つ編みと七つ編みについては簡単な議論にとどめる.第4節では 得られた結果をまとめる.

2. 三つの量の導入

最初に組みひもの同等性について説明する. 組みひも β に含まれる元を逆元に変更し, 逆元を元に変更した組みひも β' とする. 組みひも β を作用してできた編み物と, 組みひ も β' を作用してできた編み物は同等であるとする. よって組みひも β と組みひも β' も 同等であるとする. 例. $\beta = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^{-1}, \beta' = \sigma_1^{-1} \sigma_2^{-1} \sigma_3$.

例として、 $\sigma_1\sigma_2\sigma_3^{-1}\sigma_4^{-1}$ と $\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_3\sigma_4$ も同等であるとする. 実際、組みひも $\sigma_1\sigma_2\sigma_3^{-1}\sigma_4^{-1}$ を 180 度回転すると $\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_3\sigma_4$ となる. これにライデマイスター変形とマルコフ移動を 適用すると $\sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1}\sigma_3\sigma_4$ が得られる. 同等性によって考えるべき組みひもを少なくできる.

以上をもとに本論文で議論する組みひもをまとめておく.3本の場合は一種類あり,4 本の場合は二種類あり,5本の場合は五種類ある.

$$3 \triangleq : \beta_3 = \sigma_1 \sigma_2^{-1}, \tag{4}$$

$$4 \ \pm \ ; \ \ \beta_4^{\rm I} = \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_3, \tag{5}$$

$$4 \, \pm \, : \, \beta_4^{\rm II} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^{-1}, \tag{6}$$

$$5 \pm \beta_5^{\mathrm{I}} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4^{-1}, \tag{7}$$

$$5 \triangleq : \beta_5^{II} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^{-1} \sigma_4, \qquad (8)$$

$$5 \triangleq : \beta_5^{\text{III}} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^{-1} \sigma_4^{-1}, \qquad (9)$$

$$5 \triangleq : \beta_5^{\text{IV}} = \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_3 \sigma_4^{-1}, \tag{10}$$

$$5 \triangleq : \beta_5^{\mathsf{V}} = \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4^{-1}, \tag{11}$$

組みひも β_3 と β_5^{IV} は特に交代組みひもと呼ばれる.これらを利用するとひもの交差の 仕方 (交差点における二つのひもの上下関係) が交代するからである.偶数本の場合,生 成元の個数が奇数個になるため,組みひもを繰り返し作用すると必ず元または逆元が連続 する.そのため,交代組みひもは偶数本の組みひもでは不可能で,奇数本の組みひもでの み可能である.元が連続する例を紹介しよう. β_4^1 を繰り返し作用すると, $\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_3\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_3$ … が得られる.この表現の中に, $\sigma_3\sigma_1$ が現れる.そのため, β_4^1 は交代 組みひもではないことが分かる.

対称性の定義 2.1.

編み物をするための組みひも β のもつ 180 度回転対称性を編み物の対称性 (Symmetry) と定義する.

編み物をするとき、定義 1.3(5)にあるように組みひもの作用を途中で終えることがある. そのため組みひも β が対称性を持っていても、編み物全体が対称性を持つかどうかわか らない.そのために編み物の対称性として上記の定義をした.組みひもは上から下へと構 成されていく.編み物の場合、一度生じた二つのひもの交差点を移動しない.その結果、 編み物が線対称性を持つことはない.ここでは最も簡単な 180 度回転対称性を持つかどう かを考えた.鏡映対称性も考えられるがここでは使用しない.

 β_3 , β_4^I , β_5^{III} , β_5^{IV} の四つの組みひもは 180 度回転対称性を持つ. これら以外は 180 度回 転対称性を持たない.表 1 において組みひもが 180 度回転対称性を持つ場合は〇と表現し, 180 度回転対称性を持たない場合は×と表現した. バーコフの美度では対称性があると美 度が大きくなるとしている. このようなことから対称性が編み物の美しさを代表している と考える.

元または逆元が連続する組みひもを利用して作られた編み物のひもは滑りやすい.この ことを踏まえて編み物の締まり度(Tightness)の定義する.

編み物の締まり度の定義 2.2.

(1) 交代組みひもの締まり度を0とする.

(2) 元または逆元の添字が連続しているとする.連続数を $n(\geq 2)$ とする.この場合,局 所締まり度を $-(n-1)^2$ と定義する.

(3) 局所締まり度の合計を、組みひもの締まり度とする.

 $\sigma_1\sigma_2\sigma_3^{-1}$ の場合, $\sigma_1\sigma_2$ は添え字が連続しているので締まり度は (-1) である. $\sigma_1\sigma_2^{-1}\sigma_3$ を連続して作用すると, $\sigma_3\sigma_1$ が現れるが, 添え字が連続していないので締まり度は 0 で ある. $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4^{-1}$ の締まり度は $-(3-1)^2 = -4$ である. (2)の局所締まり度を $-(n-1)^2$ と 定義した理由について説明する. 添え字が二つ連続している箇所が離れて二箇所あるとす る. 締まり度は 2× (-1) = -2 である. 添え字が三つ連続している箇所が一箇所あるとす る. もし局所締まり度を -(n-1) と定義すると締まり度は -2 である. これら二つの締 まり度は同じである. 一般に物が壊れることを考えると, 亀裂が大きいところから破壊が 始まる. ここでの二つの例では後者がのびやすい. 亀裂の箇所に歪みエネルギーが $(n-1)^2$ に比例して溜まると考え、局所締まり度を $-(n-1)^2$ と定義した.表1にそれぞれの組み ひもの締まり度をまとめた.

組みひも β_3 を利用してのび率を紹介する[5]. 組みひもの上部に伸縮自在の長さ1のひ も *a* と *b* を置く(図 3). これらを $R_0 = ab$ とまとめて書く. 図で示したようにひも *a* と *b* の向きを右向きとする. これに σ_1 を作用し, 次に σ_2^{-1} を作用する. 編み物では, ひも を隣のひもの上または下を通す. 組みひもで生成元を作用すると, 二つのひもをそれらの 中心で時計回りまたは反時計回りに 180 度の回転が生じる. 元は反時計回りの 180 度回転 を記述し, 逆元は時計回りの 180 度回転を記述している.

 σ_1 で一番目と二番目のひもを反時計回りに入れ替え, σ_2^{-1} で二番目と三番目のひもを 時計回りに入れ替えた結果である R_1 を組みひもの下部に描いた. *a* の像を $a_1 = \beta_3 a$ と, *b* の像を $b_1 = \beta_3 b$ と書く. $R_1 = \beta R_0 = a_1 b_1$ である. 組みひもを順次作用すると $R_n = \beta^n R_0 = a_n b_n$ ($n \ge 1$) が定義できる. ひも *a* と *b* ののび率を正確に求めるために, *a* と *b* の像の被覆関係を調べる.

$$a_1 = \beta_3 a = \bar{b}\bar{a},\tag{12}$$

$$b_1 = \beta_3 b = a b \bar{b}. \tag{13}$$

 a_1 について説明する. a の像はもとの b を左向きに被覆する.これを \bar{b} と表現した. 次にもとの a を左向きに被覆する.これを \bar{a} と表現した. 結果として $R_1 = a_1b_1 = \bar{b}\bar{a}ab\bar{b}$ が得られる.式(12)と式(13)を利用すると R_2 , R_3 等の表現が得られ,これらのグラフを描くこともできる[5].



図3:組みひもの上部に伸縮自在の長さ1のひもを置く. このひも $R_0 = ab$ に組みひも $\beta_3 = \sigma_1 \sigma_2^{-1}$ を一度作用した結果が $R_1 = a_1 b_1$ である.

本数	組みひも	複雑度	締まり度	対称性	編み物
3	β_3	2.6180	0	0	三つ編みに使用
4	$eta_4^{ m I}$	3.7320	0	0	四つ編みに使用
4	$eta_4^{ m II}$	2.2966	-1	×	
5	$eta_5^{ m I}$	2.1537	-4	×	
5	$eta_5^{ ext{II}}$	3.5060	-1	×	
5	$eta_5^{ m III}$	2.0153	-2	\bigcirc	五つ編みに使用
5	$eta_5^{ m IV}$	4.3902	0	0	
5	$eta_5^{ m V}$	2.9655	-1	0	
6	β_6^{I}	3.9354	-2	0	六つ編みに使用
6	$eta_6^{ ext{II}}$	3.4488	-4	0	
6	$\beta_6^{\rm III}$	4.7912	0	0	革を編む際に使用
7	$\beta_7^{\rm I}$	5.0498	0	0	
7	$eta_7^{ m II}$	2.9948	-8	0	7つ編みに使用

表1:組みひもの複雑度,締まり度,対称性.

 R_0 から R_1 への遷移関係を記述する遷移行列 M が得られる.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

1行目は a の像は a と b を一回被覆すると読む. 2行目は b の像は a を一回被覆しか つ b を二回被覆すると読む. 遷移行列では被覆の仕方は不要なので,ここでは被覆する 方向を無視した. 遷移行列 M の固有値は, $(3 \pm \sqrt{5})/2$ と求まる. ここで最大の固有値を $\lambda_{\max} = ((3 + \sqrt{5}))/2 = 2.6180 \cdots$ とする. 最初の長さを L_0 (= 2) とする. β_3^k 作用したときの 長さを L_k とする. 用意した二つのひもに β_3 を作用するたびに,全体の長さが平均的に λ_{\max} 倍になる. つまり

$$L_k = \lambda_{\max}^k L_0 \tag{15}$$

二つのひもを入れ替える過程で折り曲げも生じている.つまり,組みひもを作用すると引 きのばしと折り曲げが自然に生じる.

 λ_{\max} を求めるためには,最初に用意した R_0 に組みひもを作用し R_1 の図形を描く必要がある. そうすると,遷移行列 M が決まり λ_{\max} が求まる.

のび率が大きいほど編みにくくなると考えられる.よってのび率を編み物を行う際の複 雑度と定義する.

編み物を行う際の複雑度の定義 2.3.

組みひもの作用を記述する遷移行列 M の固有値の最大値を,編み物を行う際の複雑度 (Complexity) と定義する.

表 1 にはそれぞれの組みひもの複雑度を与えた.ここで複雑度の意味を述べておこう. ひもを隣のひもの上を通し、次に隣接しているひもの上を通すという作業と、ひもを隣の ひもの上を通し、次に隣接しているひもの下を通すという作業を比べると後者の方の作業 が複雑である.これより、交代組みひもの複雑度が大きいことが理解できるであろう.遷 移行列の固有値の最大値を編み物を行う際の複雑度とすることは妥当であろう.

仮想的にすべてのひもがある媒質(空気でもよい)の中にあると考える.そうすると二つ のひもを入れ替える操作で、媒質が攪拌される. 遷移行列は媒質の攪拌の様子を表現して いる. 媒質がどんどん引きのばされ折り曲げられていく様子を想像して欲しい.引きのば しと折り曲げの過程はまさにカオスである.のび率の対数をとった $\ln \lambda_{max}$ が位相的エン トロピーを与える. $\lambda_{max} > 1$ であるから、位相的エントロピーは正である.我々が編み物 をしている際に、気がつかないが周りの媒質を攪拌している[5].その結果、指数関数的な 引きのばしと折りたたみが周りの媒質に生じているのである.つまり我々の見えないとこ ろにカオスがある.これが副題の意味である.このカオスは組みひもだけで決まるカオス であるから位相的カオス[6]と呼ばれている.

3. 解析

第3節で導入した三つの量をもとに四つ編みから調べよう. 組みひも β_4^{l} (図 4(a)) は編 みにくいが対称性がある. しかし, 組みひも β_4^{ll} (図 4(b)) は編みやすいが対称性がない. 二つの組みひもで締まり度は組みひも β_4^{l} が良い. つまり, 対称性がありかつ締まり具合 が良い組みひも β_4^{l} が四つ編みとして使用されていると結論できる.

次に五つ編みを考える. これらは図 5 に描かれている. 対称性を持つ組みひもが美しい と考えると,組みひも β_5^{III} , β_5^{IV} ,または β_5^{V} の使用が望ましい. 次に締まり度を考えると β_5^{IV} (図 5(d)) が良いのだがあまりにも複雑度が高い. 実際に使用されている組みひも β_5^{III} (図 5(c)) は複雑度が最も小さいが,締まり度が最も悪い. つまり,組みやすさが優先され た結果,組みひも β_5^{III} が実際に使用されていると結論できる.

交代組みひも β_5^{IV} で作成した編み物が見た目の美しさは一番であろうと筆者は考えている.実際に組むのは複雑であるが、できあがった編みのもの締まり度が良い.筆者としては交代組みひも β_5^{IV} を利用して五つ編みをすることを勧めたい.この組みひもの複雑度は革を編むときに使用する六つ編み(式(18))の複雑度(4.7912)に比べると小さい.



図4:四つ編み. (a) $\beta_4^{I} = \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_3$. (b) $\beta_4^{II} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^{-1}$.



図5:五つ編み. (a) $\beta_5^{I} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4^{-1}$. (b) $\beta_5^{II} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^{-1} \sigma_4$. (c) $\beta_5^{III} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^{-1} \sigma_4^{-1}$. (d) $\beta_5^{IV} = \sigma_1 \sigma_2^{-1} \sigma_3^{-1} \sigma_4^{-1}$. (e) $\beta_5^{V} = \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_3^{-1} \sigma_4^{-1}$.



図6:六つ編み. (a) $\beta_6^{I} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^{-1} \sigma_4 \sigma_5$. (b) $\beta_6^{II} = \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5^{-1}$.(c) $\beta_6^{III} = \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_3^{-1} \sigma_4 \sigma_5^{-1}$.

次に六つ編みについて簡単に述べておく. 簡単な組みひもの数が増えるので対称性を持 つ下記の組みひもだけを考える.

$$\beta_6^{\rm I} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3^{-1} \sigma_4 \sigma_5 \tag{16}$$

$$\beta_6^{\rm II} = \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 \sigma_5^{-1} \tag{17}$$

$$\beta_6^{\text{III}} = \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_3^{-1} \sigma_4 \sigma_5^{-1} \tag{18}$$

これらの組みひもは図 6 に描かれている. この中で締まり度を見ると β_6^1 は (-2) で, β_6^{II} は (-4), β_6^{III} は 0 である. β_6^{II} は滑りやすいから利用しないのは当然であろう. 実際 に β_6^1 (図 6(a)) が六つ編みとして利用されている. 複雑度は 3.9354 である. 革を使った 六つ編みの場合, β_6^{III} (図 6(c)) が利用されている. 複雑度は 4.7912 とかなり大きい. 滑 りやすい革の場合, 締まり度が優先されて組みひも β_6^{III} が利用されているのだろう. 組む ためのひもの本数が多くなるにつれて編み方に多くのバリエーションがある. 本論文で導 入した三つの概念を通してみると編み方の違いが明瞭になる.



図7:七つ編み. (a) $\beta_7^{I} = \sigma_1^{-1}\sigma_2\sigma_3^{-1}\sigma_4\sigma_5^{-1}\sigma_6$. (b) $\beta_7^{II} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4^{-1}\sigma_5^{-1}\sigma_6^{-1}$.

実際に使用されている七つ編みについて述べておく.

$$\beta_7^{\rm l} = \sigma_1^{-1} \sigma_2 \sigma_3^{-1} \sigma_4 \sigma_5^{-1} \sigma_6, \tag{19}$$

$$\beta_7^{\rm II} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4^{-1} \sigma_5^{-1} \sigma_6^{-1}. \tag{20}$$

これらは対称性を持つ. 組みひも β_{7}^{1} (図 7(a))の締まり度は 0 で複雑度は 5.0498 であ る. 組みひも β_{7}^{II} (図 7(b))の締まり度は -4-4=-8 で複雑度は 2.9948 である. β_{7}^{II} は 交代組みひもで複雑度が非常に高いがよく締まる. β_{7}^{II} は組みやすいが締まり度が悪いか ら実用にはならないであろう. 筆者としては,編み物をする際に七つ編みを利用する積極 的な理由は無いと考えている.

4. 終わりに

編み物を評価するために三つの量を導入した.対称性,締まり度と複雑度である.対称 性については,180度回転対称性があるかないかで組みひもを区別した.対称性をもっと 細かく分類して評価の方法を変えても良い.締まり度は試案として導入した.のび率を複 雑度として採用した.編み物を評価するために導入した三つの概念は試案である.是非に ついては今後の議論を待ちたい.

編み物に 180 度回転対称性がある組みひもを利用することは当然のことと考えられる. そうすると編み物を評価する因子として締まり度と複雑度が重要になる. 締まり度と複雑 度は互いに相反する概念であることに注意しよう. 複雑で編みにくい編み物は締まり具合 が良いが, 逆に編みやすい編み物は締まりが悪い. 人が編み物をするとき, ある目的があ って行う. 編み物をする人は, 目的をよく吟味して編みやすさを優先するのか, 締まり具 合を優先するか決める必要がある.

すでに紹介したように、美しさを定量化しようという試みはバーコフによってなされた. ここでの議論はこの試みの延長線上にあると考えている.バーコフは「美度=秩序/複雑さ」 として美度を定義している.対称性は、「秩序」の重要な因子である.「複雑さ」は図形と して単純なのか複雑なのかを表す指標であって、本論文で定義したような力学的な複雑度 とは異なる.編み物についてバーコフの美度を適用すると編み物をさらに細かく評価でき るであろう.また、美度の評価の因子に力学的な複雑度を追加することも今後検討する必 要がある.

織り上がった編み物を見てもパターンは周期的な繰り返しである.編み物を組んでいる 途中で周りの媒質に及ぼす影響を考えると、そこに位相的カオスが潜んでいるのである. 編み物をする過程で位相的カオスを体験しているとも言える.また完成した編み物を見な がら見えない位相的カオスを想像することも楽しいと思う.

最後に本原稿を読んで適切なコメントをしてくださった査読者に感謝いたします.

A 組みひもの表現

A.1 ライデマイスター変形についての補足

式(1)は元だけで表現されている.式(1)を全て逆元した関係も成立する.式(1)が元と逆 元を含んだ場合の変形も与えておく.

$$\sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k^{-1} = \sigma_{k+1}^{-1} \sigma_k \sigma_{k+1}, \tag{21}$$

$$\sigma_k \sigma_{k+1}^{-1} \sigma_k^{-1} = \sigma_{k+1}^{-1} \sigma_k^{-1} \sigma_{k+1}.$$
(22)

式(2)を全て逆元した関係も成立する.式(2)が元と逆元を含んでいても式(2)は成立する.

A.2 組みひもの正規表現

表現を簡単にするために記号 (k) を導入する. (k) は元 σ_k または逆元 σ_k^{-1} を意味する. ここでは $n \ge 2$ として, (n+1) 本の簡単な組みひもを考える. この組みひもの生成元を巡回して末尾に (n) がくる表現にする.

$$X(n-1)Y(n).$$

ただしXとYは生成元の集まりである.生成元の巡回に関してはマルコフ移動を利用した.

Y の中に (n-2) が含まれない場合, 直ちに XY(n-1)(n) が得られる. (n-1) の移 動に関してはライデマイスター変形(式(2))を利用した.

Y の中に (n-2) が含まれる場合, X(n-1) は (n-1)X と書ける. (n-1) を巡回し て末尾に移動する.

X Y(n)(n-1).

XYの中に (n-1) が含まれないから, XY(n) は (n)XY と書ける. (n) を巡回して末尾 に移動する.

$$XY(n-1)(n).$$

次に (n-2) を見つけて (n-2) の左側にある生成元の集まりを X' と書く. また (n-2) の右側にあり, かつ (n-1) の左側にある生成元の集まりを Y' と書く.

$$X'(n-2)Y'(n-1)(n).$$

Y'の中に (n-3) が含まれない場合, X'Y'(n-2)(n-1)(n) が得られる.Y'の中に (n-3)が含まれる場合, X'(n-2) は (n-2)X'と書ける.(n-2) を巡回して末尾に移動する. X'Y'(n-1)(n)(n-2).

X'Y'の中に (n-2) が含まれないから, X'Y'(n-1)(n) は (n-1)(n)X'Y' と書ける. (n-1)(n) を巡回して,

$$X'Y'(n-2)(n-1)(n)$$

が得られる.以上の手順を繰り返すと添え字が昇順に並んだ下記の正規表現の組みひもが 得られる.

$$(1)(2) \cdots (n-1)(n).$$

A.3 よく利用されている編み方

ミサン画廊[1]で紹介されている編み方を紹介する.

(2k+1) $(k \ge 1)$ つ編みでよく利用されている編み方と記述法.

(1) 左端にあるひもを右方向に k 本のひもの上部を移動する. この過程は $\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_k$ と書ける.

(2) (1)の後に、右端にあるひもを左方向に k のひもの上部を移動する. この過程は $\sigma_{2k}^{-1}\sigma_{2k-2}^{-1}\cdots\sigma_{k+1}^{-1}$ と書ける.

(3) まとめて $\sigma_1 \cdots \sigma_k \sigma_{2k}^{-1} \cdots \sigma_{k+1}^{-1}$ が得られるが,正規表現 $\sigma_1 \cdots \sigma_k \sigma_{k+1}^{-1} \cdots \sigma_{2k}^{-1}$ として書ける.

2k (≥ 2)つ編みでよく利用されている編み方と記述法.

(1) 左端にあるひもを右方向に (k-1) 本のひもの上部を移動する. この過程は $\sigma_1 \sigma_2 \cdots \sigma_{k-1}$ 書ける.

(2) (1)の後に、右端にあるひもを左方向に (k-1) 本のひもの下部を移動する. この過程 は $\sigma_{2k-1}\sigma_{2k-2}\cdots\sigma_{k+1}$ と書ける.

(3) (1)で動かしたひもを, (2)で動かしたひもの下を通過して交差させる. これは σ_k^{-1} と書ける.

(4) まとめて $\sigma_1 \cdots \sigma_{k-1} \sigma_{2k-1} \cdots \sigma_{k+1} \sigma_k^{-1}$ が得られるが,正規表現 $\sigma_1 \cdots \sigma_{k-1} \sigma_k^{-1} \sigma_{k+1} \cdots \sigma_{2k-1}$ として書ける.

参考文献

[1] ミサン画廊のホームページ.

http://www.wb.commufa.jp/powetcho/

ここで紹介した編み物は一般にミサンガと呼ばれている.よってミサンガに関する代表的なホームページを紹介する.ここで紹介しなかった編み物の例も多く掲載されている.

- [2] 村杉邦男, 結び目理論とその応用, (日本評論社, 1993).
- [3] 山口喜博,四つ編み,組みひも,位相的カオス,形の科学会誌,第30巻,第2号,(2015), 177-178. (シンポジウム要旨).
- [4] G. D. Birkhoff は "Aesthetic measure" という本を 1933 年に出版している. この本 は下記のホームページからダウンロードできる. ホームページは "Birkhoff Aesthetic measure" で検索しても簡単に見つかる. "Aesthetic measure" は「美度」 と邦訳されている.

http://www.skidmore.edu/~flip/Site/Lab/Entries/2008/10/24_Aesthetics_ files/Birkhoff%20Aesthetic%20Measure.pdf

- [5] Yamaguchi, Y., Topological properties of the braid stirring pattern, Forma, 30, (2015), 51-57.
- [6] Boyland, P., Aref, H., and Stremler, M. A., *Topological fluid mechanics of stirring*, J. Fluid Mech., 403, (2000), 277-304.

素数の奇妙な振る舞い

- 眠られぬ夜のための問題 -

山口喜博

帝京平成大学 〒209-0193 千葉県市原市うるいど南 4-1 chaosfractal@iCloud.com

Strange behavior of prime numbers

Yoshihiro Yamaguchi Teikyo Heisei University

(2016 年 1 月 14 日受付)

Keywords: Prime number, tent map, periodic orbit.

あるときに, テント写像

 $X_{n+1} = 1 - |2X_n - 1| \quad (0 \le X_n \le 1)$

で初期点と周期数の関係を調べる必要が生じた. 初期点は有理数として p/q と書く. q が偶数ならば,軌道点は必ず X = 0 に向かう. そのため q は奇数とする.

例として 1/7 から出発すると, 2/7, 4/7, 6/7 と得られ, 次に 2/7 となり一周期が 完成する. 3/7 とか 5/7 から出発しても同様の周期軌道が得られる. つまり, 1/7, 3/7, 5/7 は周期 3 の周期軌道点に入り込む初期点であることがわかる. 周期軌道の場合, p として可能な値は 2 以上で (q-1) 以下の偶数である. これより p/q は既約分数であ る. それでは問題 1 を述べよう.

問題 1. q を 3 以上の素数とする. テント写像において初期点 2/q から出発した周期軌 道の周期を求めよ.

実際に軌道点を計算すれば周期は簡単にわかる(付録 A のプログラム 1 を参考にして ほしい).計算せずに素数の性質から周期が決まらないかというのが問題の主旨である. 計算するしか方法がないとすると,解を得るにおいて手順しか与えられないという意味で 重要な例となる[1].

問題 1 と関係している問題 2 を述べるために少し準備を行う. 問題 1 と同じく p=2とする. 初期点 2/q から出発した周期軌道の周期が $L_q = (q-1)/2$ となる性質を持つ素 数 q は P_1 に含まれるということにする. ここで L_q は, 2 以上で q-1 以下の偶数の 個数であるとする. もし周期が $L_q/2$ ならば,初期点 2/q から出発する周期軌道の他にも う一つ周期軌道が存在することになる. この性質を満たす素数 q は P_2 に含まれるとい うことにする. このようにして周期が L_q/n ($n \ge 1$) ならば, n 個の周期軌道が存在する. この性質を満たす素数 q は P_n に含まれるということにする. そうするとここで述べた 方法で 3 以上の素数を分類できる. 例を紹介しよう.

(1) q = 3 の場合は 2/3 のみで、これはテント写像の不動点の一つである.これは周期軌 道である.3 は (3-1)/2 = 1 を満たすから、 P_1 に含まれる. P_1 に含まれる最小の素数 は 3 である.

(2) q=17 の場合. (q-1)/2=8. 周期4の周期軌道が二つある.

 $2/17 \rightarrow 4/17 \rightarrow 8/17 \rightarrow 16/17 \rightarrow 2/17$,

 $6/17 \rightarrow 12/17 \rightarrow 10/17 \rightarrow 14/17 \rightarrow 6/17.$

17 は P_2 に含まれ,かつ P_2 に含まれる最小の素数である.

(3) q = 31 の場合. (31-1)/2 = 15. 周期5の周期軌道が三つある. $2/31 \rightarrow 4/31 \rightarrow 8/31 \rightarrow 16/31 \rightarrow 30/31 \rightarrow 2/31$, $6/31 \rightarrow 12/31 \rightarrow 24/31 \rightarrow 14/31 \rightarrow 28/17 \rightarrow 6/31$, $10/31 \rightarrow 20/31 \rightarrow 22/31 \rightarrow 18/31 \rightarrow 26/17 \rightarrow 10/31$.

31 は P₃ に含まれ, かつ P₃ に含まれる最小の素数である.

 P_4 に含まれる最小の素数は 73 で、 P_5 に含まれる最小の素数は 151 である. 付録 A に 3 以上の素数を分類するプログラム 2 を載せた. それでは問題 2 を述べよう.

問題 2. 素数 $q (\geq 3)$ が、 P_n に含まれるための必要十分条件は何か.

例えば m をソフィー・ジェルマン素数[2]とする. ソフィー・ジェルマン素数の定義 より, q = 2m + 1 も素数となる. この条件を満たす素数 q は P_1 に含まれる. 例とし て m = 2, q = 5. m = 3, q = 7. m = 5, q = 11.

このような性質を持った素数だけが P₁ に含まれるわけではない.

思いついたことを述べておこう.

(1) 形の科学の第 69 回シンポジウムで上記の問題を検討した結果を報告した[3]. しかし, その後まったく進展がない. もし読者の皆さんが興味を持たれたら問題 1 と 2 を考えて 欲しいと思って本稿を書いた. 考える前に付録 A の Mathematica [Wolfram Research の 登録商標] のプログラム 1 と 2 を実行して欲しい. テント写像の計算は簡単なようだが手 計算ではすぐ嫌になってしまう. 考えるのはプログラム 1 と 2 を実行してからでも遅く はないと思う. 眠られない夜に実行するには最適なプログラムだと思う. 分数を分数とし て計算してくれる数式処理ソフトウエアのありがたさも感じられる. このような計算をし ているとある奇妙な現象を見落とすことになる. これは(2)で述べる.

結果を見ているといろんな予想が思い浮かび更に眠られなくなると思う.予想を思い ついて計算しているとすぐ反例を見つけてしまう.筆者は,このような試行錯誤を繰り返 している.これも数論の楽しみのひとつではないかと思っている.

(2) 馬場・長島はある論文[4]を発表した.この論文で議論されている内容は長島・馬場によるカオスのテキスト[5]にも載っている.調べている内容は、テント写像と二進変換写像(Y_{n+1} = 2Y_n (Mod 1))における初期点と周期数の関係である.この論文では初期点を分数ではなく小数で表示する.そうすると小数部分をある有限な桁で打ち切ることになる. 有限の桁で打ち切ったときに生じる奇妙な現象を解析している.テント写像とか二進変換 写像のような分かりきった写像でも奇妙な現象が生じるものだという印象を受けた.桁落 ち丸め誤差を含む数値計算では避けて通れない問題を提起している.ここでは分数を分数 として扱っているので馬場・長島の結果とは直接の関係はない.再度述べるが,テント写 像のような写像でもまだわからない現象がある.

(3) ロジスティック写像 $(x_{n+1} = ax_n(1-x_n)$ (0 ≤ a ≤ 4)) を考える. a = 4 では,この 写像は変換 $(x_n = \sin^2((\pi/2)X_n))$ でテント写像になる.このことを念頭に置くとまた別の 問題があることに気がつく.例として q = 17 の場合,二つの周期軌道がある.ロジステ ィック写像において,これらはどのような分岐で生じたのか,どちらの周期軌道が先に生 じたのかという問題である. q = 17 の場合, 6/17 から出発する周期軌道は周期 2 の周 期軌道が周期倍分岐をして生じた周期軌道である.一方の 2/17 から出発する周期軌道は 通称山登り周期軌道と呼ばれており接線分岐で生じる. 6/17 から出発する周期軌道が先 に生じ, 2/17 から出発する周期軌道が後で生じる.ちなみに q = 31 の場合,周期が 5 で奇数であるから接線分岐で生じたことがわかる.10/31 から出発する周期軌道が最初 に生じ,次に 6/31 から出発する周期軌道が生じ,最後に 2/31 から出発する周期軌道が

(4) 力学系の問題の中に数論が介入してくることはよくある.逆に数論の枠から出て素数 を考えることも面白いのではないかと思い,素数と力学系の問題を結びつけた問題をここ で紹介した.このようなことで素数の分野に少しでも寄与できれば嬉しい限りである.

A プログラム

Mathematica の関数 Prime を利用する. Prime[n]は n 番目の素数を与える. Prime[2]は3を与える.

プログラム 1.

q として 2 番から 51 番までの 50 個の素数を与え,それぞれの周期と周期軌道の個数 を出力する.周期軌道の個数が 2 ならば,その *q* は *P*₂ に含まれる.

nmax = 51; nmin = 2; p = 2; Do[q = Prime[n]; x = p/q; kmax = (q - 1)/2; y[0] = x; Do[x = 1 - Abs[2 x - 1]; y[k] = x, {k, 1, kmax}]; Do[If[y[0] == y[k], {period = k, Break[]}], {k, 1, kmax}]; Print["n=", n, "素数=", q, "周期=", period, "周期軌道の個数=", kmax/period], {n, nmin, nmax}]; プログラム 2.

2番から 51番の素数を分類する. P_1 , P_2 の順にこれらに含まれる素数が出力される.

文献

- [1] 山口喜博,「ミリンダ王の問い」における証明,形の科学会誌 第 28 巻,1 号,
 (2013), 22-23.(シンポジウム要旨).
- [2] Ribenboim, P., 素数の世界 (共立出版, 2001年). 吾郷孝視 訳編
- [3] 山口喜博,谷川清隆,テント写像における素数の奇妙な振る舞い,形の科学会誌 第 25巻,1号,(2010),73-74.(シンポジウム要旨).
- [4] Baba, Y., and Nagashima, H., Prog. Theor. Phys. 81, (1989), 541-543.
- [5] 長島弘幸, 馬場良和, カオス入門(培風館, 1992年). 127-128.

会告

○新入会の皆様(敬称略)

- 田中 良巳 横浜国立大学環境情報研究院
- 白井 順二 株式会社テラノヴァ・インターナショナル

○新入会の皆様のご紹介(敬称略)

このコーナーでは、交流の促進を目的として、新入会の皆様の「主要研究分野」(Aと略記)と「形の興味」(Bと略記)、もしくは、お寄せいただいたご自身によるプロフィール記事(Cと略記)を掲載します.

田中 良巳

白井 順二

A: 建築設計・都市計画・プロダクトデザイン B: 物体の輪郭ではなく表面の境界の探求

○平成 27 年度をもって御退会の会員(追加)

渡辺 泰成 元帝京平成大学 ディジタルビジネス学科 (名誉会員、ご逝去ご退会)

○ご逝去

形の科学会より、謹んでお悔やみ申し上げます。

渡辺 泰成先生

結晶学、情報科学の研究をされ、準周期パターン、周期・非周期フラクタルやカオスのパタ ーンアートへの応用、そして画像データベースに多大な業績を残されました。2003年形の科 学会第9回功労賞を受賞されました。また、本会と関連の深い NPO 法人科学芸術学祭研究所 ISTA を 2007年に創立されました。2015年 12月 27日にご逝去されました。

○流れの画像データベースのご案内

FORMA を出版している Scipress の web サイト(Forma が掲載されているサイト)上の次の URL に e-Library が公開されています。

http://www.scipress.org/e-library/index.html

この中の、"Flow Visualization"

http://www.scipress.org/e-library/fv/index.html

は流れを可視化した高解像度の貴重な画像です。ぜひ一度ごらんください。

○2015 年度形の科学会第2回運営委員会議事録

日時:2015年11月21日(土)12:10-13:20

場所:〒350-0394 埼玉県比企郡鳩山町石坂 東京電機大学 鳩山キャンパス 12号館 出席:石原正三、小川直久、海野啓明、沓名健一郎、塩澤友規、高木隆司、高田宗樹、種 村正美、手嶋吉法、西垣功一、原田新一郎、福井義浩、松浦執、宮本潔、山口喜博 議題:

(1)会員関係報告 2015年11月20日現在397名(2015年11月21日406名).ただし消息不明を除くと340名。

(2)2014 年度活動が以下のように報告された。

・形の科学シンポジウムを開催した。

第77回:埼玉県立大学教育研修棟2014年6月13日-15日「ひとを支える形」(副テーマ: 世界結晶年)(世話人:石原正三)。

第78回: 2014年11月22日(土)~24日(月祝) 「こころのかたち・こころのゆらぎ」佐賀大学鍋島キャンパス看護学科棟1階講義室、代表世話人:京都大・宮崎修次(佐賀大・富永広貴、福岡県立大・石崎龍二)。

・会誌第29巻1~3号を刊行した。

・FORMA Vol.29 を刊行した。

・2014 年度形の科学談話会「かたちシューレ 2015@熱海」東洋大学熱海研修センター(世話人:吉野隆)を開催した。

・日本地球惑星科学連合「遠洋域の進化」セッションを開設して、生形氏に招待講演を依 頼した。

 ・「ポリノミオグラフィー-数学とアートの結合-」Bahman Kalantari 博士講演会(主催: 福井大学 COC 事業および大学院工学研究科プロジェクト研究センター、2014 年 7 月 2 日 (水))を共催した。

・旭町学術資料展示館サテライトミュージアム企画展示「新潟のジオパーク展 - 糸魚川 と佐渡の魅力-」(2014 年 7 月 12 日(土)~8 月 29 日(金))を後援した。

・第16回日本感性工学会大会を協賛した。

・統計数理研究所「2014年度数学協働プログラム採択ワークショップ」知能システム工学 専攻談話会"健康増進・ヘルスプロモーションに関する数学ニーズの発掘"(2014/12/26福井 大学)を共催した。

・新潟大学コア・ステーション/形の科学研究センターシンポジウム(2015/2/27,28 新潟大 学)を共催した。

(3)2015 年度活動計画が次のように報告された。

・2015年度のシンポジウム開催。

第79回:「生物に見られる「ねじれ」構造」千葉工業大学津田沼キャンパス2015年6月 12-14日(世話人:本多久夫、手嶋吉法)。

第80回:「スポーツ・パフォーミングアーツに現れる形」東京電機大学2015年11月21-23 日(世話人:松浦昭洋)。

・会誌第 30 巻 1~3 号を刊行する。

・FORMA Vol.30 を刊行する。

・2015 年度「かたちシューレ」: 2015 年 12 月 21 日~22 日福井県あわら市および福井大 学文京キャンパス(一般公演は 21 日のみ。22 日は数学協働プログラムワークショップと の共催(参加無料))を開催する。

・日本地球惑星科学連合「遠洋域の進化」セッション(2015/5/26)を開設し、佐々木猛智氏 に招待講演を依頼。

・第16回日本感性工学会大会(2015/9/4~9/6)を協賛した。

・46th ISAGA conference/Japan Association of Simulation & Gaming (2015/7/17~7/21) を後援した。

- ・新潟大学旭町学術資料展示館サテライトミュージアム企画展示「殻がつくる世界」 (2015/7/11~8/28)を後援した。
- (4)2016年度活動計画(シンポジウム開催)について報告された。

第81回:「量子科学とかたち」2016年6月3日(金)-5日(日)統計数理研究所(東京都立川市)(世話人:西垣功一、中村振一郎)

第82回:「産業技術と形」産業技術総合研究所2016年11月(世話人:中島善人) (5)その他

- -第15回国際放散虫研究集会(15th InterRad)を共催する。
- ・会誌の学術刊行物申請について報告された。
- -会誌の印刷について報告された。